УДК 517.54

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВ С.Н. БЕРНШТЕЙНА И В.И. СМИРНОВА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Граф С.Ю.[*,**], **Никитин И.А.**[*]

[*]Тверской государственный университет, г. Тверь

[**]Петрозаводский государственный университет, г. Петрозаводск

Поступила в редакцию 21.05.2021, после переработки 10.06.2021.

Гармонические отображения и, в частности, гармонические полиномы находят приложения во многих задачах прикладной математики, математической физики, механики и электротехники. Это связано с ключевой ролью, которую гармонические функции играют в краевых задачах математической физики. Гармонические полиномы используются при описании плоских гармонических векторных полей в гидродинамике, в теории жидких кристаллов, в теории плоского потенциала. Оценки гармонических полиномов и их производных применяются при разработке неравномерных сеток и триангуляций во многих вычислительных схемах и математическом моделировании. В середине двадцатого столетия советскими математиками С.Н. Бернштейном и В.И. Смирновым были доказаны результаты из области дифференциальных неравенств, связывающих многочлены $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и их производные $P'(z)$. Данная тематика сохраняет актуальность, о чем свидетельствует большое число посвященных ей новых публикаций российских и зарубежных математиков. В настоящей работе доказаны результаты, обобщающие неравенства С.Н. Бернштейна и В.И. Смирнова на случай гармонических многочленов $F = H + \overline{G}$, где H, G – аналитические многочлены. В частности получены условия типа мажорирующих неравенств на единичной окружности, позволяющие связать производные аналитических и антианалитических частей гармонических многочленов, все нули которых расположены в единичном круге. Доказательства основных результатов получены с помощью топологического аналога известного в теории функций принципа аргумента, позволяющего свести некоторые задачи теории гармонических многочленов к аналитическому случаю. Из полученных результатов следуют классические неравенства Смирнова и Бернштейна в случае аналитических многочленов. Доказанные теоремы проиллюстрированы примером, демонстрирующим точность сформулированных нами условий и оценок.

Ключевые слова: гармонические многочлены, неравенство Бернштейна, неравенство Смирнова.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 2. С. 16–25.
https://doi.org/10.26456/vtpmk612

Введение

Исследованию свойств многочленов на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ посвящено большое количество работ математиков всего мира (см., например, [3 – 7]), что обусловлено обширными приложениями многочленов в теории приближений, во многих численных задачах при расчете оптимальных сеток для разностных схем задач математической физики и электротехники.

В середине двадцатого столетия советскими математиками С.Н. Бернштейном и В.И. Смирновым были доказаны результаты из области дифференциальных неравенств, связывающих многочлены и их производные. Исторически появление неравенств С.Н. Бернштейна и В.И. Смирнова для полиномов связано с прикладной задачей, возникшей в рамках химии, и известной как проблема Д.И. Менделеева о наилучшей оценке модуля производной многочлена, ограниченного на данном компактном множестве (см., например, [2]). Приведем эти результаты без доказательства.

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ – единичный круг, $\partial\mathbb{D}$ – граница множества $\mathbb{D}$ (единичная окружность). Степень n многочлена $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0$, будем обозначать символом $\deg P(z)$.

Теорема 1. *(С.Н. Бернштейн [1]) Пусть $H(z)$, $h(z)$ – многочлены, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. *Все нули $H(z)$ лежат в замыкании круга $\mathbb{D}$;*
2. $\deg H(z) \geq \deg h(z)$*;*
3. $|H(z)| \geq |h(z)|$ *для всех $z \in \partial\mathbb{D}$.*

Тогда $|H'(z)| \geq |h'(z)|$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$.

Позднее теорема 1 была обобщена В.И. Смирновым.

Теорема 2. *(В.И. Смирнов [2]) Пусть $H(z)$, $h(z)$ – многочлены, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Тогда для любых фиксированных $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$*

$$|zH'(z) - aH(z)| \geq |zh'(z) - ah(z)|$$

для всех значений a, принадлежащих образу круга $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq |z|\}$ при конформном отображении $\phi_n(\zeta) = \frac{n\zeta}{1+\zeta}$.

Замечание 1. Теорема 1 получается из теоремы 2 при $a = 0$.

Данная тематика сохраняет актуальность, о чем свидетельствует большое число связанных с ней новых публикаций (см., например, [3 – 7]).

В этой статье предложены и доказаны обобщения приведённых выше теорем на случай гармонических многочленов.

