УДК 338.27:519.233.22

doi: 10.26456/2219-1453/2021.3.150–165

ПРИМЕНЕНИЕ М-ОЦЕНОК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ В МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ БРАУНА НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

А.А. Васильев

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», г. Тверь

В экономическом прогнозировании коротких временных рядов часто применяется модель Брауна нулевого порядка. К одной из проблем использования этой модели на первых шагах прогнозирования относится оценка начального значения экспоненциальной средней. Как правило, в качестве такой оценки используется простое среднее арифметическое значение первых уровней ряда, которое является неустойчивой статистической оценкой. Поэтому в данном исследовании предложено для оценки начального значения экспоненциальной средней использовать робастные М-оценки Тьюки, Хампеля, Хьюбера и Эндрюса. Цель исследования заключается в определении целесообразности применения М-оценок для определения начального значения экспоненциальной средней в модели Брауна при прогнозировании коротких временных рядов экономических показателей. В результате проведенного экспериментального исследования установлено: а) к наиболее значимым факторам, влияющим на точность прогноза с использованием модели Брауна, относятся вид временного ряда, значение постоянной сглаживания, отбраковка аномальных уровней и вид весов; б) вид оценки начального значения экспоненциальной средней и число итераций при вычислении М-оценки являются менее значимыми факторами (в связи с этим обоснована целесообразность применения одношаговых М-оценок); в) на начальных шагах прогнозирования при ограниченном количестве уровней временного ряда, когда невозможно достоверно определить вид ряда и когда отсутствуют основания для отбраковки аномальных уровней, предпочтительнее использовать модель Брауна с весами Вейда и определять начальное значение экспоненциальной средней на основе одношаговых робастных М-оценок (в остальных случаях целесообразно применять простое среднее арифметическое значение).

Ключевые слова: *модель Брауна нулевого порядка, начальное значение экспоненциальной средней, одношаговая оценка, оценка Тьюки, оценка Хампеля, оценка Хьюбера, оценка Эндрюса, точность прогноза.*

Введение. На первых шагах прогнозирования временных рядов регрессионные модели не применяются из-за невозможности идентификации параметров, а нейросетевые модели – из-за невозможности обучения. В этой ситуации используют элементарные модели (на основе предыдущего уровня ряда или на основе простого среднего значения имеющихся уровней) или модели на основе экспоненциального сглаживания (Брауна или Хольта), позволяющие вычислять прогнозные значения при наличии 1–2 уровней.

В экономическом прогнозировании коротких временных рядов достаточно часто применяют модель Брауна нулевого порядка (далее просто модель Брауна). Модель Брауна имеет вид $\hat{y}_{t+1} = S_t$, $S_t = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}$, где $\hat{y}_{t+1}$ – прогнозное значение уровня временного ряда показателя y на момент времени (t+1); S_t – экспоненциальная средняя на момент времени t; α – постоянная сглаживания; y_t – фактическое значение уровня ряда показателя y в момент времени t. Модель Брауна с α из классического диапазона значений $(0<\alpha<1)$ применяется для прогнозирования стационарных временных рядов, а с α из запредельного диапазона значений $(1\le\alpha<2)$ – для прогнозирования нестационарных рядов [11, с. 103].

К проблемам применения модели Брауна на первых шагах прогнозирования относятся выбор начального значения постоянной сглаживания α и оценка начального значения экспоненциальной средней S_0 [6, с. 22–26]. Объектом данного исследования являются методы оценивания начального значения экспоненциальной средней S_0.

К традиционным методам оценивания S_0 относятся [12, с. 31]: экспертное оценивание; использование первого уровня ряда; вычисление простой арифметической средней нескольких первых уровней ряда. При использовании модели Брауна для прогнозирования коротких временных рядов рекомендуется в качестве оценки S_0 выбирать среди перечисленных оценок простую арифметическую среднюю первых уровней ряда, так как эта оценка не зависит от субъективных ошибок экспертов и случайной аномальной ошибки первого уровня [12, с. 32]. Однако простое арифметическое среднее значение является неустойчивой статистической оценкой S_0 в случаях нестационарного временного ряда и (или) отклонения распределения вероятностей уровней ряда от нормального распределения [12, с. 32]. Поэтому модель Брауна чувствительна к наличию аномальных значений среди уровней прогнозируемого ряда [16, с. 285].

Неточная оценка S_0 приводит к большим ошибкам прогноза при $\alpha\to 0$ и при $\alpha\to 2$ из-за большого веса S_0 в течение длительного времени [6, с. 22; 12, с. 31]. Поэтому задача уменьшения зависимости точности прогноза от точности оценивания S_0 на начальных шагах прогнозирования является актуальной и практически значимой. Для решения этой задачи применяются следующие подходы: 1) уменьшение избыточного веса S_0; 2) повышение точности оценивания S_0 при неопределенности распределения вероятностей уровней ряда путем использования робастных статистических оценок. Для уменьшения избыточного веса S_0 используются процедура сглаживания Вейда [6, с. 22–24; 12, с. 37–38] и процедура сглаживания, описанная в [12, с. 34]. Робастный подход к оцениванию S_0 базируется на рекомендации использовать бивес-оценку или аналогичные оценки для получения высокой точности оценки среднего значения случайной величины при неопределенности распределения вероятностей [7, с. 206]. В рамках робастного подхода к оцениванию S_0 предложено использовать медиану 16, с. 289], оценку Ходжеса-Лемана, оценку Хьюбера типа усеченного среднего и М-оценку Тьюки (бивес-оценку) [1, с. 102].

Результаты исследований модели Брауна с разными оценками S_0 и с разными подходами к уменьшению зависимости точности прогноза от точности оценивания S_0 при прогнозировании коротких рядов показали, что универсального метода оценивания S_0, обеспечивающего наибольшую точность прогноза для любого ряда во всем расширенном диапазоне значений α ($0 < \alpha < 2$) не существует [2, с. 183]. При этом результаты исследования модели Брауна с оценкой S_0 в виде М-оценки Тьюки также показали [1, с. 102, 109], что: 1) на точность прогноза наиболее существенное влияние оказывают значение α и вид весов (обычные или Вейда); 2) в связи с быстрой сходимостью итерационного процесса вычисления S_0 на основе М-оценки Тьюки целесообразно применение одношаговой оценки; 3) модель Брауна с оценкой S_0 на основе одношаговой М-оценки Тьюки обеспечивает в ряде случаев лучшую точность прогноза, чем с другими оценками S_0. Поэтому предмет настоящего исследования заключается в исследовании точности модели Брауна с оценкой S_0 на основе М-оценок (Хампеля, Хьюбера, Эндрюса, Тьюки). Цель исследования состоит в определении целесообразности применения М-оценок для определения S_0 в модели Брауна при прогнозировании коротких временных рядов экономических показателей.

