МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 330.45

ДВУХКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ПОДХОД В ИГРАХ С ПРИРОДОЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ФОНДОВОМУ ИНВЕСТИРОВАНИЮ

В.А. Горелик[1,2], Т.В. Золотова[3]

[1]Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва
[2]Московский педагогический государственный университет, г. Москва
[3] ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве РФ», г. Москва

Предложена модель принятия решений в задачах фондового инвестирования как игра с природой с известными вероятностями состояний. Целью исследования является разработка новых принципов принятия решений в играх с природой и их применение для анализа статистических данных и выбора стратегий фондового инвестирования. В качестве оценки эффективности принимается математическое ожидание выигрыша инвестора, а в качестве оценки риска – среднеквадратическое отклонение. Эта двухкритериальная задача формализуется путем перевода оценки риска в ограничение. Научная новизна результатов исследования заключается в получении аналитического метода решения возникающей нелинейной задачи математического программирования и алгоритма поиска оптимальной смешанной стратегии. Приведен практический пример применения предложенных методов нахождения стратегий инвестирования на базе реальных статистических данных.

Ключевые слова: *управление риском, принцип оптимальности, двухкритериальный подход, математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение.*

doi: 10.26456/2219-1453/2020.4.158–169

Введение

Процесс принятия решений в условиях неполной информации можно формализовать как «игру с природой». Во многих работах (см., например, [12, 13, 15]) предлагается использовать для решения экономических задач только один из известных в теории игр с природой критериев эффективности: Вальда, Сэвиджа, Гурвица, Байеса. При таком подходе в случае вероятностной неопределенности получается решение в чистых стратегиях, что не всегда соответствует предпочтениям ЛПР, и не учитывается риск, как одна из важных составляющих моделирования экономической ситуации. Как известно критерии Вальда, Гурвица, Байеса максимизируют только значение выигрыша, а минимизирующий потери критерий Сэвиджа в случае вероятностной неопределенности эквивалентен критерию Вальда.

Применение математических методов при принятии решений с учетом риска рассматривалось, например, в работах [1–7, 9–11, 14, 19, 16, 17]. Остановимся на тех, в которых аппарат теории «игр с природой» описывает оптимизационные модели управления риском. В работе [5] экономические задачи управления риском решаются на основе использования линейной свертки критериев Вальда и Сэвиджа. В статье [3] предлагается принцип гарантированного результата (принцип минимакса), а также оценка риска по Сэвиджу в задачах нахождения оптимальной стратегии с учетом риска. В статье [2] излагался двухкритериальный подход «эффективность – риск» к определению принципа оптимальности при принятии решений в стохастических условиях. В качестве оценки эффективности использовалось математическое ожидание выигрыша, а в качестве оценки риска – функция VAR, которая наряду с дисперсией широко применяется в качестве оценки риска (см, например, [9–11, 14, 19, 16, 17]). В данной работе мы будем использовать среднеквадратическое отклонение (СКО) и дисперсию.

Пусть ЛПР имеет возможность выбрать одну из стратегий (альтернатив) $i=1,\ldots,n$, при известном наборе возможных вариантов состояний внешней среды (природы) $j=1,\ldots,m$. Выигрыш от i-го решения при j-м состоянии внешней среды есть a_{ij}. Например, в задачах фондового инвестирования это могут быть доходности финансовых инструментов при различных сценариях развития. Матрица выигрышей от реализации возможных решений есть $A=\|a_{ij}\|$. Зная вероятности состояний природы q_j, ЛПР выбирает стратегию, которая приведет к наибольшему возможному выигрышу и к наименьшим потерям вследствие неоднозначности исхода из-за неполноты информации. Эти критерии, как правило, противоречивы – чем более эффективен способ инвестиций, тем он более рискован. Поэтому выбор принципа оптимальности основан на некотором компромиссе между ними.

Максимизация выигрыша с ограничением по риску

Итак, в качестве оценки эффективности стратегии i примем математическое ожидание выигрыша $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j$. а в качестве оценки риска – СКО $\sigma_i = (\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} - \bar{a}_i)^2 q_j)^{0.5}$. Рассмотрим постановку задачи двухкритериальной оптимизации, в которой функция СКО переведена в ограничение с верхним пороговым значением σ_0. В чистых стратегиях получаем задачу

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \to \max_{i \in I}, \quad I = \{i \mid \sigma_i \le \sigma_0\}. \tag{1}$$

Смешанная стратегия в задаче инвестирования может интерпретироваться как распределение средств в разные финансовые инструменты. Как показывают расчеты на реальных данных российского фондового рынка, в частности, рассматриваемый далее практический пример, случайные значения доходностей финансовых инструментов слабо коррелированы. Поэтому в данной работе будем предполагать, что такая коррелированность отсутствует или ею можно пренебречь. Заметим, что полученные далее результаты могут быть обобщены на случай учета коррелированности случайных доходностей.