1. Гармонические полиномы и особенности их поведения

Гармоническим многочленом называется функция вида

$$F(z) = H(z) + \overline{G(z)},$$

где $H(z)$ и $G(z)$ – аналитические многочлены.

Степенью гармонического многочлена $F(z)$ называется число, равное максимальной из степеней аналитической и антианалитической частей гармонического многочлена, то есть

$$\deg F(z) := \max\{\deg(H(z)); \deg(G(z))\}.$$

Поведение гармонических многочленов в общем случае существенно отличается от поведения аналитических многочленов. Известно, например, что нули отличного от константы аналитического многочлена изолированы [8]. Нули гармонических многочленов изолированными быть не обязаны. Простейшим примером, иллюстрирующим данный факт, может послужить многочлен $R(z) = z + \overline{z} \equiv 2Re(z)$, множество нулей которого совпадает с мнимой осью.

Доказано [6], что в случае, когда $\lim\limits_{z\to\infty} \inf |F(z)| > 0$, нули гармонического многочлена $F(z)$ изолированы. Из этого факта в частности следует, что нули гармонического многочлена $F(z)$ изолированы, если степени аналитической и антианалитической частей различны.

В силу важности для последующих доказательств приведём ещё один результат – обобщение принципа аргумента на случай гармонических функций. Этот принцип, как известно [9, 10], носит чисто топологический характер и допускает как широко известные конкретизации (принцип аргумента для аналитических функций [8]), так и существенные обобщения [10]. В нашем случае важна следующая формулировка, которая легко получается из результатов Кристи [10].

Пусть $f(z_0) = 0$ и точка z_0 не является предельной для множества $f^{-1}(0)$. Пусть $i(f, z_0)$ – топологический индекс функции $f(z)$ в точке z_0, определяемый равенством

$$i(f, z_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg_C f(z),$$

где $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$ и $\varepsilon > 0$ настолько мало, что f не обращается в ноль в проколотой ε-окрестности точки z_0. Здесь и далее под $\Delta \arg_\gamma f(z)$ будем понимать приращение аргумента функции $f(z)$, вычисленное при однократном обходе точкой z кривой γ в положительном направлении.

Нетрудно убедиться, что, если f дифференцируема и якобиан $J_f(z_0) > 0$, то значение $i(f, z_0)$ равно 1, а при $J_f(z_0) < 0$ значение $i(f, z_0)$ равно -1. Если же якобиан $J_f(z_0)$ функции f в точке z_0 равен нулю, то значение топологического индекса $i(f, z_0)$ функции f в точке z_0, вообще говоря, может быть любым целым числом [11].

Теорема 3. *(Обобщение принципа аргумента [10]). Пусть гармоническая функция $f(z)$ непрерывна в замыкании жордановой области D с положительно ориентированной границей γ, $f(z) \neq 0$ на γ, $\{z_l\}_{l=1}^k$ – множество нулей функции $f(z)$, попадающих в область D. Тогда*

$$\Delta \arg_\gamma f(z) = 2\pi \sum_{l=1}^{k} i(f(z), z_l).$$

Замечание 2. Приращение аргумента в теореме 3 зависит только от взаимного расположения кривой γ и нулей функции $f(z)$. Точнее: для любых двух замкнутых кривых γ_1 и γ_2, гомотопных друг другу в области определения функции f с выколотыми точками z_l, где $\{z_l\}_{l=1}^n$ – множество, состоящее из всех нулей функции $f(z)$, справедливо равенство $\Delta \arg_{\gamma_1} f(z) = \Delta \arg_{\gamma_2} f(z)$.

2. Основные результаты

Следующая теорема представляет собой обобщение неравенства С.Н. Бернштейна на случай гармонических многочленов.

Теорема 4. *Пусть* $F(z) = H(z) + \overline{G(z)}$, $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ *– гармонические многочлены, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. *Все нули* $F(z)$ *лежат в* $\mathbb{D}$*;*
2. $\deg H(z) > \deg G(z)$*;*
3. $\deg F(z) \geq \deg f(z)$*;*
4. $|H(z)| > |G(z)|$ *для всех* $z \in \partial\mathbb{D}$*;*
5. $|H(z)| \geq |h(z)| \geq |g(z)|$ *для всех* $z \in \partial\mathbb{D}$.

