УДК 510.67

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ УНОИДОВ И УНОИДОВ ИХ ПОДМНОЖЕСТВ[1]

Карлов Б.Н.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 06.08.2021, после переработки 20.08.2021.

В данной работе исследуются свойства уноидов, которые содержат единственную разнозначную функцию. Устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы два таких уноида были элементарно эквивалентными. С помощью этого результата доказываются необходимые и достаточные условия для того, чтобы уноид всех подмножеств уноида $\mathfrak{A}$ был элементарно эквивалентен исходному уноиду $\mathfrak{A}$.

Ключевые слова: уноид, алгебра подмножеств, элементарная эквивалентность.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 3. С. 18–32.
https://doi.org/10.26456/vtpmk620

Введение

Одной из проблем теории моделей является изучение различных операций, позволяющих получать из одних алгебраических систем другие. Классическими примерами таких операций являются прямые и фильтрованные произведения, прямые и обратные произведения спектров и др. Некоторые свойства исходных систем могут переноситься и на системы, получающиеся из исходных применением операций, например, прямое произведение групп всегда будет группой, прямое произведение алгебраических систем с разрешимыми теориями снова имеет разрешимую теорию (см. [6]) и т.п. Однако операции сохраняют далеко не любое свойство, так, произведение циклических групп уже может не быть циклической группой (см. [4]). Поэтому большой интерес представляет изучение того, какие свойства сохраняются при применении различных операций.

Одним из способов построения новых алгебр из уже имеющихся является рассмотрение алгебры всех или некоторых подмножеств. Новая алгебра может существенно отличаться от исходной по своим алгоритмическим свойствам. Например, в работе [1] показано, что существуют уноиды такие, что их теория имеет сколь угодно большую степень неразрешимости, но теория уноида всех конечных подмножеств разрешима. В работе [2] было доказано, что существуют абелевы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00435.

группы, не являющиеся группами кручения, для которых теория моноида их конечных подмножеств алгоритмически эквивалентна элементарной арифметике. В работе [3] этот результат перенесён и на некоторые группы кручения.

В настоящей работе мы рассматриваем уноиды вида $\mathfrak{A} = (A, f^{(1)})$, содержащие единственную разнозначную функцию $f^{(1)}$. Сначала мы доказываем необходимые и достаточные условия элементарной эквивалентности двух произвольных уноидов вида $\mathfrak{A} = (A, f^{(1)})$ (теорема 2). Этот результат является аналогом классической теоремы Тарского о классификации булевых алгебр с помощью счётного множества инвариантов (см [7]). Затем мы получаем необходимые и достаточные условия элементарной эквивалентности уноида $\mathfrak{A}$ и уноида всех его подмножеств (теорема 3).

1. Определения

Пусть A — произвольное множество, и пусть $f\colon A \to A$ — некоторая одноместная функция. f разнозначна, если из $x \neq y$ следует $f(x) \neq f(y)$. Через f^i мы будем обозначать функцию, получающуюся композицией f с собой i раз, то есть

$$f^i(x) = \underbrace{f(f(\dots f(}_{i\ \text{раз}}x)\dots)).$$

В частности, $f^0(x) = x$ для всех x, то есть f^0 — тождественная функция, её мы обозначим через e. Если для элемента x существует y такой, что $f(y) = x$, то мы будем обозначать y через $f^{-1}(x)$. Через $f^{-i}(x)$ обозначается результат i-кратного применения f^{-1} к x:

$$f^{-i}(x) = \underbrace{f^{-1}(f^{-1}(\dots f^{-1}(}_{i\ \text{раз}}x)\dots)).$$

Если далее мы используем запись вида $f^{-i}(x)$, то мы предполагаем, что этот элемент существует.

Теория алгебраической системы $\mathfrak{A}$ — это множество всех формул истинных в $\mathfrak{A}$. Две алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны, если $\mathfrak{A} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B} \models \varphi$ для любой замкнутой формулы φ, то есть их теории совпадают. Критерий элементарной эквивалентности систем основан на играх Эренфойхта.