1. Модели Брауна на основе М-оценок

1.1. Общие сведения о М-оценках. М-оценкой называется оценка θ_n неизвестного параметра распределения θ, определяемая как решение экстремальной задачи на минимум вида [15, с. 51] $\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i, \theta_n) = min$ или как решение неявного уравнения вида $\sum_{i=1}^{n}\psi(x_i, \theta_n) = 0$, где ρ – произвольная функция; $\psi(x,\theta) = (\partial/\partial\theta)\rho(x,\theta)$; n – объем выборки; x_i, $i = 1,\ldots,n$, – i-е значение выборки. М-оценки Хьюбера, Хампеля, Эндрюса и Тьюки определяются функциями $\psi_b(x)$, $\psi_{a,b,c}(x)$, $\psi_{\sin(a)}(x)$ и $\psi(x)$ соответственно вида [14, с. 14–16]

$$\psi_b(x) = \begin{cases} -b, & x < -b, \\ x, & |x| \le b, \\ b, & x > b; \end{cases}$$

$$\psi_{a,b,c}(x) = sign(x)\begin{cases} |x|, & 0 \le |x| < a, \\ a, & a \le |x| < b, \\ a \cdot \dfrac{c-|x|}{c-b}, & b \le |x| < c, \\ 0, & c \le |x|; \end{cases}$$

$$\psi_{\sin(a)}(x) = \begin{cases} \sin(x/a), & |x| \le \pi a, \\ 0, & |x| > \pi a; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} x(1-x^2)^2, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Значения b для ψ_b в зависимости от доли аномальных наблюдений (АН) в выборке ε приведены в [15, с. 92]. При $b \to \infty$ М-оценка Хьюбера сближается с выборочным средним значением, при $b \to 0$ – с выборочной медианой [5, с. 334]. Если значение ε неизвестно, то рекомендуется выбирать значение b из промежутка [1,2] [4, с. 294; 15, с. 27], так как в этом промежутке М-оценка Хьюбера не очень чувствительна к изменениям константы b [4, с. 294]. Этим значениям параметра b соответствуют значения ε в диапазоне примерно от 0,005 до 0,150. Рекомендуемыми значениями параметров $\psi_{a,b,c}$ являются [14, с. 16]: a =1,7; b =3,4; c =8,5. Для $\psi_{\sin(a)}$ рекомендуется выбирать a =2,1 [14, с. 16].

М-оценки параметра положения не инвариантны относительно масштаба, поэтому их находят как решение уравнения вида $\sum_{i=1}^{n} \psi(u_i) = 0$ [10, с. 138], где $u_i = (x_i - \theta_n)/S_n$; S_n – оценка среднего квадратического отклонения.

1.2. Вычисление М-оценок. Традиционный итерационный алгоритм вычисления оценок Хампеля, Хьюбера и Эндрюса на основе метода Ньютона заключается в вычислении оценки по формуле [15, с. 149]

$$\theta_n^{(j)} = \theta_n^{(j-1)} + cS_n^{(0)} \sum_{i=1}^{n} \psi\left(u_i^{(j)}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \psi'\left(u_i^{(j)}\right),$$

где j, $j = 1,2,\ldots$, – номер итерации; $u_i^{(j)} = \left(x_i - \theta_n^{(j-1)}\right)/cS_n^{(0)}$; $\theta_n^{(j-1)}$ – оценка параметра θ, полученная на (j–1)-й итерации по выборке значений этого параметра объемом в n элементов; $S_n^{(0)}$ – оценка среднего квадратического отклонения по выборке объемом в n элементов; c – константа, определяющая степень состоятельности $S_n^{(0)}$.

В качестве начальных оценок $\theta_n^{(0)}$ и $S_n^{(0)}$ рекомендуется использовать робастные статистические оценки, а именно медиану выборки для $\theta_n^{(0)}$ и медиану абсолютных отклонений для $S_n^{(0)}$ [10, с. 139,187; 16, с. 149]. Медиана абсолютных отклонений элементов выборки x_i от медианы выборки $M_e = med(x_i)$ вычисляется по формуле $M_{AO} = med_i\{|x_i - M_e|\}$. Значение константы c рекомендуется выбирать равным 1,483 [11, с. 187]. В этом случае величина $cS = 1{,}483 M_{AO}$ называется нормированной медианой абсолютных отклонений и представляет собой высокоробастную состоятельную оценку среднего квадратического отклонения нормально распределенной случайной величины [10, с. 141].

Алгоритм вычисления оценки Тьюки на основе итерационного метода перевзвешивания наименьших квадратов заключается в вычислении величины [8, с. 93; 10, с. 150]

$$\theta_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{j})} = \sum_{i=1}^{n} w\left(u_i^{(j)}\right) x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} w\left(u_i^{(j)}\right),\ j = 1,2,\ldots,\quad w(u_i) = \begin{cases} (1-u_i^2)^2 \ \textit{при}\ |u_i| \le 1, \\ 0\ \textit{при}\ |u_i| > 1, \end{cases}$$

до тех пор, пока не будет достигнута требуемая сходимость величин $\theta_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{j})}$. При вычислении величины $u_i^{(j)} = \left(x_i - \theta_n^{(j-1)}\right) \big/ cS_n^{(0)}$ полагается, что $\theta_n^{(0)} = M_e$, $S_n^{(0)} = M_{AO}$, c =1,483.

С вычислительной точки зрения наиболее простыми являются одношаговые М-оценки, являющиеся результатом первого шага итерационной процедуры их вычисления. Кроме простоты вычислений, применение одношаговых М-оценок имеет теоретическое обоснование в виде теоремы о состоятельности, асимптотической нормальности и асимптотической эффективности одношаговой оценки максимального правдоподобия [5, с. 374–375]. Данное теоретическое обоснование подтверждено численными исследованиями, свидетельствующими о целесообразности применения одношаговых М-оценок [3, с. 34; 14, с. 24]. Кроме того, результаты исследования точности одношагового прогноза коротких временных рядов на основе среднего значения предыдущих уровней в виде М-оценок показали, что применение полноценной итерационной схемы при вычислении М-оценок приводит как к повышению, так и к снижению точности прогноза [3, с. 34]. Это обстоятельство также свидетельствуют в пользу применения одношаговых М-оценок.