Тогда существует константа K_0,

$$1 \leq K_0 \leq \frac{1 + \sup\limits_{z \in \partial\mathbb{D}} |\frac{g(z)}{h(z)}|}{1 - \max\limits_{z \in \partial\mathbb{D}} |\frac{G(z)}{H(z)}|}, \tag{1}$$

такая, что для любых α, $\beta \in \mathbb{R}$ *и для любого* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$

$$K_0 |H'(z) + e^{i\alpha} G'(z)| \geq |h'(z) + e^{i\beta} g'(z)|. \tag{2}$$

Оценка K_0 *в неравенстве (1) точна.*

Доказательство. Рассмотрим окружность γ_r достаточно большого радиуса r с центром в нуле. Поскольку радиус r велик и $\deg H(z) > \deg G(z)$, то для всех $z \in \gamma_r$ значение $\left|\frac{\overline{G(z)}}{H(z)}\right|$ меньше единицы и

$$\Delta \arg_{\gamma_r} F(z) = \Delta \arg_{\gamma_r} H(z) + \Delta \arg_{\gamma_r} \left(1 + \frac{\overline{G(z)}}{H(z)}\right) = 2\pi n,$$

где n – степень многочлена $H(z)$.

Так как все нули $F(z)$ лежат в $\mathbb{D}$, то окружность $\partial\mathbb{D}$ гомотопна γ_r в $\mathbb{C}$ с выколотыми нулями F и в силу замечания 2

$$\Delta \arg_{\partial\mathbb{D}} F(z) = \Delta \arg_{\gamma_r} F(z) = 2\pi n.$$

Таким образом, имеют место равенства

$$2\pi n = \Delta \arg_{\partial\mathbb{D}} F(z) = \Delta \arg_{\partial\mathbb{D}} H(z) + \Delta \arg_{\partial\mathbb{D}} \left(1 + \frac{\overline{G(z)}}{H(z)}\right),$$

причём слагаемое $\Delta \arg_{\partial\mathbb{D}} \left(1+\frac{\overline{G(z)}}{H(z)}\right)$ равно нулю, так как $|H(z)| > |G(z)|$ на $\partial\mathbb{D}$. Следовательно,

$$\Delta \arg_{\partial\mathbb{D}} F(z) = \Delta \arg_{\partial\mathbb{D}} H(z) = 2\pi n,$$

то есть $H(z)$ имеет все свои нули в круге $\mathbb{D}$. Также из условия *4* по теореме Руше (см., например, [8]) следует, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ аналитический многочлен $H(z) + e^{i\alpha}G(z)$ имеет n корней в $\mathbb{D}$.

Далее подберём действительную положительную константу K_0 так, чтобы на окружности $\partial\mathbb{D}$ было справедливо неравенство

$$\frac{1}{K_0}\left|\frac{h(z)+e^{i\beta}g(z)}{H(z)+e^{i\alpha}G(z)}\right| < 1.$$

Для этого достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$K_0 > \sup_{z\in\partial\mathbb{D}}\left|\frac{h(z)+e^{i\beta}g(z)}{H(z)+e^{i\alpha}G(z)}\right|. \tag{3}$$

Пользуясь условиями *4*, *5* и верхней и нижней оценками для модуля суммы, оценим значение выражения, стоящего в правой части неравенства (3):

$$\left|\frac{h(z)+e^{i\beta}g(z)}{H(z)+e^{i\alpha}G(z)}\right| = \left|\frac{h(z)}{H(z)}\right| \cdot \left|\frac{1+e^{i\beta}\frac{g(z)}{h(z)}}{1+e^{i\alpha}\frac{G(z)}{H(z)}}\right| \leq \left|\frac{h(z)}{H(z)}\right| \cdot \frac{1+\sup\limits_{z\in\partial\mathbb{D}}|\frac{g(z)}{h(z)}|}{1-\max\limits_{z\in\partial\mathbb{D}}|\frac{G(z)}{H(z)}|}.$$

Для удобства введём обозначения:

$$\varphi(z) := \left|\frac{h(z)}{H(z)}\right|, \qquad \psi := \frac{1+\sup\limits_{z\in\partial\mathbb{D}}|\frac{g(z)}{h(z)}|}{1-\max\limits_{z\in\partial\mathbb{D}}|\frac{G(z)}{H(z)}|}.$$