Формула называется приведённой, если любая её атомная подформула имеет вид $x = y$, $c = y$, $f(x_1, \dots, x_k) = y$ или $R(x_1, \dots, x_k)$, где c — символ константы, x, y и x_i — переменные, f — функциональный символ, R — предикатный символ. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две алгебраические системы одной сигнатуры Ω. Пусть n — неотрицательное целое число. n-игра Эренфойхта на системах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — это игра между двумя участниками: Разрушителем и Повторителем. Игра продолжается n ходов. На i-м шаге Разрушитель выбирает произвольный элемент одной из систем $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Повторитель выбирает произвольный элемент другой системы. Пусть (x_i, y_i) — пара, выбранная на i-м шаге. Пусть g — следующая функция (здесь $c^{\mathfrak{A}}$ обозначает интерпретацию символа c в системе $\mathfrak{A}$):

$$g = \{\, (x_i, y_i) : 1 \leqslant i \leqslant n \,\} \cup \{\, (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}}) : c \text{ — символ константы из } \Omega \,\}.$$

Повторитель выигрывает тогда и только тогда, когда g является частичным изоморфизмом, то есть для любой приведённой формулы φ

$$\mathfrak{A} \models \varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_p}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}) \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_p}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_q}).$$

В следующей теореме сформулирован критерий элементарной эквивалентности двух алгебраических систем (см. [5]).

Теорема 1. *Если у Повторителя есть выигрышная стратегия в n-игре Эренфойхта на системах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то для любой замкнутой приведённой формулы φ, содержащей не более n кванторов, $\mathfrak{A} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B} \models \varphi$. Если у Повторителя есть выигрышная стратегия для любого n, то $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны.*

Если $\mathfrak{A} = (A, f^{(1)})$ — произвольный уноид, то через $\exp \mathfrak{A}$ обозначается уноид $(\mathsf{P}(A), f^{(1)})$, основным множеством которого является множество всех подмножеств множества A, а функция f определяется следующим образом:

$$f(B) = \{\, f(x) : x \in B \,\}.$$

Если $f^n(x) = x$ для некоторого натурального $n > 0$, то наименьшее из таких n называется порядком элемента x и обозначается $\operatorname{ord} x$. Аналогично, наименьшее $n > 0$ такое, что $f^n(B) = B$ для некоторого множества B называется порядком множества B и обозначается $\operatorname{ord} B$. Если такого n не существует, то порядок элемента или множества равен бесконечности.

2. Критерий элементарной эквивалентности

Рассмотрим уноид $\mathfrak{A} = (A, f^{(1)})$, в котором функция f разнозначна, и исследуем его строение. Возьмём произвольный элемент $x \in A$ и построим последовательность $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots$. Если окажется, что $f^i(x) = f^j(x)$ для некоторых i, j таких, что $i < j$, то выберем наименьшее из таких i. Тогда обязательно $i = 0$ и $f^j(x) = x$, так как в противном случае $f(f^{i-1}(x)) = f(f^{j-1}(x))$ и $f^{i-1}(x) \neq f^{j-1}(x)$ в силу минимальности i, что противоречит разнозначности f. Значит, в этом случае для некоторого $n > 0$ элементы $x, f(x), \ldots, f^n(x) = x$ образуют «цикл».

Теперь предположим, что в последовательности $x, f(x), f^2(x), \ldots$ нет одинаковых элементов, то есть последовательность бесконечна. Построим последовательность $x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \ldots$. Её элементы попарно различны и не совпадают ни с одним из элементов $f^i(x)$, так как в противном случае снова получился бы конечный «цикл». Если эта новая последовательность также бесконечна, то в уноиде $\mathfrak{A}$ имеется класс $\{\ldots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \ldots\}$, упорядоченный по типу целых чисел. Если же она конечна, то для некоторого элемента $f^{-i}(x)$ не существует прообраза. В этом случае получается класс $\{\, f^{-i}(x), f^{-i+1}(x), \ldots\}$, упорядоченный по типу натуральных чисел.

Итак, множество A распадается на несколько классов одного из трёх типов.

1. Конечные классы-циклы $\{\, x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x) \,\}$.
2. Классы вида $\{\ldots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \ldots\}$, упорядоченные по типу целых чисел (мы будем называть их классами типа $\mathbb{Z}$).

3. Классы вида $\{ x, f(x), f^2(x), \dots \}$, упорядоченные по типу натуральных чисел (мы будем называть их классами типа ω). Элемент x, не принадлежащий множеству значений функции f, мы будем называть первым элементом класса.

Так как f разнозначна и в уноиде $\exp \mathfrak{A}$, то этот уноид имеет такое же строение, однако число классов и их типы могут быть другими.

С каждым уноидом $\mathfrak{A} = (A, f^{(1)})$ свяжем функцию $\chi_{\mathfrak{A}} \colon \omega \cup \{ \mathbb{Z}, \omega \} \to \omega \cup \{ \infty \}$ (здесь ∞ — это просто символ).