1.3. Варианты модели Брауна на основе М-оценок. Расчетные формулы для вариантов модели Брауна, использующих для оценки S_0 первые три уровня ряда, с обычными весами и с весами Вейда соответственно имеют вид:

$$\hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{t}+1} = S_t,\ \mathrm{t} \ge 3;\ S_t = \begin{cases} \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}, \mathrm{t} > 3, \\ \mathrm{S}_0, t = 3; \end{cases}\quad \hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{t}+1} = \tilde{S}_t,\ \mathrm{t} \ge 3;$$

$$\tilde{\mathrm{S}}_{\mathrm{t}} = \begin{cases} S'_t \cdot \alpha'_t, t > 3, \\ S_0, t = 3; \end{cases}\quad \mathrm{S}'_{\mathrm{t}} = \alpha y_t + (1\text{-}\alpha) S'_{t\text{-}1},\ \mathrm{S}'_3 = S'_0 = \alpha S_0,\ \alpha'_t = 1 \Big/ \sum_{i=0}^{t-3} \alpha (1\text{-}\alpha)^i .$$

Расчетные формулы для вычисления S_0 на основе М-оценок Хьюбера ($\theta_{3\_\mathrm{Hub}}^{(\mathrm{j})}$), Хампеля ($\theta_{3\_\mathrm{Ham}}^{(\mathrm{j})}$), Эндрюса ($\theta_{3\_Э}^{(\mathrm{j})}$) и Тьюки ($\theta_{3\_\mathrm{T}}^{(\mathrm{j})}$) по трем уровням ряда в результате выполнения j итераций имеют вид:

$$\mathrm{S}_0 = \theta_{3\_\mathrm{Hub}}^{(\mathrm{j})} = \theta_3^{(j-1)} + 1{,}483 M_{AO} \sum_{i=1}^{3} \psi_b \left(u_i^{(j)}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \psi'_b \left(u_i^{(j)}\right),$$

$$\psi_b\left(u_i^{(j)}\right)=\begin{cases}-b, & u_i^{(j)}<-b,\\ u_i^{(j)}, & |u_i^{(j)}|\le b,\\ b, & u_i^{(j)}>b,\end{cases}\quad \psi_b'\left(u_i^{(j)}\right)=\begin{cases}1, & \left|u_i^{(j)}\right|\le b,\\ 0, & \left|u_i^{(j)}\right|>b;\end{cases}$$

$$S_0=\theta_{3\_\text{Ham}}^{(\text{j})}=\theta_3^{(j-1)}+1{,}483M_{AO}\sum_{i=1}^{3}\psi_{a,b,c}\left(u_i^{(j)}\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}\psi'_{a,b,c}\left(u_i^{(j)}\right),$$

$$\psi_{a,b,c}\left(u_i^{(j)}\right)=sign\left(u_i^{(j)}\right)\begin{cases}\left|u_i^{(j)}\right|, & 0\le\left|u_i^{(j)}\right|<1{,}7,\\ 1{,}7, & 1{,}7\le\left|u_i^{(j)}\right|<3{,}4,\\ 1{,}7\cdot\dfrac{8{,}5-\left|u_i^{(j)}\right|}{8{,}5-3{,}4}, & 3{,}4\le\left|u_i^{(j)}\right|<8{,}5,\\ 0, & 8{,}5\le\left|u_i^{(j)}\right|,\end{cases}$$

$$\psi'_{a,b,c}\left(u_i^{(j)}\right)=\begin{cases}1, & \left|u_i^{(j)}\right|<8{,}5,\\ 0, & \left|u_i^{(j)}\right|\ge 8{,}5;\end{cases}$$

$$S_0=\theta_{3\_Э}^{(\text{j})}=\theta_3^{(j-1)}+1{,}483M_{AO}\sum_{i=1}^{3}\psi_{\sin(a)}\left(u_i^{(j)}\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}\psi'_{\sin(a)}\left(u_i^{(j)}\right),$$

$$\psi_{\sin(a)}\left(u_i^{(j)}\right)=\begin{cases}\sin\left(u_i^{(j)}\big/2{,}1\right), & \left|u_i^{(j)}\right|\le 2{,}1\pi,\\ 0, & \left|u_i^{(j)}\right|>2{,}1\pi,\end{cases}\quad \psi'_{\sin(a)}\left(u_i^{(j)}\right)=\begin{cases}1, & \left|u_i^{(j)}\right|\le 2{,}1\pi,\\ 0, & \left|u_i^{(j)}\right|>2{,}1\pi;\end{cases}$$

$$S_0=\theta_{3\_\text{T}}^{(\text{j})}=\sum_{i=1}^{n}w\left(u_i^{(j)}\right)y_i\Big/\sum_{i=1}^{n}w(u_i^{(j)}),\quad w\left(u_i^{(j)}\right)=\begin{cases}\left(1-\left(u_i^{(j)}\right)^2\right)^2 \; при \; \left|u_i^{(j)}\right|\le 1,\\ 0 \; при \; \left|u_i^{(j)}\right|>1;\end{cases},$$

где $u_i^{(j)}=\left(y_i-\theta_n^{(j-1)}\right)\big/\left(1{,}483M_{AO}\right)$; $M_{AO}=med\left\{|y_1-M_e|,|y_2-M_e|,|y_3-M_e|\right\}$;

$M_e=med(y_1,y_2,y_3)$; $\theta_3^{(0)}=M_e$; $y_1,y_2,\ldots,y_t$ – уровни временного ряда.

2. Результаты исследования точности прогноза коротких временных рядов на основе вариантов модели Брауна

2.1. Временные ряды для оценки точности прогнозов. Для сравнения точности прогнозов на основе разных вариантов модели Брауна использовались временные ряды объемов продаж 2 моделей автомобилей марки Lada на этапе выведения на рынок в России. Эти ряды представлены в табл. 1 (см. ниже), составленной на основе ежемесячных пресс-релизов Ассоциации Европейского бизнеса [9].

В таблице курсивом выделены аномальные значения объемов продаж. К АН относятся объемы продаж при ненасыщении дилерских центров автомобилями и объемы продаж в первый месяц, когда реализация автомобилей производится в течение части месяца (использование таких уровней приводит к большим ошибкам прогноза).

Таблица 1

Динамика продаж автомобилей на этапе выведения на рынок

Модель	Номер месяца продаж										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vesta	*1748*	*1037*	*1643*	2955	4595	4821	3752	5128	5198	4958	4375
XRAY	*937*	1518	2184	1608	1795	1772	1715	1696	1899	2175	2644

Ряд объема продаж автомобиля Lada XRAY на рассматриваемом временном интервале близок к стационарному, а автомобиля Lada Vesta является нестационарным (имеет тенденцию к росту).