Обозначим через p_i долю средств, вкладываемых в i-й финансовый инструмент. Величины a_{ij} будем интерпретировать как доходности финансовых инструментов при соответствующих состояниях природы (экономических ситуациях). Тогда математическое ожидание доходности стратегии $p=(p_1,\ldots,p_n)$ – портфеля инвестора, есть $\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_i p_i$, а СКО случайной величины доходности при отсутствии коррелированности определяется по формуле $\sigma=(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 p_i^2)^{0.5}$.

Постановка задачи на максимум математического ожидания доходности при ограничении сверху на СКО имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_i p_i \to \max_{p\in S_1},$$
$$S_1=\{p\,|\,(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 p_i^2)^{0.5}\le\sigma_0,\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1,\ p_i\ge 0,\ i=1,\ldots,n\}. \qquad (2)$$

Для того, чтобы задача (2) имела решение, необходимо, чтобы пороговое значение σ_0 было не меньше минимально возможного риска $\sigma_{\min}$, значение которого определяется из решения вспомогательной задачи

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 p_i^2 \to \min_{p\in S_0},\quad S_0=\{p\,|\sum_{i=1}^{n}p_i=1,\ p_i\ge 0,\ i=1,\ldots,n\}. \qquad (3)$$

Это есть задача выпуклого программирования, поэтому необходимые и достаточные условия экстремума с использованием функции Лагранжа $L_0(p,\mu)=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 p_i^2)+\mu(1-\sum_{i=1}^{n}p_i)$ имеют вид:

$$\sigma_i^2 p_i-\mu=0,\ i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1.$$

Откуда получаем решение $p_i=(\sigma_i^2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sigma_j^2})^{-1},\ i=1,\ldots,n$, а минимальное значение целевой функции в (3) (дисперсия портфеля минимального риска) есть $\sigma_{\min}^2=(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sigma_j^2})^{-1}$. Таким образом, задача (2) имеет решение, если $\sigma_0\ge\sigma_{\min}$. Далее считаем, что $\sigma_0>\sigma_{\min}$, т. к. в случае равенства решением задачи (2) является просто портфель минимального риска. Заметим, что портфель минимального риска является полноразмерным, т.е. все $p_i>0$.

Изложим метод нахождения оптимальных истинно смешанных (содержащих не менее двух ненулевых компонент) стратегий. В дальнейшем будем считать, что все $\bar{a}_i$ различны. Если две стратегии имеют одинаковые математические ожидания доходности, то при равенстве СКО они эквивалентны, и одну из них можно просто исключить, а когда одна из них имеет большее СКО, то она не может входить в оптимальную стратегию.

В задаче выпуклого программирования (2) для применения условий оптимальности удобнее первое ограничение возвести в квадрат. Тогда функция Лагранжа имеет вид:

$$L_1(p,\lambda,\mu)=\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_i p_i+\tfrac{1}{2}\lambda(\sigma_0^2-\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 p_i^2)+\mu(\sum_{i=1}^{n}p_i-1)\,,\ \lambda\ge 0.$$