1. Если $\mathfrak{A}$ содержит конечное число $k \geqslant 0$ классов мощности n, то $\chi_{\mathfrak{A}}(n) = k$, в противном случае $\chi_{\mathfrak{A}}(n) = \infty$.

2. Если $\mathfrak{A}$ содержит конечное число $k \geqslant 0$ классов типа ω, то $\chi_{\mathfrak{A}}(\omega) = k$, в противном случае $\chi_{\mathfrak{A}}(\omega) = \infty$.

3. Если $\mathfrak{A}$ содержит хотя бы один класс типа $\mathbb{Z}$ или ω или множество мощностей конечных классов не ограничено (несколько условий могут выполняться одновременно), то $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = 1$, в противном случае $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = 0$.

Условие $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = 1$ означает, что в $\mathfrak{A}$ существуют сколь угодно длинные последовательности $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)$, состоящие из попарно различных элементов.

В следующей теореме сформулирован критерий элементарной эквивалентности уноидов изучаемого нами вида.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{A} = (A, f^{(1)})$ и $\mathfrak{B} = (B, f^{(1)})$ — два уноида, в каждом из которых функция f разнозначна. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $\chi_{\mathfrak{A}} = \chi_{\mathfrak{B}}$.*

Доказательство. Предположим, что $\chi_{\mathfrak{A}} \neq \chi_{\mathfrak{B}}$, и рассмотрим несколько случаев.

Если $\chi_{\mathfrak{A}}(n) \neq \chi_{\mathfrak{B}}(n)$, то один из уноидов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ содержит больше классов мощности n, чем другой. Пусть $\mathfrak{A}$ содержит не менее k таких классов, а $\mathfrak{B}$ содержит их менее k. Рассмотрим следующую формулу φ_1:

$$(\exists x_1, x_2, \dots, x_k)\Big(\bigwedge_{i=1}^{k} \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \bigwedge_{l=1}^{n} f^l(x_i) \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \bigwedge_{l=1}^{n-1} f^l(x_i) \neq x_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} f^n(x_i) = x_i \Big).$$

Она говорит, что существует по меньшей мере k классов мощности n, поэтому φ_1 истинна в уноиде $\mathfrak{A}$, но ложна в $\mathfrak{B}$.

Если $\chi_{\mathfrak{A}}(\omega) \neq \chi_{\mathfrak{B}}(\omega)$, то один из уноидов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ содержит больше классов типа ω, чем другой. Пусть снова $\mathfrak{A}$ содержит не менее k таких классов, а $\mathfrak{B}$ содержит их менее k. Рассмотрим следующую формулу φ_2:

$$(\exists x_1, x_2, \dots, x_k)\Big(\bigwedge_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=i+1}^{k} x_i \neq x_j \wedge (\forall y) \bigwedge_{i=1}^{k} f(y) \neq x_i \Big).$$

Она говорит, что что существует по меньшей мере k элементов, для которых нет предыдущего, поэтому φ_2 истинна в уноиде $\mathfrak{A}$, но ложна в $\mathfrak{B}$.

Если $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) \neq \chi_{\mathfrak{B}}(\mathbb{Z})$, то один из уноидов содержит конечный класс наибольшей мощности n и не содержит бесконечных классов (пусть это будет $\mathfrak{A}$), а второй уноид содержит либо конечный класс мощности больше n, либо хотя бы один класс типа $\mathbb{Z}$ или ω. Рассмотрим следующую формулу φ_3:

$$(\exists x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})\Big(\bigwedge_{i=1}^{n+1} \bigwedge_{j=i+1}^{n+1} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} f(x_i) = x_{i+1}\Big).$$

Она говорит, что существует класс, содержащий не менее $n+1$ элемента, поэтому φ_3 ложна в уноиде $\mathfrak{A}$, но истинна в $\mathfrak{B}$.