2.2. Методика исследования. Прогнозирование объемов продаж выполнялось на один месяц вперед, начиная с четвертого месяца, так как по первым трем уровням ряда производилась оценка S_0. В качестве показателя точности прогноза использовалась средняя абсолютная ошибка в процентах (MAPE). Вычисление MAPE производилось для 4–8 месяцев продаж (по 5 уровням временного ряда) для дискретного множества значений постоянной сглаживания в расширенном диапазоне ее значений с шагом 0,1.

В исследовании изучалось влияние на значение MAPE, кроме применяемой оценки S_0, следующих факторов: 1) количество итераций при вычислении S_0; 2) значение α; 3) используемые веса (обычные или Вейда); 4) наличие (отсутствие) предварительной отбраковки АН.

Сходимость итерационного процесса вычисления М-оценок исследовалась двумя способами: непосредственным (путем анализа сходимости оценки) и косвенным (на основе анализа сходимости MAPE). Для оценки скорости сходимости итерационного процесса вычисления М-оценок рассчитывался относительный прирост оценки по формуле $\Delta\theta_{(j,j\text{-}1)} = ((\theta_t^{(j)} - \theta_t^{(j-1)}) / \theta_t^{(j-1)}) \cdot 100\%$. Для оценки влияния скорости сходимости итерационного процесса вычисления М-оценки на значение MAPE вычислялся прирост MAPE, то есть $\Delta\text{MAPE}_{(j,j\text{-}1)} = \text{MAPE}_j - \text{MAPE}_{j\text{-}1}$, соответствующий относительному приросту оценки $\Delta\theta_{j,j\text{-}1}$.

При вычислении оценки Хьюбера использовались следующие значения параметра b: 2,160 (ε =0,005); 1,399 (ε =0,050); 0,980 (ε =0,150); 0,550 (ε =0,400).

2.3. Результаты исследования сходимости процесса вычисления М-оценок. Фрагмент обобщенных результатов исследования сходимости итерационного процесса вычисления М-оценок при определении S_0 представлен в табл. 2 (см. ниже).

Анализ результатов исследования сходимости процесса вычисления М-оценок при определении S_0 (в том числе табл. 2) показал следующее:

а) упорядочение М-оценок в порядке убывания скорости сходимости оценок по $\Delta\theta_{(j,j\text{-}1)}$ имеет вид: 1) оценка Хьюбера при ε =0,400; 2) оценки Хьюбера при ε =0,005; 0,050; 0,150; 3) оценка Хампеля; 4) оценка Тьюки; 5) оценка Эндрюса;

Таблица 2

Зависимость j от S_0 и α для Lada Vesta (обычные веса)

Оценка	j для $\Delta\theta_{(j,j\text{-}1)}$ ($\Delta MAPE_{(j,j\text{-}1)}$ при α =0,3)					
	Без отбраковки АН			С отбраковкой АН		
	<1,00 %	<0,10 %	<0,01 %	<1,00 %	<0,10 %	<0,01 %
Хьюбера (ε =0,400)	1 (2)	1 (2)	1 (2)	1 (2)	1 (2)	1 (2)
Хьюбера (ε =0,005; 0,050; 0,150)	2 (2)	2 (2)	2 (2)	2 (2)	2 (2)	2 (2)
Хампеля	2 (2)	2 (2)	2 (2)	2 (2)	5 (3)	8 (7)
Эндрюса	1 (2)	5 (4)	9 (9)	3 (2)	11 (6)	19 (14)
Тьюки	7 (6)	10 (9)	14 (13)	2 (2)	6 (5)	9 (8)

б) отбраковка АН приводит в одних случаях к ускорению скорости сходимости процесса вычисления М-оценки по $\Delta\theta_{(j,j\text{-}1)}$, в других случаях - к замедлению, а в некоторых случаях скорость сходимости остается без изменений;

в) скорость сходимости оценок по $\Delta MAPE_{(j,j\text{-}1)}$, как правило, выше, чем по $\Delta\theta_{(j,j\text{-}1)}$;

г) скорость сходимости оценок по $\Delta MAPE_{(j,j\text{-}1)}$ зависит от значения α; д) как правило, значение $\Delta MAPE_{(j,j\text{-}1)}$ оказывается меньше 1 % уже на второй итерации.

2.4. Результаты исследования зависимости точности прогноза от числа итераций при вычислении М-оценок. Пример зависимости $\Delta MAPE_{(j,j\text{-}1)}$ от числа итераций (j), а также постоянной сглаживания (α) при прогнозировании объема продаж Lada XRAY с отбраковкой АН на основе модели Брауна с оценкой S_0 в виде оценки Эндрюса (имеющей самую медленную скорость сходимости) с обычными весами показан на рис. 1.

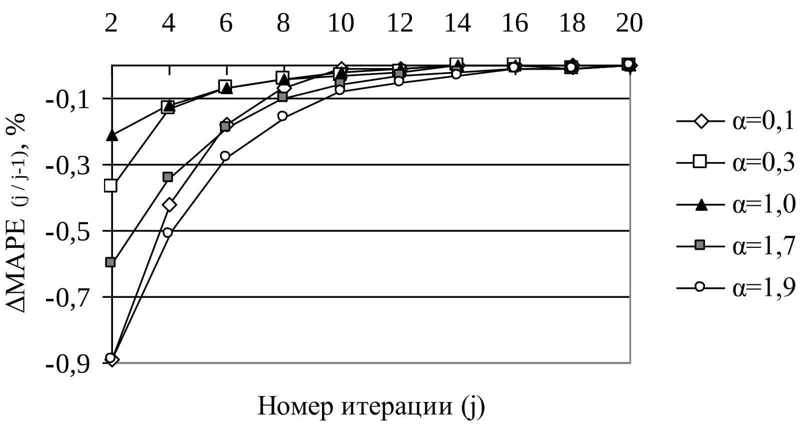


Рис. 1. Зависимость $\Delta MAPE_{(j,j\text{-}1)}$ от j и α (S_0 – оценка Эндрюса)

Анализ результатов исследования зависимости точности прогноза от числа итераций при вычислении М-оценок позволил сформулировать следующие выводы:

1) точность прогноза на основе модели Брауна с вычислением S_0 в виде М-оценок зависит как от числа итераций, так и от значения постоянной сглаживания;

2) скорость сходимости оценок по $\Delta\text{MAPE}_{(j,j\text{-}1)}$ замедляется при $\alpha \to 0$ и при $\alpha \to 2$ и увеличивается при $\alpha \to 1$;

3) при увеличении числа итераций зависимость скорости сходимости М-оценок по $\Delta\text{MAPE}_{(j,j\text{-}1)}$ от значения α уменьшается. Так для показанного на рис. 1 примера уже на 4-й итерации разница в скорости сходимости по $\Delta\text{MAPE}_{(j,j\text{-}1)}$ в зависимости от α составляет меньше 0,5 %, а на 10-й итерации – меньше 0,1 %;

4) увеличение числа итераций может привести как к повышению точности прогноза, так и к снижению точности прогноза;

5) увеличение числа итераций не приводит к существенному повышению (снижению) точности прогноза, по крайней мере, при $0{,}1 < \alpha < 1{,}5 \ldots 1{,}7$.