Решением задачи (2) может быть неполноразмерный портфель, т. е. содержащий нулевые компоненты. Введем множество индексов I_0, соответствующих ненулевым p_i. Квадратичное ограничение в задаче (2) для портфеля с компонентами из множества I_0 может выполняться, только если $\sigma_0^2\ge(\sum_{i\in I_0}\frac{1}{\sigma_j^2})^{-1}$, т. е. σ_0^2 не меньше дисперсии портфеля минимального риска для данной структуры портфеля. При этом в случае равенства имеем $p_i=(\sigma_i^2\sum_{j\in I_0}\frac{1}{\sigma_j^2})^{-1}, i\in I_0$. В случае строгого неравенства для нахождения решения используем условия оптимальности, которые примут вид $\bar{a}_i-\lambda\sigma_i^2 p_i+\mu=0$, $i\in I_0$, $\bar{a}_i-\lambda\sigma_i^2 p_i+\mu\le 0$, $i\notin I_0$. Если $\lambda=0$, то имеем $\bar{a}_i+\mu=0\ \ \forall i\in I_0$. Но в силу предположения о том, что все $\bar{a}_i$ различны это равенство возможно только для одного индекса, т.е. в данном случае условия оптимальности могут выполняться только для множества I_0, содержащего один индекс. Если квадратичное ограничение в задаче (2) не является активным, то $\lambda=0$. Поэтому для истинно смешанной оптимальной стратегии, у которой хотя бы две компоненты отличны от нуля, квадратичное ограничение должно быть активным и $\lambda>0$. Тогда имеем $p_i=\frac{\bar{a}_i+\mu}{\lambda\sigma_i^2}$, $i\in I_0$. Из второго ограничения задачи (2) имеем $\sum_{i\in I_0}\frac{\bar{a}_i+\mu}{\lambda\sigma_i^2}=1$, откуда $\lambda=\sum_{i\in I_0}\frac{\bar{a}_i+\mu}{\sigma_i^2}$. Так как в силу сделанного замечания первое ограничение в задаче (2) является активным, то имеет место также равенство $\sum_{i\in I_0}\frac{(\bar{a}_i+\mu)^2}{\lambda^2\sigma_i^2}=\sigma_0^2$, откуда $\lambda^2=\sigma_0^{-2}\sum_{i\in I_0}\frac{(\bar{a}_i+\mu)^2}{\sigma_i^2}$ и $(\sum_{i\in I_0}\frac{\bar{a}_i+\mu}{\sigma_i^2})^2=\sigma_0^{-2}\sum_{i\in I_0}\frac{(\bar{a}_i+\mu)^2}{\sigma_i^2}$. Введем обозначения:

$$k_1=\sum_{i\in I_0}\frac{\bar{a}_i^2}{\sigma_i^2}\,,\ k_2=\sum_{i\in I_0}\frac{\bar{a}_i}{\sigma_i^2}\,,\ k_3=\sum_{i\in I_0}\frac{1}{\sigma_i^2}\,, \tag{4}$$

тогда $\lambda = k_2 + k_3\mu$ и $\sigma_0^2\lambda^2 = k_1 + 2k_2\mu + k_3\mu^2$. Получаем квадратное уравнение для определения μ: $\mu^2 + 2\mu\frac{k_2}{k_3} + \frac{k_1 - \sigma_0^2 k_2^2}{k_3(1-\sigma_0^2 k_3)} = 0$. Корни этого уравнения есть $\mu_{1,2} = -\frac{k_2}{k_3} \pm \frac{1}{k_3}\sqrt{\frac{k_1k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}}$.

Покажем, что выражение, стоящее под знаком радикала, положительное. Для того, чтобы показать, что числитель $k_1k_3 - k_2^2$ этого выражения положителен, воспользуемся неравенством Коши-Буняковского: $\langle x, y\rangle^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$ (квадрат скалярного произведения векторов не превосходит произведения квадратов их норм). Введем вектора x и y с компонентами $x_i = \frac{\bar{a}_i}{\sigma_i}$, $y_i = \frac{1}{\sigma_i}$, $i \in I_0$. Тогда $\|x\|^2 = k_1$, $\|y\|^2 = k_3$, $\langle x, y\rangle = k_2$ и $k_1k_3 - k_2^2 \ge 0$. На самом деле в неравенстве Коши-Буняковского равенство имеет место только в случае, когда вектора x и y являются коллинеарными. В силу предположения теоремы все $\bar{a}_i$ различны и векторы с компонентами $x_i = \frac{\bar{a}_i}{\sigma_i}$ и $y_i = \frac{1}{\sigma_i}$ не являются коллинеарными. Поэтому при наличии не менее двух ненулевых компонент у этих векторов числитель положителен.

Для доказательства положительности знаменателя воспользуемся условием $\sigma_0^2 > (\sum_{i\in I_0}\frac{1}{\sigma_j^2})^{-1}$, откуда $k_3 = \sum_{i\in I_0}\frac{1}{\sigma_i^2} > \frac{1}{\sigma_0^2}$ и $\sigma_0^2 k_3 - 1 > 0$.

Так как $\lambda = k_2 + k_3\mu > 0$ и $k_3 > 0$, то $\mu > -\frac{k_2}{k_3}$, т.е. является корнем квадратного уравнения со знаком плюс перед радикалом. В результате имеем следующие формулы для нахождения решения задачи (2):

$$\mu^0 = -\frac{k_2}{k_3} + \frac{1}{k_3}\sqrt{\frac{k_1k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}}, \quad \lambda^0 = \sqrt{\frac{k_1k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}}, \qquad (5)$$
$$p_i^0 = \frac{\bar{a}_i + \mu^0}{\lambda^0\sigma_i^2}, i \in I_0, \quad p_i^0 = 0, i \notin I_0,$$

где I_0 – некоторое подмножество множества индексов $I=\{1,\ldots,n\}$, а k_1, k_2, k_3 определяются согласно (4).