Теперь предположим, что $\chi_{\mathfrak{A}} = \chi_{\mathfrak{B}}$. Зафиксируем натуральное число n и докажем, что Повторитель имеет выигрышную стратегию в n-игре Эренфойхта на системах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Если Разрушитель выбрал элемент из класса C_1, а Повторитель выбрал на этом же ходу элемент из класса C_2, то будем говорить, что класс C_2 соответствует классу C_1. Будем называть класс старым, если из него уже был выбран хотя бы один элемент, в противном случае будем называть класс новым. Если x и y — элементы одной из систем, то расстоянием между x и y будем называть целое число k с наименьшим модулем такое, что $f^k(x) = y$ (расстояние может быть отрицательным). Если $f^k(x) = f^{-k}(x) = y$, то в качестве расстояния выберем число k. Если такого числа нет, то расстояние равно ∞. Мы считаем, что $k < \infty$ для любого числа k. Расстояние между элементами x и y обозначим $\rho(x, y)$. Например, если $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$, $f(x_3) = x_4$, $f(x_4) = x_1$, то $\rho(x_1, x_2) = 1$, $\rho(x_2, x_1) = -1$.

Пусть после i ходов в системах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ выбраны элементы $x_1, \ldots, x_i$ и $y_1, \ldots, y_i$ соответственно. Повторитель будет делать ходы таким образом, чтобы выполнялись следующие свойства:

1. если $|\rho(x_p, x_q)| \leqslant 2^{n+1-i}$ или $|\rho(y_p, y_q)| \leqslant 2^{n+1-i}$, то $\rho(x_p, x_q) = \rho(y_p, y_q)$;
2. если элемент x_p (соответственно y_p) принадлежит классу типа ω и находится на расстоянии $k \leqslant 2^{n+1-i}$ от первого элемента этого класса, то элемент y_p (соответственно x_p) также принадлежит классу типа ω и находится на том же расстоянии k от его первого элемента;
3. если элементы x_p, x_q (соответственно y_p, y_q) принадлежит классам, каждый из которых содержит менее 2^{2n+3} элементов, то элементы y_p, y_q (соответственно x_p, x_q) принадлежат соответствующим классам такой же мощности и при этом $\rho(x_p, x_q) = \rho(y_p, y_q)$.

В начале игры три свойства выполняются, так как нет выбранных элементов.

Пусть $(i+1)$-м ходом Разрушитель выбирает элемент $x_{i+1} \in A$ (случай системы $\mathfrak{B}$ симметричен). Предположим сначала, что этот элемент принадлежит классу C мощности $k < 2^{2n+3}$. Если этот класс новый, то в системе $\mathfrak{B}$ также есть новый класс C' мощности k. Действительно, $\chi_{\mathfrak{A}}(k) = \chi_{\mathfrak{B}}(k)$, поэтому число таких классов в двух системах одинаково. Из свойства 3 следует, что два элемента попадают в один «маленький» класс тогда и только тогда, когда соответствующие им элементы также попадают в один «маленький» класс (в силу равенства расстояний). Также согласно свойству 3 элемент попадает в «большой» класс тогда и только тогда, когда соответствующий ему элемент попадает в «большой» класс.

Следовательно, в системе $\mathfrak{B}$ также имеется новый класс C'. В качестве y_{i+1} Повторитель выбирает произвольный элемент этого класса. Если же класс C старый, то в нём уже выбран некоторый элемент x_j, а в соответствующем ему классе C' — элемент y_j. Так как класс C конечен, то $x_{i+1} = f^l(x_j)$ для некоторого l. Повторитель выбирает в классе C' элемент $y_{i+1} = f^l(y_j)$. Так как классы одинаковые, то $\rho(x_{i+1}, x_j) = \rho(y_{i+1}, y_j)$, поэтому три свойства по-прежнему выполняются.

Остаётся рассмотреть случай, когда класс C, содержащий x_{i+1}, имеет мощность не менее 2^{2n+3} (он может быть как конечным, так и бесконечным). Предположим сначала, что существует элемент x_j такой, что $|\rho(x_{i+1}, x_j)| \leqslant 2^{n-i}$. Тогда в силу свойства 3 элемент y_j также принадлежит «большому» классу. Повторитель выберет элемент y_{i+1} такой, что $\rho(x_{i+1}, x_j) = \rho(y_{i+1}, y_j)$. Такой y_{i+1} всегда существует, так как в классах типа ω расстояния от x_j и y_j до соответствующих первых элементов равны по индукционному предположению. Рассмотрим произвольный элемент x_l и допустим, что $|\rho(x_{i+1}, x_l)| \leqslant 2^{n-i}$. Тогда $|\rho(x_j, x_l)| \leqslant |\rho(x_j, x_{i+1})| + |\rho(x_{i+1}, x_l)| \leqslant 2^{n+1-i}$. По индукционному предположению $\rho(y_j, y_l) = \rho(x_j, x_l)$, а тогда из $\rho(x_{i+1}, x_j) = \rho(y_{i+1}, y_j)$ следует $\rho(x_{i+1}, x_l) = \rho(y_{i+1}, y_l)$, так как класс C' содержит не менее 2^{2n+3} элементов, а значит, альтернативный «путь» между y_{i+1} и y_l внутри «цикла» не может быть короче. Если в классе C есть первый элемент x_0 и при этом $|\rho(x_{i+1}, x_0)| \leqslant 2^{n-i}$, то, заменяя в этом рассуждении x_l на x_0, мы докажем равенство $\rho(x_{i+1}, x_0) = \rho(y_{i+1}, y_0)$. Итак, в этом случае свойства 1–3 выполняются и после $(i+1)$-го хода.