Таким образом, результаты исследования зависимости точности прогноза от числа итераций при вычислении S_0 на основе М-оценок свидетельствуют о целесообразности применения одношаговых оценок вне зависимости от вида используемых весов и наличия (или отсутствия) отбраковки АН.

2.5. Обобщенные результаты исследования точности прогноза. Пример зависимости среднего значения MAPE ($\overline{MAPE}$) в разных диапазонах значений α для М-оценок S_0 от наличия отбраковки АН и вида весов для Lada Vesta представлен в табл. 3. В скобках указаны значения $\overline{MAPE}$ при использовании в качестве S_0 простого среднего значения.

Таблица 3

Зависимость $\overline{MAPE}$ от диапазона значений α для Lada Vesta

Наличие отбраковки / вид весов	$\overline{MAPE}$ (%) для диапазона значений α				
	0,1-0,3	0,4-0,9	1,0	1,1-1,6	1,7-1,9
Без отбраковки / обычные веса	42,9…45,3 (46,2)	30,1…31,3 (31,8)	27,9…28,9 (29,2)	26,6…27,3 (27,6)	24,8…25,9 (26,1)
Без отбраковки / веса Вейда	30,6…32,0 (32,5)	29,2…30,4 (30,8)	27,9…28,4 (29,2)	25,8…26,8 (27,2)	63,4…69,8 (72,1)
С отбраковкой / обычные веса	12,4…12,5 (12,6)	12,7…13,7 (11,9)	12,4…14,0 (11,3)	14,8…17,1 (13,1)	25,6…30,1 (22,2)
С отбраковкой / веса Вейда	13,1…13,9 (12,6)	12,8…14,0 (11,9)	12,4…14,0 (11,3)	15,0…17,8 (13,0)	32,7…44,6 (24,0)

Анализ обобщенных результатов исследования (в том числе табл. 3) показывает следующее.

1. Точность прогноза зависит от сочетания ряда факторов: а) вида ряда (стационарный, нестационарный); б) диапазона значений α; в) наличия отбраковки АН; г) вида весов (обычные, Вейда); д) вида оценки S_0 (простое среднее, М-оценки).

2. Точность прогноза ряда, близкого к стационарному, существенно выше точности прогноза нестационарного ряда (для любого сочетания факторов).

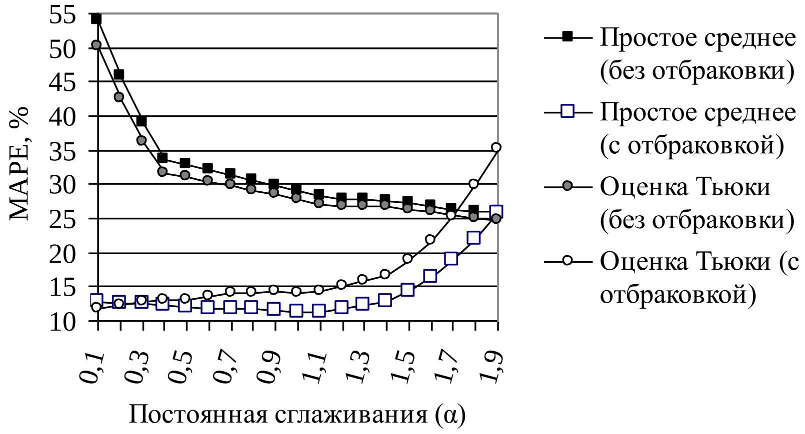
3. Для ряда, близкого к стационарному, точность прогноза при $0{,}3 < \alpha < 1{,}7$ примерно одинакова для всех моделей и не подвержена существенному влиянию указанных факторов. При $0 < \alpha \le 0{,}3$ имеет место незначительное влияние факторов на точность прогноза. При $1{,}7 \le \alpha < 2$ это влияние более существенно (особенно в случае использования весов Вейда). В этом диапазоне разница значения $\overline{MAPE}$ за счет выбора сочетания факторов наличия (отсутствия) отбраковки АН и вида весов достигает 19 %.

4. Для нестационарного ряда влияние факторов проявляется более наглядно, особенно при $0 < \alpha \le 0{,}3$ и $1{,}7 \le \alpha < 2$. При $0{,}3 < \alpha < 1{,}7$ существенным фактором является только отбраковка АН. Отбраковка АН приводит, как правило, к повышению точности прогноза, особенно при $0 < \alpha \le 0{,}3$. Влияние остальных факторов при $0{,}3 < \alpha < 1{,}7$ незначительно. Применение весов Вейда при $0 < \alpha \le 0{,}3$ без отбраковки АН приводит к значимому повышению точности прогноза, а с отбраковкой – к незначительному снижению. При $1{,}7 \le \alpha < 2$ применение весов Вейда приводит, как правило, к существенному снижению точности прогноза. В этом диапазоне разница значения $\overline{MAPE}$ за счет сочетания факторов отбраковки и вида весов достигает 50 %.

5. Для ряда, близкого к стационарному, модель Брауна с оценкой S_0 на основе простого среднего предпочтительнее независимо от сочетания факторов с точки зрения точности прогноза. Для нестационарного ряда применение простого среднего значения целесообразно только после отбраковки АН. Для нестационарного ряда без отбраковки АН предпочтительнее использовать М-оценки (при $0 < \alpha \le 0{,}3$ с весами Вейда).

На начальных шагах прогнозирования количество уровней ряда ограничено, и не всегда имеются основания для отбраковки первых уровней. Для нестационарного ряда без отбраковки АН и при использовании весов Вейда имеют место следующие факты: 1) для всех значений α упорядочение оценок S_0 в порядке уменьшения точности прогноза имеет вид: оценка Тьюки; оценка Хьюбера при ε =0,400; оценка Хьюбера при ε =0,150; оценка Эндрюса; оценка Хампеля; оценка Хьюбера при ε =0,050; оценка Хьюбера при ε =0,005; простое среднее значение; 2) разница в величине $\overline{MAPE}$ в зависимости от оценки S_0 составляет единицы процентов (поэтому выбор оценки S_0 не столь важен, однако, исходя из требования наличия у любой статистической процедуры робастных свойств [16, с. 13], следует предпочесть М-оценки).