Алгоритм нахождения решения задачи (2) включает перебор подмножеств ненулевых компонент I_0, удовлетворяющих условию $\sigma_0^2 \ge (\sum_{i\in I_0}\frac{1}{\sigma_j^2})^{-1}$. Так как для задачи выпуклого программирования (2) условия оптимальности являются и достаточными, то если появляется удовлетворяющее им решение (с учетом условия неположительности производных в нуле, которое имеет вид $\overline{a}_i + \mu^0 \le 0$, $i \notin I_0$, а также условий $p_i^0 \ge 0$, $i \in I_0$), оно оптимально. В реальных задачах инвестирования число стратегий (видов финансовых инструментов) редко превышает 8–10 и решение находится весьма быстро. Перебор имеет смысл начинать с множества всех индексов $I=\{1,\ldots,n\}$, затем отбрасывать по одному и т.д., что позволяет построить дерево с вершинами, соответствующими различным I_0, и использовать метод ветвей и границ.

Пример нахождения стратегии инвестирования на российском фондовом рынке

Инвесторы, принимая решение на фондовом рынке, прогнозируют будущие цены (или доходности) финансовых инструментов. В свою очередь при прогнозировании будущих доходностей можно использовать фундаментальный или технический анализ. Фундаментальный анализ основан на исследовании закономерностей, которые определяют стратегию в долгосрочной перспективе, а технический анализ предполагает исследование предыдущих показателей финансовых инструментов (например, доходностей) для краткосрочных или среднесрочных сделок [8].

Технический анализ предполагает следующую процедуру обработки информации. Если имеются статистические данные для каждого актива, то в матрице выигрышей каждой строке будет соответствовать набор статистических значений доходностей. Состояниями природы здесь являются рассматриваемые временные интервалы, вероятность каждого состояния есть $1/m$, где m – количество интервалов для каждого актива. Несмещенная оценка для математического ожидания определяется по формуле $\overline{a}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$, а несмещенная оценка для СКО – по формуле $\sigma_i = (\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij} - \overline{a}_i)^2)^{0.5}$.

Проведем технический анализ и найдем оптимальную стратегию инвестирования, используя реальные данные о котировках акций российских компаний Лента, М.Видео и группы компаний ПИК за период с 01.05.2020 по 31.08.2020. Выбор этих компаний объясняется тем, что в течение рассматриваемого периода в условиях пандемии цены акций этих компаний демонстрировали относительно стабильный рост. На рис. 1 приведены значения цен закрытия акций всех рассматриваемых компаний за указанный период, экспортированных в файл Excel (данные взяты с сайта Инвестиционной компании «ФИНАМ» [4]). На основании данных о еженедельных ценах закрытия рассчитаны еженедельные значения доходностей компаний, средние значения доходностей, дисперсии, СКО и ковариационные моменты за данный период (рис. 1, см. ниже).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		LNTA	MVID	PIKK			LNTA	MVID	PIKK	
2	<DATE>	<CLOSE>	<CLOSE>	<CLOSE>			доходности акций			
3	20200504	157,5	362	379,9			-0,05016	-0,04669	-0,0415899	
4	20200511	149,6	345,1	364,1			0,005348	-0,00493	0,01153529	
5	20200518	150,4	343,4	368,3			0,010638	-0,0099	0,04235677	
6	20200525	152	340	383,9			0,101316	0,2	0,01536859	
7	20200601	167,4	408	389,8			-0,01434	0,011275	0,01513597	
8	20200608	165	412,6	395,7			0,031515	-0,06035	0,05256507	
9	20200615	170,2	387,7	416,5			-0,0329	0,051844	0,01992797	
10	20200622	164,6	407,8	424,8			0,036452	-0,00834	0,00094162	
11	20200629	170,6	404,4	425,2			0,029308	-0,00668	-0,0362183	
12	20200706	175,6	401,7	409,8			0,014806	-0,00672	0,05173255	
13	20200713	178,2	399	431			0,044893	0,118296	0,0549884	
14	20200720	186,2	446,2	454,7			0,152524	-0,03339	0,07081592	
15	20200727	214,6	431,3	486,9			-0,01724	0,079991	0,02402957	
16	20200803	210,9	465,8	498,6			-0,00474	0,003435	-0,0018051	
17	20200810	209,9	467,4	497,7			-0,04478	0,07531	-0,0036166	
18	20200817	200,5	502,6	495,9			0,019451	0,108237	0,00342811	
19	20200824	204,4	557	497,6			0,016145	0,036445	0,00602894	
20	20200831	207,7	577,3	500,6						
21										
22						мат,ож	0,02745	0,017035	0,02146333	
23						дисп	0,003077	0,005504	0,00125289	
24						ско	0,055471	0,074189	0,03539621	
25						ковар	0,000459	0,000804	1,8682E-05	
26										