Предположим теперь, что $|\rho(x_{i+1}, x_j)| > 2^{n-i}$ для всех $j = 1, \ldots, i$, но в классе C есть первый элемент x_0 и при этом $|\rho(x_{i+1}, x_0)| \leqslant 2^{n-i}$. В классе C уже могли быть выбраны какие-то элементы. Пусть x_j — тот из них, который находится ближе всего к x_0. Тогда $\rho(x_0, x_j) = \rho(x_0, x_{i+1}) + \rho(x_{i+1}, x_j) > 2^{n-i}$. Если при этом $\rho(x_0, x_j) \leqslant 2^{n+1-i}$, то по индукционному предположению y_j принадлежит классу типа ω с первым элементом y_0 и $\rho(y_0, y_j) = \rho(x_0, x_j) \leqslant 2^{n+1-i}$. Повторитель выбирает элемент y_{i+1} такой, что $\rho(y_0, y_{i+1}) = \rho(x_0, x_{i+1})$, поэтому свойства 1–3 выполняются. Пусть теперь $\rho(x_0, x_j) > 2^{n+1-i}$. Повторитель должен найти в системе $\mathfrak{B}$ класс C' типа ω, в котором расстояние от первого элемента y_0 до ближайшего выбранного элемента больше чем 2^{n+1-i}. Рассмотрим все классы $C'_1, \ldots, C'_m$ типа ω с первыми элементами $y_{0,1}, \ldots, y_{0,m}$, в каждом из которых выбран элемент $y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}$ такой, что $\rho(y_{0,p}, y_{i_p}) \leqslant 2^{n+1-i}$. Тогда по индукционному предположению элементы $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ также принадлежат классам $C_1, \ldots, C_m$ типа ω с первыми элементами $x_{0,1}, \ldots, x_{0,m}$, при этом $\rho(x_{0,p}, x_{i_p}) = \rho(y_{0,p}, y_{i_p}) \leqslant 2^{n+1-i}$. Если бы какие-то два элемента x_{i_p}, x_{i_q} оказались в одном классе, то выполнялось бы неравенство $|\rho(x_{i_p}, x_{i_q})| \leqslant 2^{n+1-i}$, а тогда по индукционному предположению выполнялось бы и неравенство $|\rho(y_{i_p}, y_{i_q})| \leqslant 2^{n+1-i}$. Это невозможно, так как все y_{i_p} принадлежат разным классам. Следовательно, все x_{i_p} также принадлежат разным классам. Но ни один из них не может принадлежать классу C, следовательно, в системе $\mathfrak{A}$ есть по меньшей мере $m+1$ класс типа ω. Так как $\chi_{\mathfrak{A}}(\omega) = \chi_{\mathfrak{B}}(\omega)$, то в системе $\mathfrak{B}$ также есть по меньшей мере $m+1$ такой класс, а значит, есть и класс C', в котором ближайший к началу элемент y_l находится от него на расстоянии большем 2^{n+1-i} (либо в C' ещё не выбран ни один элемент). Пусть y_0 — первый элемент класса C'. Повторитель выбирает в качестве y_{i+1} такой элемент класса C', что $\rho(y_0, y_{i+1}) = \rho(x_0, x_{i+1})$. Это гарантирует выполнение свойств 2 и 3. Так как $\rho(y_0, y_{i+1}) \leqslant 2^{n-i}$, $\rho(y_0, y_l) > 2^{n+1-i}$, то $\rho(y_{i+1}, y_l) > 2^{n+1-i} - 2^{n-i} = 2^{n-i}$.

Расстояние от y_{i+1} до других элементов ещё больше, поэтому свойство 1 также выполняется.