2.6. Результаты исследования зависимости точности прогноза от применения отбраковки аномальных уровней ряда. Пример зависимости точности прогноза объема продаж Lada Vesta от применения отбраковки АН и α на основе модели Брауна с обычными весами и с S_0 в виде простого среднего и одношаговой оценки Тьюки показан на рис. 2 (см. ниже).



Р и с . 2. Зависимость МАРЕ от наличия отбраковки АН, оценки S_0 и α

Анализ результатов исследования зависимости точности прогноза от наличия или отсутствия отбраковки АН (в том числе рис. 2) показывает следующее.

1. Отбраковка АН может приводить как к повышению, так и к снижению точности прогноза. При этом повышение (снижение) точности прогноза за счет отбраковки АН существенно выше для нестационарного ряда.

2. При $\alpha \to 0$ повышение точности прогноза за счет отбраковки АН выше при использовании обычных весов, чем при использовании весов Вейда. При $\alpha \to 1$ повышение точности за счет отбраковки примерно одинаково как в случае применения обычных весов, так и весов Вейда. При $\alpha \to 2$ повышение точности за счет отбраковки при использовании обычных весов меньше, чем при использовании весов Вейда.

3. Для стационарного ряда наиболее точной моделью является модель с оценкой S_0 на основе простого среднего значения, а наименее точной – модель с оценкой S_0 на основе оценки Тьюки (как без, так и с отбраковкой АН; как с обычными весами, так и с весами Вейда). При этом точность моделей, использующих в качестве S_0 оценки Хьюбера (при ε =0,005; 0,050; 0,150) и Хампеля, при отсутствии отбраковки АН совпадает с точностью модели с оценкой S_0 на основе простого среднего значения.

4. Для нестационарного ряда, как правило, до отбраковки АН наиболее точной моделью является модель с оценкой S_0 на основе оценки Тьюки, а наименее точной – модель с оценкой S_0 на основе простого среднего значения. После отбраковки АН модели меняются местами (как для обычных весов, так и для весов Вейда).

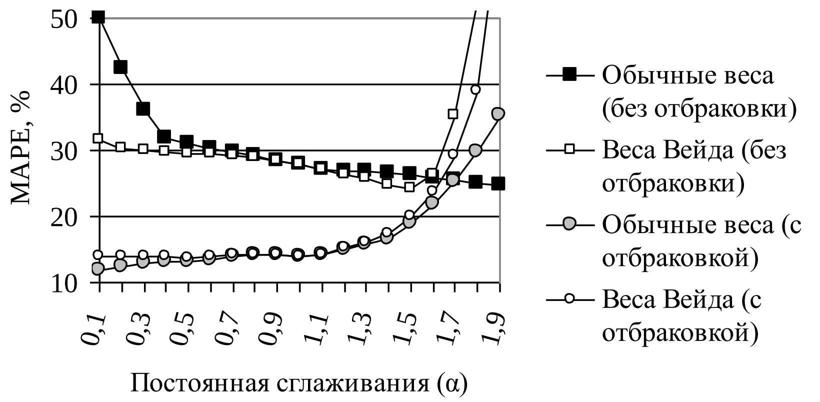
5. Для стационарного ряда при $\alpha \to 0$ повышение точности прогноза за счет отбраковки АН не превышает 4 % (при этом разница в МАРЕ за счет выбора оценки S_0 не превышает 5,5 %) для любых весов. При $\alpha = 1$ снижение точности прогноза за счет отбраковки АН не превышает 1 % (разница в МАРЕ за счет выбора оценки S_0 не превышает 2 %). При $\alpha \to 2$ снижение точности прогноза за счет отбраковки АН может достигать примерно 20 % (разница в

MAPE за счет выбора оценки S_0 достигает 13 % при использовании обычных весов и 29 % при использовании весов Вейда).

6. Для нестационарного ряда при $\alpha \to 0$ повышение точности прогноза за счет отбраковки АН достигает 40 % при использовании обычных весов (разница в MAPE за счет выбора оценки S_0 не превышает 1 %) и 20 % при использовании весов Вейда (разница в MAPE за счет выбора оценки S_0 не превышает 1,5 %). При $\alpha = 1$ повышение точности прогноза за счет отбраковки АН достигает 16 % при использовании обычных весов и весов Вейда (разница в MAPE за счет выбора оценки S_0 не превышает 3 %). При $\alpha \to 2$ в случае использования обычных весов прирост точности прогноза за счет отбраковки АН сначала уменьшается, затем (при $\alpha > 1{,}7$) отбраковка АН приводит к снижению точности прогноза до 10% (разница в MAPE за счет выбора оценки S_0 достигает 10 %). При $\alpha > 1{,}7$ в случае использования весов Вейда повышение точности прогноза за счет отбраковки АН достигает 60 % (разница в MAPE за счет выбора оценки S_0 достигает 33 %).

Таким образом, наиболее значимым фактором, влияющим на точность прогноза во всем диапазоне значений α (особенно для нестационарного ряда) является отбраковка АН. При $\alpha > 1{,}7$ также существенным фактором, влияющим на точность прогноза, становится вид оценки S_0. В случае отбраковки АН в качестве S_0 целесообразно использовать простое среднее значение, без отбраковки – М-оценки.

2.7. Результаты исследования зависимости точности прогноза от вида весов. Пример зависимости точности прогноза объема продаж Lada Vesta от вида весов (а также от применения отбраковки АН и α) с использованием модели Брауна на основе определения S_0 в виде одношаговой оценки Тьюки представлен на рис. 3.



Р и с . 3. Зависимость MAPE от вида весов для Lada Vesta (S_0 – оценка Тьюки)

Анализ результатов зависимости точности прогноза от вида весов позволяет сформулировать следующие выводы.

1. Применение весов Вейда может приводить как к повышению, так и к снижению точности прогноза. Для исследованных рядов без отбраковки АН

применение весов Вейда при $0 < \alpha < 1$ приводит к повышению точности прогноза, а при $\alpha \geq 1$ увеличение значения α приводит к уменьшению прироста точности прогноза и при $\alpha \to 2$ (особенно при $\alpha > 1{,}7$) имеет место снижение точности прогноза. Применение весов Вейда после отбраковки АН приводило либо к незначительному повышению точности прогноза (для стационарного ряда при $\alpha \to 0$), либо к снижению точности прогноза в остальных случаях.