Р и с . 1. Котировки акций компаний Лента, М.Видео, ПИК
и их статистические характеристики

Стратегия 1 – вложение в акции компании Лента, стратегия 2 – вложение в акции компании М.Видео, стратегия 3 – вложение в акции группы компаний ПИК. Средние значения доходностей при этом равны $\bar{a}_1$=0.027450 (2.7450%), $\bar{a}_2$=0.017035 (1.7035%) и $\bar{a}_3$=0.021463 (2.1463%), дисперсии равны $\sigma_1^2 = 0.003077$, $\sigma_2^2 = 0.005504$ и $\sigma_3^2 = 0.001253$. Ковариационные моменты при этом принимают значения порядка 10^{-4}-10^{-5}, что более чем на порядок меньше соответствующих дисперсий, поэтому ими можно пренебречь.

Пусть в задаче (1) $\sigma_0^2 = 0.004$. Ограничения задачи (1) выполняются для стратегий 1 и 3, и решением в чистых стратегиях является вложение в акции компании Лента.

Решим задачу (2) в смешанных стратегиях. При этом дисперсия портфеля минимального риска $\sigma_{\min}^2 = (\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\sigma_j^2})^{-1} = 0.000766$. Если $\sigma_0^2 = 0.000766$, то по полученным формулам состава портфеля минимального риска имеем p=(0.249064, 0.139240, 0.611695). Дисперсия портфеля минимального риска для структуры из двух видов акций равна 0.000890, и получается, очевидно, при исключении бумаги с максимальной дисперсией (в данном случае это акции компании М.Видео). Поэтому для порогового значения в интервале $0.000766 < \sigma_0^2 < 0.000890$ решением задачи (2) является обязательно полноразмерный портфель. Зададим, например, пороговое значение дисперсии $\sigma_0^2 = 0.0008$. Для этих данных задача (2) имеет вид

$$0.027450 p_1 + 0.017035 p_2 + 021463 p_3 \to \max_p,$$

$$0.003077 p_1^2 + 0.005504 p_2^2 + 0.001253 p_3^2 \le 0.0008,$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Решение может быть найдено с использованием формул (5) при $I_0=I$:

$$k_1 = \frac{0.027450^2}{0.003077} + \frac{0.017035^2}{0.005504} + \frac{0.021463^2}{0.001253} = 0.665297,$$

$$k_2 = \frac{0.027450}{0.003077} + \frac{0.017035}{0.005504} + \frac{0.021463}{0.001253} = 29.14703\ ,$$

$$k_3 = \frac{1}{0.003077} + \frac{1}{0.005504} + \frac{1}{0.001253} = 1304.823\,,$$

$$\lambda^0 = \sqrt{\frac{0.5665297 \cdot 1304.823 - 29.14703^2}{0.0008^2 \cdot 71304.823 - 1}} = 20.562954,$$

$$\mu^0 = -\frac{29.14703}{1304.823} + \frac{1}{1304.823}\sqrt{\frac{0.665297 \cdot 1304.823 - 29.14703^2}{0.0008^2 \cdot 1304.823 - 1}} = -0.006579,$$

$$p_1^0 = \frac{0.027450 - 0.006579}{20.562954 \cdot 0.003077} = 0.32986\ , \quad p_2^0 = \frac{0.017035 - 0.006579}{20.562954 \cdot 0.005504} = 0.09239\ ,$$

$p_3^0 = \frac{0.021463 - 0.006579}{20.562954 \cdot 0.001253} = 0.57775$. При этом максимальное значение целевой функции (средней доходности) есть 0.023029.

При $\sigma_0^2 \ge 0.000890$ решением задачи (2) может быть как полноразмерный, так и неполноразмерный портфель.

Так, например, при $\sigma_0^2 = 0.001$ решением задачи (2) является полноразмерный портфель: k_1, k_2, k_3 принимают те же значения, λ^0=7.799908, μ^0= –0.01636, p_1^0=0.46207, p_2^0=0.01572, p_3^0=0.52220. Максимальное значение средней доходности есть 0.024160.