В силу условия *4* значение $\max\limits_{z\in\partial\mathbb{D}}|\frac{G(z)}{H(z)}|$ меньше единицы, то есть знаменатель ψ отличен от нуля. В силу условия *5* мероморфная функция $\frac{g(z)}{h(z)}$ может иметь лишь устранимые особенности на $\partial\mathbb{D}$. Следовательно, числитель ψ не превосходит двух. Таким образом, значение ψ конечно. Также из условия *5* следует, что для любого $z \in \partial\mathbb{D}$ значение $\varphi(z)$ не превосходит единицы. Следовательно, $\sup_{z\in\partial\mathbb{D}}\left|\frac{h(z)+e^{i\beta}g(z)}{H(z)+e^{i\alpha}G(z)}\right| \leq \psi$ и неравенство (3) заведомо выполняется, если $K_0 > \psi$. Таким образом, существует константа K_0 из полуинтервала $[1, \psi+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное число, для которого выполнены следующие условия:

а) для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ все нули аналитического многочлена $K_0\left(H(z)+e^{i\alpha}G(z)\right)$ лежат в круге $\mathbb{D}$,

б) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\deg\{K_0\left(H(z)+e^{i\alpha}G(z)\right)\} \geq \deg\{h(z)+e^{i\beta}g(z)\}$,

в) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любого $z \in \partial\mathbb{D}$ $|K_0\left(H(z)+e^{i\alpha}G(z)\right)| \geq |h(z)+e^{i\beta}g(z)|$.

Таким образом, к аналитическим многочленам $K_0\left(H(z)+e^{i\alpha}G(z)\right)$ и $h(z)+e^{i\beta}g(z)$ применима теорема 1, т. е. для любого $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ и некоторого

K_0 из полуинтервала $[1, \psi + \varepsilon)$ справедливым является неравенство (2). В силу произвола в выборе $\varepsilon > 0$ константа K_0 может быть взята из отрезка (1). $\square$

Замечание 3. Если $F(z)$ и $f(z)$ – аналитические многочлены, т. е. $G(z) \equiv g(z) \equiv 0$, то неравенство (1) принимает вид классического неравенства Бернштейна.

Проиллюстрируем теорему 4.

Пример 1. Рассмотрим гармонические многочлены

$$F(z) = d(cz^2 - \overline{z}), \qquad f(z) = cz^2 + \overline{z},$$

где $c, d > 1$ – вещественные параметры. Покажем, что рассматриваемые многочлены удовлетворяют условиям теоремы.

Во-первых, нули многочлена $F(z)$ расположены в круге $\mathbb{D}$. Действительно, многочлен $F(re^{it}) = d(cr^2e^{2it} - re^{-it})$ обращается в ноль при выполнении какого-либо из условий: $r = 0$ или $cre^{3it} = 1$. Т. е. гармонический многочлен $F(z)$ имеет четыре нуля: $z = 0$ и $z = c^{-1}e^{\frac{2\pi ki}{3}}$, где $k \in \{1, 2, 3\}$. Так как $c > 1$, то все эти точки расположены в единичном круге $\mathbb{D}$.

Во-вторых, на единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ неравенства

$$|H(z)| = cd > d = |G(z)|, \qquad |H(z)| = cd > c = |h(z)| > 1 = |g(z)|$$

выполняются при любых значениях $c, d > 1$. Таким образом, гармонические многочлены $F(z)$ и $f(z)$ удовлетворяют условиям теоремы.

Нетрудно убедиться, что

$$\min_{z \in \partial\mathbb{D}} |H'(z) + G'(z)| = d(2c - 1), \qquad \max_{z \in \partial\mathbb{D}} |h'(z) + g'(z)| = 2c + 1,$$

причём минимум и максимум в обоих случаях достигаются при $z = 1$.

Множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} c > 1, \\ d > 1, \\ d(2c - 1) < 2c + 1. \end{cases} \tag{4}$$

не пусто и представляет собой часть плоскости cOd, ограниченную прямыми $c = 1$, $d = 1$ и гиперболой $d = \frac{2c+1}{2c-1}$. Если пара (c, d) является решением системы (4), то

$$|H'(1) + G'(1)| = d(2c - 1) < 2c + 1 = |h'(1) + g'(1)|$$

и, следовательно, неравенство (2) не выполняется в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, и для данной пары гармонических многочленов $F(z)$ и $f(z)$ константа K_0 в теореме 4 строго больше единицы. Более того, в приведённом примере неравенство (2) может выполняться только при условии

$$K_0 \geq \frac{1}{d} \frac{1 + \frac{1}{2c}}{1 - \frac{1}{2c}} = \frac{1}{d} \frac{1 + \sup\limits_{z \in \partial\mathbb{D}} |\frac{g(z)}{h(z)}|}{1 - \max\limits_{z \in \partial\mathbb{D}} |\frac{G(z)}{H(z)}|}.$$

Параметр d в рассмотренном примере может быть сколь угодно близок к 1, что и доказывает точность верхней оценки в неравенстве (1).