2. Повышение (снижение) точности прогноза за счет применения весов Вейда существенно выше для нестационарного ряда (с отбраковкой АН и без нее).

3. Повышение (снижение) точности прогноза за счет применения весов Вейда при отсутствии отбраковки АН больше, чем после отбраковки АН.

4. Для стационарного ряда при $\alpha \to 0$ повышение (снижение) точности прогноза за счет весов Вейда не превышает 5 % (разница в MAPE за счет выбора оценки S_0 не превышает 2 %) как с отбраковкой, так и без нее. При $\alpha = 1$ точность прогноза на основе модели с обычными весами и с весами Вейда равна. При $\alpha \to 2$ снижение точности прогноза за счет весов Вейда может достигать примерно 25 % (разница в MAPE за счет выбора оценки S_0 достигает 13 % без отбраковки и 29 % с отбраковкой).

5. Для нестационарного ряда без отбраковки АН при $\alpha \to 0$ повышение точности прогноза за счет весов Вейда может достигать 20 %, а после отбраковки имеет место снижение точности прогноза до 2 % (разница в MAPE за счет выбора оценки S_0 не превышает 3 %). При $\alpha \to 2$ ухудшение точности прогноза за счет весов Вейда может достигать 90 % без отбраковки и 30 % после отбраковки АН (разница в MAPE за счет выбора оценки S_0 достигает 14 % без отбраковки и 33 % с отбраковкой АН).

Таким образом, вид весов (обычные или Вейда) является значимым фактором, влияющим на точность прогноза (при $\alpha \geq 1{,}7$) независимо от наличия или отсутствия отбраковки АН. При $\alpha \geq 1{,}7$ также существенным фактором, влияющим на точность прогноза, становится вид оценки S_0. Применение весов Вейда при $\alpha \geq 1{,}7$ приводит к большим ошибкам прогноза (как при использовании отбраковки АН, так и без нее).

Выводы. Анализ результатов проведенного исследования позволяет сформулировать следующие общие выводы (рекомендации) по использованию модели Бруна нулевого порядка для краткосрочного прогнозирования коротких временных рядов.

1. Точность краткосрочного прогноза на основе модели Брауна с определением S_0 в виде М-оценок зависит от сочетания следующих факторов, перечисленных в порядке убывания влияния: вида временного ряда (стационарный, нестационарный); диапазона значений α; наличия (отсутствия) отбраковки АН; вида весов (обычные, Вейда); вида оценки S_0; числа итераций при вычислении М-оценки. Каждый фактор в отдельности может приводить как к повышению, так и к снижению точности прогноза.

2. При вычислении S_0 на основе М-оценок целесообразно применение одношаговых оценок в силу незначительного влияния числа итераций на точность прогноза (вне зависимости от других факторов).

3. Наиболее значимыми факторами, влияющими на точность прогноза, являются отбраковка АН и вид весов. Применение отбраковки АН и весов Вейда при $\alpha \geq 1{,}7$ нецелесообразно из-за возможного существенного снижения точности прогноза.

4. Вид оценки S_0 значимо влияет на точность прогноза только при $\alpha \geq 1{,}7$. При $0{,}3 < \alpha < 1{,}7$ выбор вида оценки S_0 не важен.

5. При прогнозировании любых временных рядов значение постоянной сглаживания следует выбирать в диапазоне $0 < \alpha < 1{,}7$.

6. При прогнозировании стационарного ряда (как с отбраковкой АН, так и без нее) и нестационарного ряда с отбраковкой АН наилучшую точность прогноза обеспечивает оценка S_0 в виде простого среднего значения.

7. При прогнозировании нестационарного ряда без отбраковки АН наилучшую точность прогноза обеспечивают робастные оценки S_0 на основе М-оценок (в данном исследовании на основе оценки Тьюки). Однако улучшение точности прогноза за счет использования робастных оценок S_0 в этом случае составляет только единицы процентов и явно проявляется только при $\alpha \leq 0{,}3$.

8. Для нестационарного временного ряда без отбраковки АН существенное повышение точности прогноза обеспечивается за счет применения весов Вейда.

Таким образом, на начальных шагах прогнозирования при ограниченном количестве уровней временного ряда, когда невозможно достоверно определить вид временного ряда и когда отсутствуют основания для отбраковки первых уровней ряда, предпочтительнее использовать модель Брауна с весами Вейда и с определением S_0 на основе робастных М-оценок. В остальных случаях для оценки S_0 целесообразно применять простое среднее арифметическое значение.

Список литературы

1. Васильев А.А. Исследование бивес-оценок в качестве начального значения экспоненциальной средней в модели прогнозирования Брауна // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем: сборник научных трудов XII Международной школы-симпозиума АМУР-2018, Симверополь-Судак, 14-27 сентября 2018 / под. ред. А.В. Сигала. Симферополь: ИП Корниенко А.А., 2018. С. 101-110.
2. Васильев А.А. Исследование методов определения начального значения экспоненциальной средней в модели прогнозирования Брауна нулевого порядка // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Экономика и управление. 2017. № 1. С. 176-185.
3. Васильев А.А. Применение М-оценок для прогнозирования коротких временных рядов экономических показателей на основе среднего значения уровней // Учет и статистика. 2018. № 4 (52). С. 28-36.
4. Дубров А.М., Мхитарян В.С., Трошин Л.И. Многомерные статистические методы. М.: Финансы и статистика, 2000. 352 с.
5. Леман Э. Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991. 448 с.
6. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. М.: Финансы и статистика, 2003. 416 с.
7. Мостеллер Ф., Тьюки Дж. Анализ данных и регрессия. В 2-х вып. Вып. 1. М.: Финансы и статистика, 1982. 317 с.
8. Мостеллер Ф., Тьюки Дж. Анализ данных и регрессия. В 2-х вып. Вып. 2. М.: Финансы и статистика, 1982. 239 с.
9. Продажи новых легковых и легких коммерческих автомобилей в России [Электронный ресурс] // Статистика и аналитика. АЕБ. М.: Ассоциация “Российские автомобильные дилеры”, 2021. Режим доступа: http://www.asroad.org/category_s/aeb (дата обращения 10.04.2021).

10. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния / Ф. Хампель, Э. Рончетти, П. Рауссеу, В. Штаэль. М.: Мир, 1989. 512 с.
11. Светуньков С.Г. О расширении границ применения метода Брауна // Известия Санкт-Петербургского университета экономики и финансов. 2002. № 3. С. 94-106.
12. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Методы социально-экономического прогнозирования. Т. II. СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2010. 103 с.
13. Стогов Г.В., Макшанов А.В., Мусаев А.А. Устойчивые методы обработки результатов измерений // Зарубежная радиоэлектроника. 1982. № 9. С. 3-46.
14. Хогг Р.В. Введение в помехоустойчивое оценивание. В кн.: Устойчивые статистические методы оценки данных. М.: Машиностроение, 1984. С. 12-26.
15. Хьюбер Дж.П. Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 304 с.
16. Gelper S., Fried R., Croux C. Robust forecasting with exponential and Holt-Winters smoothing // Journal of Forecasting. 2010. Volume 29, Issue 3, P. 285-300.

Об авторе:

ВАСИЛЬЕВ Александр Анатольевич - кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры экономической теории Института экономики и управления, ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет» (170000, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33), e-mail: vasiljev-tvgu@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-3763-0973, SPIN-код: 3318-1812.

APPLYING M-ESTIMATES TO DEFINE START VALUE OF EXPONENTIAL AVERAGE IN BRAUN'S FORECAST MODEL OF ZERO LEVEL

Aleksandr A. Vasiliev

FSBOU VO "Tver State University", Tver

In economic forecasting of short-term time series Braun's model of zero level is often applied. One of issues of usage of this model from the very beginning of forecasting is estimation of start value of exponential average. As usual, simple arithmetic mean of first levels of series, used as such estimate, is volatile statistical estimate. That's why in this investigation it's suggested to use Tukey's, Hampel's, Huber's and Andrews' robust M-estimates for estimation of start value of exponential average. Purpose of research is definition of reasonability of M-estimates application to define start value of exponential average in Braun's model during forecasting of short-term time series of economic indicators. The results of conducted experimental research are as follows: a) the most important factors, that have significant impact on forecast accuracy with usage of Braun's model, are type of time series, value of smoothing constant, removal of abnormal levels and type of weights; b) type of estimate of start value of exponential average and quantity of iterations in process of calculation of M-estimate are less significant factors; c) consequently, reasonability of usage of one-step M-estimates is justified; d) on the first steps of forecasting with limited quantity of levels of time series, when it's impossible to define with certainty type of series and when there is no reasons for removal of abnormal levels, it's preferable to use Braun's model with Wade's weights and define start value of exponential average based on one-step robust M-estimates (in other cases it's better to use simple arithmetical mean).

***Keywords**: Andrews' estimate, Braun's model of zero level, forecast accuracy, Huber's estimate, Hampel's estimate, one-step estimate, start value of exponential average, Tukey's estimate.*

About the authors:

VASILIEV Aleksandr Anatol'evich - PhD in Engineering Science, Associate Professor of Economic Theory Department, Institute of Economics and Management, FSBOU VO "Tver State University" (33, Zhelaybova St., Tver, 170000), e-mail: vasiljev-tvgu@yandex.ru.

References

1. Vasil'ev A.A. Issledovanie bives-ocenok v kachestve nachal'nogo znacheniya eksponencial'noj srednej v modeli prognozirovaniya Brauna // Analiz, modelirovanie, upravlenie, razvitie social'no-ekonomicheskih sistem: sbornik nauchnyh trudov XII Mezhdunarodnoj shkoly-simpoziuma AMUR 2018, Simveropol' Sudak, 14-27 sentyabrya 2018 / Pod. red. A.V. Sigala. Simferopol': IP Kornienko A.A., 2018. S. 101-110.
2. Vasil'ev A.A. Issledovanie metodov opredeleniya nachal'nogo znacheniya eksponencial'noj srednej v modeli prognozirovaniya Brauna nulevogo poryadka // Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Ekonomika i upravlenie. 2017. № 1. S. 176-185.
3. Vasil'ev A.A. Primenenie M-ocenok dlya prognozirovaniya korotkih vre-mennyh ryadov ekonomicheskih pokazatelej na osnove srednego znacheniya urovnej // Uchet i statistika. 2018. №4 (52). S. 28-36.
4. Dubrov A.M., Mhitaryan V.S., Troshin L.I. Mnogomernye statisticheskie metody. M.: Finansy i statistika, 2000. 352 s.
5. Leman E. Teoriya tochechnogo ocenivaniya. M.: Nauka, 1991. 448 s.
6. Lukashin YU.P. Adaptivnye metody kratkosrochnogo prognozirovaniya vre-mennyh ryadov. M.: Finansy i statistika, 2003. 416 s.
7. Mosteller F., T'yuki Dzh. Analiz dannyh i regressiya. V 2-h vyp. Vyp. 1. M.: Finansy i statistika, 1982. 317 s.
8. Mosteller F., T'yuki Dzh. Analiz dannyh i regressiya. V 2-h vyp. Vyp. 2. M.: Finansy i statistika, 1982. 239 s.
9. Prodazhi novyh legkovyh i legkih kommercheskih avtomobilej v Rossii [Elektronnyj resurs] // Statistika i analitika. AEB. M.: Associaciya "Rossijskie avtomobil'nye dilery", 2019. Rezhim dostupa: http://www.asroad.org/category_s/aeb (data obrashcheniya 10.04.2021).
10. Robastnost' v statistike. Podhod na osnove funkcij vliyaniya / F. Hampel', E. Ronchetti, P. Rausseu, V. SHtael'. M.: Mir, 1989. 512 s.
11. Svetun'kov S.G. O rasshirenii granic primeneniya metoda Brauna // Izvestiya Sankt-Peterburgskogo universiteta ekonomiki i finansov. 2002. № 3. S. 94-106.
12. Svetun'kov S.G., Svetun'kov I.S. Metody social'no-ekonomicheskogo pro-gnozirovaniya. T. II. SPb.: Izd-vo SPbGUEF, 2010. 103 s.
13. Stogov G.V., Makshanov A.V., Musaev A.A. Ustojchivye metody obrabotki rezul'tatov izmerenij // Zarubezhnaya radioelektronika. 1982. № 9. S. 3-46.
14. Hogg R.V. Vvedenie v pomekhoustojchivoe ocenivanie. V kn.: Ustojchivye statisticheskie metody ocenki dannyh. M.: Mashinostroenie, 1984. S. 12-26.
15. H'yuber Dzh.P. Robastnost' v statistike. M.: Mir, 1984. 304 s.
16. Gelper S., Fried R., Croux C. Robust forecasting with exponential and Holt-Winters smoothing // Journal of Forecasting. 2010. Volume 29, Issue 3, P. 285-300.