Пусть теперь $\sigma_0^2 = 0.002$. Возьмем I_0={1, 2, 3}, тогда k_1, k_2, k_3 принимают те же значения, λ=3.394285, μ= –0.019737, p_1=0.73854, p_2= –0.14458, p_3=0.40604. Условие неотрицательности $p_i^0 \ge 0$, $i \in I_0$, в данном случае не выполняется, значит, данный вектор p решением не является. Так как при этом p_2 отрицательное, то можно предположить, что оптимальная смешанная стратегия содержит вторую нулевую компоненту. Поэтому возьмем I_0={1, 3}, тогда k_1=0.612571, k_2=26.05197, k_3=1123.139, λ^0=2.731308,

$\mu^0 = -0.020764$, $p_1^0 = 0.79559$, $p_2^0 = 0$, $p_3^0 = 0.20441$. Значение целевой функции есть 0.024164. Условие $\bar{a}_2 + \mu^0 \le 0$ для отброшенной второй стратегии (вложение в акции компании М.Видео) выполняется:

$$\bar{a}_2 + \mu^0 = 0.017035 - 0.020764 = -0.003728 .$$

Так как условия оптимальности для задачи (2) являются необходимыми и достаточными, то дальнейший перебор подмножеств множества индексов не требуется, и решением является вложение в акции компании Лента и группы компаний ПИК.

В табл. 1 содержатся характеристики пяти инвестиционных портфелей: доли средств, вкладываемые в акции компаний, дисперсия, средняя доходность.

Таблица 1

Решения задачи инвестирования при различных пороговых значениях риска

Портфель	Доли средств			Дисперсия портфеля	Средняя доходность портфеля
	Лента	М.Видео	ПИК		
1	0.249064	0.139240	0.611695	0.000766	0.022338
2	0.32986	0.09239	0.57779	0.0008	0.023029
3	0.46207	0.01572	0.52220	0.001	0.024164
4	0.79559	0	0.20441	0.002	0.026227
5	1	0	0	0.00308	0.02745

Портфель 1 соответствует стратегии минимального риска, нахождение составов портфелей 2 и 3 приведено в данном пункте, состав портфеля 4 найден аналогично, и процедура его нахождения здесь не приводится. Портфель 5 соответствует чистой стратегии с наибольшей возможной доходностью (акции компании Лента); задавая пороговое значение большее или равное дисперсии доходности акций компании Лента, будем каждый раз получать решение в чистых стратегиях, т. е. портфель 5.

На рис. 2 изображено эффективное множество стратегий с отмеченными на нем оптимальными стратегиями согласно таблице.

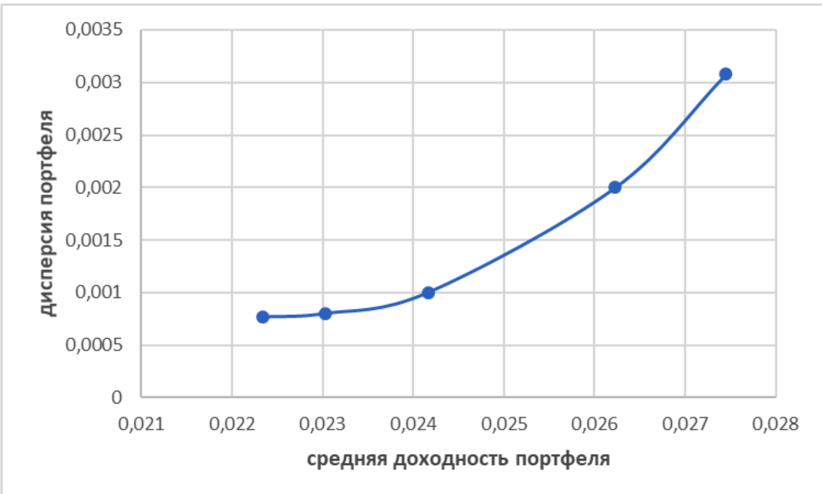

Рис. 2. Оптимальные стратегии инвестирования на эффективном множестве

Заключение

Понятие принципа оптимальности в задачах принятия решений в условиях неполной информации является весьма неоднозначным. ЛПР должен иметь возможность выбирать из спектра моделей принятия решений, отражающих зависимость вида рационального поведения от имеющейся информации и его отношения к риску.

В данной работе предложен подход к моделированию процедур принятия решений на фондовом рынке, основанный на использовании двух критериев – эффективности и риска. Получен аналитический метод решения задачи максимизации средней доходности инвестиционного портфеля с ограничением по СКО. Заметим, что при расчетах с использованием формул (5) ограничение по риску выполняется в точности как равенство, в отличие от результатов вычисления с использованием численного метода команды «Поиск решения» в Excel, а оптимальное решение по формулам (5) находится с большей точностью.