Приём, использованный в ходе доказательства теоремы 4 (сведение к аналитическому случаю), гарантирует справедливость обобщения неравенства Смирнова на гармонический случай, так как классическое неравенство Смирнова (теорема 2) имеет место при тех же условиях, что и неравенство Бернштейна.

Теорема 5. *Пусть $F(z) = H(z) + \overline{G(z)}$, $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ – гармонические многочлены, удовлетворяющие условиям теоремы 4. Тогда существует константа K_0, принадлежащая отрезку (1), такая, что для любых $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ и для любого фиксированного $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$*

$$K_0|z(H'(z)+e^{i\alpha}G'(z))-a(H(z)+e^{i\alpha}G(z))| \geq |z(h'(z)+e^{i\beta}g'(z))-a(h(z)+e^{i\beta}g(z))| \tag{5}$$

для всех значений a, принадлежащих образу круга $\{\zeta : |\zeta| \leq |z|\}$ при отображении $\phi_n(\zeta) = \frac{n\zeta}{1+\zeta}$, где n – степень многочлена $F(z)$.

Действительно, как продемонстрировано в ходе доказательства теоремы 4, аналитические многочлены $K_0(H(z)+e^{i\alpha}G(z))$ и $h(z)+e^{i\beta}g(z)$ при некоторой константе K_0, принадлежащей отрезку (1), удовлетворяют условиям теоремы 2. Отсюда следует справедливость для них неравенства В.И. Смирнова, и, следовательно, – неравенства (5).

Заключение

В статье предложены и путём сведения к аналитическому случаю доказаны “гармонические” аналоги дифференциальных неравенств С.Н. Бернштейна и В.И. Смирнова для многочленов. Доказательства опираются на топологический аналог принципа аргумента и проиллюстрированы примером.

Список литературы

[1] Bernstein S.N. Sur la limitation des derivees des polynomes // Comptes rendus de l’Academie des Sciences. 1930. № 190. Pp. 338–341.

[2] Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964.

[3] Rahman Q.I., Schmeisser G. Analytic Theory of Polynomials. Oxford: Oxford University Press, 2002.

[4] Ganenkova E.G., Starkov V.V. Variations on a theme of the Marden and Smirnov operators, differential inequalities for polynomials // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2019. Vol. 476, № 2. Pp. 696–714. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.006

[5] Ганенкова Е.Г., Старков В.В. Преобразование Мёбиуса и неравенство В. И. Смирнова для многочленов // Математические заметки. 2019. Т. 105, № 2. С. 228–239. https://doi.org/10.4213/mzm11858

[6] Wilmshurst A.S. The valence of harmonic polynomials // Proceedings of the American Mathematical Society. 1998. Vol. 126, № 7. Pp. 2077–2081. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04315-9

[7] Khavinson D., Lee S., Saez A. Zeros of harmonic polynomials, critical lemniscates, and caustics // Complex Analysis and its Synergies. 2018. № 4. ID 2. https://doi.org/10.1186/s40627-018-0012-2

[8] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. Функции одного переменного. 3-е изд.. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 336 с.

[9] Стоилов С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. М.: Наука, 1964. 228 с.

[10] Cristea M. Generalization of the Argument Principle // Complex Variables and Elliptic Equations. 2000. Vol. 42. Pp. 333–345.

[11] Luce R., Sete O. The index of singular zeros of harmonic mappings of anti-analytic degree one // Complex Variables and Elliptic Equations. 2019. Vol. 66, № 1. Pp. 1–21. https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1695787

Образец цитирования

Граф С.Ю., Никитин И.А. Аналоги неравенств С.Н. Бернштейна и В.И. Смирнова для гармонических многочленов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 2. С. 16–25. https://doi.org/10.26456/vtpmk612

Сведения об авторах

1. **Граф Сергей Юрьевич**
доцент кафедры математического анализа Тверского государственного университета; доцент кафедры математического анализа Петрозаводского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: sergey.graf@tversu.ru

2. **Никитин Иван Александрович**
студент математического факультета Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: ianikitin20@gmail.com

ANALOGS OF S.N. BERNSTEIN AND V.I. SMIRNOV INEQUALITIES FOR HARMONIC POLYNOMIALS

Graf Sergey Yur'evich
Associate Professor at the Department of Mathematical Analysis,
Tver State University
Associate Professor at the Department of Mathematical analysis,
Petrozavodsk State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: sergey.graf@tversu.ru

Nikitin Ivan Alexandrovich
Student of Mathematical Faculty,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: ianikitin20@gmail.com

Received 21.05.2021, revised 10.06.2021.