Проведенные тестовые расчеты демонстрируют, как с уменьшением порогового значения риска в ограничении по дисперсии увеличивается диверсификация инвестиций (число ненулевых компонент в портфеле). Этот эффект является вполне очевидным, однако возможность численно оценить зависимость состава оптимального портфеля от данного параметра представляется весьма полезной для инвестора.

Список литературы

1. Горелик В.А., Золотова Т.В. О некоторых функциях риска и их применении в инвестиционных задачах // Управление риском. 2011. №. 3. С. 59–64. №4. С. 2–8.
2. Горелик В.А., Золотова Т.В. Принцип оптимальности «математическое ожидание – VAR» и его применение в задачах фондового инвестирования // Управление развитием крупномасштабных систем: Труды 12 международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 148–154.
3. Жуковский В.И., Кириченко М.М. Риски и исходы в многокритериальной задаче при неопределенности // Управление риском. 2016. № 2. С. 17–25.
4. Инвестиционная компания «ФИНАМ». [электронный ресурс] – Режим доступа. – URL: https://www.finam.ru/ (дата обращения: 02.10.2020)
5. Клименко И.С, Плуталов М.А., Чеботарев Г.А. Сравнительный анализ критериев выбора стратегий в «игре с природой» // Вестник российского нового университета. Серия: сложные системы: модели, анализ и управление. 2015. № 1. С. 55–59.
6. Лабскер Л.Г. Свойство синтезирования критерия Вальда-Сэвиджа и его экономическое приложение // Экономика и математические методы. 2019. Т. 55. № 4. С. 89–103.
7. Прохорова М.С. Исследование связи решений задач на максимум линейной свертки «математическое ожидание – дисперсия» и на минимум дисперсии при ограничении по доходности // Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО. 2014. №3. С. 162–166.
8. Шарп Уильям Ф., Александер Гордон Дж., Бэйли Джефри В. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 2018. 1028 с.
9. Ben Saïda A., Koubaa Y., Slim S. Value-at-Risk under Lévy GARCH models: Evidence from global stock markets // Journal of International Financial Markets, Institutions and Money // 2017. Vol. 46. P. 30–53.
10. García F., González-Bueno J.A., Oliver J. Mean-variance investment strategy applied in emerging financial markets: Evidence from the Colombian stock market // Intellectual Economics. 2015. Vol. 9. Issue 1. P. 22–29.
11. Gong X., Lin B. Structural changes and out-of-sample prediction of realized range-based variance in the stock market // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2018. Vol. 494. P. 27–39.

12. Harman R., Prus M. Computing optimal experimental designs with respect to a compound Bayes risk criterion // Statistics & Probability Letters. 2018. Vol. 137. P. 135–141.
13. Kuzmics C. Abraham Wald's complete class theorem and Knightian uncertainty // Games and Economic Behavior. 2017. Vol. 104. P. 666–673.
14. Ourir A., Snoussi W. Markets liquidity risk under extremal dependence: Analysis with VaRs methods // Economic Modelling. 2012. Vol. 29. Issue 5. P. 1830–1836.
15. Radner R. Decision and Choice: Bounded Rationality // International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences (Second Edition). 2015. P. 879–885.
16. Riedle T. Using Market BuVaR as countercyclical Value at Risk approach to account for the risks of stock market crashes // The Quarterly Review of Economics and Finance. 2018. Vol. 69. P. 308–321.
17. Su X. Measuring extreme risk spillovers across international stock markets: A quantile variance decomposition analysis // The North American Journal of Economics and Finance. 2020. Vol. 51. Article 101098.

Об авторах:

ГОРЕЛИК Виктор Александрович – профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Вычислительный центр им. А.А. Дородницина ФИЦ ИУ РАН, Московский педагогический государственный университет, e-mail: vgor16@mail.ru, ORCID: 0000−0003−2435−0796, SPIN-код: 3547-6587

ЗОЛОТОВА Татьяна Валерьяновна – доцент, доктор физико-математических наук, профессор Департамента анализа данных и машинного обучения, ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве РФ», e-mail: tgold11@mail.ru, ORCID: 0000-0001-5185-0687, SPIN-код: 6997-9121

TWO-CRITERIA APPROACH IN GAMES WITH NATURE AND ITS APPLICATION TO STOCK INVESTMENT

V.A. Gorelik[1,2], T.V. Zolotova[3]

[1]Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow
[2]Moscow State Pedagogical University, Moscow
[3] FSOBU VO "Financial University under the Government of the Russian Federation", Moscow

A decision-making model in stock investment problems is proposed as a game with nature with known state probabilities. The aim of the study is to develop new principles of decision-making in games with nature and their application for the analysis of statistical data and the choice of stock investment strategies. The mathematical expectation of the investor's payoff is taken as an assessment of efficiency, and the standard deviation as a risk assessment. This two-criteria problem is formalized by translating risk assessment into a constraint. The scientific novelty of the research results lies in obtaining the analytical method for solving an arising nonlinear problem of mathematical programming and the algorithm for finding the optimal mixed strategy. The practical example of the application of the proposed methods for finding investment strategies based on real statistical data is given.
Keywords*: risk management, principle of optimality, mathematical expectation, standard deviation, two-criterion approach*

About the authors:

GORELIK Viktor Aleksandrovich – Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Dorodnicyn Computing Centre FRC CSC RAS, Moscow State Pedagogical University, e-mail: vgor16@mail.ru, ORCID: 0000-0003-2435-0796, SPIN-код: 3547-6587

ZOLOTOVA Tat'jana Valer'janovna – associated professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Data Analysis and Machine Learning, Financial University under the Government of the Russian Federation, e-mail: tgold11@mail.ru, ORCID: 0000‒0001‒5185‒0687, SPIN-код: 6997-9121

References

1. Gorelik V.A., Zolotova T.V. O nekotoryh funkcijah riska i ih primenenii v investicionnyh zadachah // Upravlenie riskom. 2011. №. 3. S. 59–64. №4. S. 2–8.
2. Gorelik V.A., Zolotova T.V. Princip optimal'nosti «matematicheskoe ozhidanie – VAR» i ego primenenie v zadachah fondovogo investirovanija // Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnyh sistem: Trudy 12 mezhdunarodnoj konferencii. M.: IPU RAN, 2019. S. 148–154.
3. Zhukovskij V.I., Kirichenko M.M. Riski i ishody v mnogokriterial'noj zadache pri neopredelennosti // Upravlenie riskom. 2016. № 2. S. 17–25.
4. Investicionnaja kompanija «FINAM». [jelektronnyj resurs] – Rezhim dostupa. – URL: https://www.finam.ru/ (data obrashhenija: 02.10.2020)
5. Klimenko I.S, Plutalov M.A., Chebotarev G.A. Sravnitel'nyj analiz kriteriev vybora strategij v «igre s prirodoj» // Vestnik rossijskogo novogo universiteta. Serija: slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie. 2015. № 1. S. 55–59.
6. Labsker L.G. Svojstvo sintezirovanija kriterija Val'da-Sjevidzha i ego jekonomicheskoe prilozhenie // Jekonomika i matematicheskie metody. 2019. T. 55. № 4. S. 89–103.
7. Prohorova M.S. Issledovanie svjazi reshenij zadach na maksimum linejnoj svertki «matematicheskoe ozhidanie – dispersija» i na minimum dispersii pri ogranichenii po dohodnosti // Jekonomika, statistika i informatika. Vestnik UMO. 2014. №3. S. 162–166.
8. Sharp Uil'jam F., Aleksander Gordon Dzh., Bjejli Dzhefri V. Investicii. M.: INFRA-M, 2018. 1028 s.
9. Ben Saïda A., Koubaa Y., Slim S. Value-at-Risk under Lévy GARCH models: Evidence from global stock markets // Journal of International Financial Markets, Institutions and Money // 2017. Vol. 46. P. 30–53.
10. García F., González-Bueno J.A., Oliver J. Mean-variance investment strategy applied in emerging financial markets: Evidence from the Colombian stock market // Intellectual Economics. 2015. Vol. 9. Issue 1. P. 22–29.
11. Gong X., Lin B. Structural changes and out-of-sample prediction of realized range-based variance in the stock market // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2018. Vol. 494. P. 27–39.
12. Harman R., Prus M. Computing optimal experimental designs with respect to a compound Bayes risk criterion // Statistics & Probability Letters. 2018. Vol. 137. P. 135–141.
13. Kuzmics C. Abraham Wald's complete class theorem and Knightian uncertainty // Games and Economic Behavior. 2017. Vol. 104. P. 666–673.
14. Ourir A., Snoussi W. Markets liquidity risk under extremal dependence: Analysis with VaRs methods // Economic Modelling. 2012. Vol. 29. Issue 5. P. 1830–1836.
15. Radner R. Decision and Choice: Bounded Rationality // International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences (Second Edition). 2015. P. 879–885.
16. Riedle T. Using Market BuVaR as countercyclical Value at Risk approach to account for the risks of stock market crashes // The Quarterly Review of Economics and Finance. 2018. Vol. 69. P. 308–321.
17. Su X. Measuring extreme risk spillovers across international stock markets: A quantile variance decomposition analysis // The North American Journal of Economics and Finance. 2020. Vol. 51. Article 101098.