Harmonic mapings and, in particular, harmonic polynomials find applications in many problems of mathematics, mathematical physics, mechanics and electrical engineering. This is due to the key role that harmonic functions play in boundary value problems of mathematical physics. Harmonic polynomials are used to describe plane harmonic vector fields in hydrodynamics, in the theory of liquid crystals, in the theory of plane potential. Estimates of harmonic polynomials and their derivatives are used in the development of non-uniform grids and triangulations in many computational schemes. In the middle of the twentieth century, Soviet mathematicians S.N. Bernstein and V.I. Smirnov proved results several differential inequalities connecting the polynomials $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0$ in the complex plane $\mathbb{C}$ and their derivatives. This topic remains important, as evidenced by the large number of new publications of Russian and foreign mathematicians. In this paper, we proved results that generalize the inequalities of S.N. Bernstein and V.I. Smirnov for the case of harmonic polynomials $F = H + \overline{G}$, where H, G are analytic polynomials. In particular, conditions of the type of majorizing inequalities on the unit circle are obtained, which make it possible to estimate the derivatives of the analytic and antianalytic parts of harmonic polynomials, all of whose zeros are located in the unit disk. The proofs of the main results are obtained using a topological analogue of the principle of the argument known in the theory of functions, which makes it possible to reduce some problems of the theory of harmonic polynomials to the analytic case. The classical inequalities of Smirnov and Bernstein in the case of analytic polynomials follow from the results of current paper. The proved theorems are illustrated by an example that demonstrates the accuracy of the conditions and estimates formulated by us.

Keywords: harmonic polynomials, Bernstein inequality, Smirnov inequality.

Citation

Graf S.Yu., Nikitin I.A., "Analogs of S.N. Bernstein and V.I. Smirnov inequalities for harmonic polynomials", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 2, 16–25(in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk612

References

[1] Bernstein S.N., "Sur la limitation des derivees des polynomes", *Comptes rendus de l'Academie des Sciences*, 1930, № 190, 338–341.

[2] Smirnov, V.I., Lebedev N.A., *Functions of complex variable. Constructive theory*, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1968.

[3] Rahman Q.I., Schmeisser G., *Analytic Theory of Polynomials*, Oxford University Press, Oxford, 2002.

[4] Ganenkova E.G., Starkov V.V., "Variations on a theme of the Marden and Smirnov operators, differential inequalities for polynomials", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **476**:2 (2019), 696–714, https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.006.

[5] Ganenkova E.G., Starkov V.V., "The Mobius Transformation and Smirnov's Inequality for Polynomials", *Mathematical Notes*, **105**:2 (2019), 216–226, https://doi.org/10.4213/mzm11858.

[6] Wilmshurst A.S., "The valence of harmonic polynomials", *Proceedings of the American Mathematical Society*, **126**:7 (1998), 2077–2081, https://doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04315-9.

[7] Khavinson D., Lee S., Saez A., "Zeros of harmonic polynomials, critical lemniscates, and caustics", *Complex Analysis and its Synergies*, 2018, № 4, 2, https://doi.org/10.1186/s40627-018-0012-2.

[8] Shabat B.V., *Vvedenie v kompleksnyj analiz. Ch. 1. Funktsii odnogo peremennogo [Introduction to complex analysis. Part I]*, Third Edition, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoj literatury, Moscow, 1985 (in Russian), 336 pp.

[9] Stoilov S., *Lektsii o topologicheskikh printsipakh teorii analiticheskikh funktsij [Lectures on topological principles of the theory of analytic functions]*, Nauka Publ., Moscow, 1964 (in Russian), 228 pp.

[10] Cristea M., "Generalization of the Argument Principle", *Complex Variables and Elliptic Equations*, **42** (2000), 333–345.

[11] Luce R., Sete O., "The index of singular zeros of harmonic mappings of anti-analytic degree one", *Complex Variables and Elliptic Equations*, **66**:1 (2019), 1–21, https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1695787.