Наконец, предположим, что $|\rho(x_{i+1}, x_j)| > 2^{n-i}$ для всех $j = 1, \ldots, i$, а также что $|\rho(x_{i+1}, x_0)| > 2^{n-i}$, где x_0 — первый элемент класса C (если такой есть). Так как класс C содержит не менее 2^{2n+3} элементов, то в системе $\mathfrak{B}$ также есть класс C', содержащий не менее 2^{2n+3} элементов. Действительно, если класс C имеет конечную мощность k, то существование C' следует из равенства $\chi_{\mathfrak{A}}(k) = \chi_{\mathfrak{B}}(k)$. Если C имеет тип ω, то C' существует в силу равенства $\chi_{\mathfrak{A}}(\omega) = \chi_{\mathfrak{B}}(\omega)$. Если же C имеет тип $\mathbb{Z}$, то $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = \chi_{\mathfrak{B}}(\mathbb{Z}) = 1$, а значит, в системе $\mathfrak{B}$ есть либо бесконечный класс, либо конечные классы сколь угодно больших мощностей, то есть снова есть класс C' мощности не менее 2^{2n+3}. Так как игра продолжается n ходов, то в каждый момент времени выбрано не более n элементов. Для каждого элемента y имеется не более $2^{n+1} + 1$ элемента y' такого, что $|\rho(y, y')| \leqslant 2^n$. Выбранные элементы принадлежат не более чем n различным классам, поэтому в них есть не более n первых элементов. Для каждого первого элемента y существует $2^n + 1$ элемент y' такой, что $|\rho(y, y')| \leqslant 2^n$. Поэтому общее число элементов, находящихся на расстоянии не более 2^n от некоторого выбранного элемента или от некоторого первого элемента класса, не превосходит

$$n(2^{n+1} + 1) + n(2^n + 1) < 2n(2^{n+1} + 1) < 2^{n+1}(2^{n+1} + 1) < 2^{n+1} \cdot 2^{n+2} = 2^{2n+3}.$$

Так как C' содержит не менее 2^{2n+3} элементов, то в нём найдётся элемент, находящийся на расстоянии большем 2^{n-i} от любого уже выбранного и от любого первого. Повторитель выбирает его в качестве y_{i+1}, поэтому свойство 3 выполняется. Так как расстояние от y_{i+1} до других элементов больше чем 2^{n-i}, то свойства 1 и 2 также по-прежнему выполняются.

Из свойства 1 следует, что после n ходов $x_i = f(x_j)$ тогда и только тогда, когда $y_i = f(y_j)$, то есть отображение $x_i \mapsto y_i$ является частичным изоморфизмом. Следовательно, по теореме 1 уноиды $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны. □

3. Эквивалентность уноида подмножеств и исходного

Сначала докажем, что разнозначность функции f сохраняется при переходе от уноида $\mathfrak{A}$ у уноиду $\exp \mathfrak{A}$.

Лемма 1. *Функция f разнозначна в уноиде $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда f разнозначна в уноиде* $\exp \mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть f разнозначна в $\mathfrak{A}$, то есть $f(x) \neq f(y)$ для всех $x, y \in A$. Пусть B и C — произвольные подмножества A, при этом $B \neq C$. Тогда существует элемент $x \in A$, принадлежащий ровно одному из множеств B, C. Пусть для определённости $x \in B$, $x \notin C$, так что $f(x) \in f(B)$. Если $f(B) = f(C)$, то $f(x) \in f(C)$, поэтому существует $y \in C$ такой, что $f(y) = f(x)$. Так как f разнозначна, то $x = y$ и $x \in C$. Получилось противоречие, значит, из $B \neq C$ следует $f(B) \neq f(C)$, то есть f разнозначна и в $\exp \mathfrak{A}$. Наоборот, если f не является разнозначной в $\mathfrak{A}$, то $f(x) = f(y)$ для некоторых $x, y \in A$, поэтому $f(\{ x \}) = f(\{ y \}) = \{ f(x) \}$ и f не является разнозначной в $\exp \mathfrak{A}$. □

Так как функция f разнозначна в алгебре $\mathfrak{A}$, то по лемме 1 она разнозначна и в алгебре $\exp \mathfrak{A}$, поэтому $\mathfrak{A}$ также состоит из нескольких классов. Чтобы воспользоваться доказанной теоремой, нужно установить, какие классы порождаются в уноиде $\exp \mathfrak{A}$ классами исходного уноида $\mathfrak{A}$.

Лемма 2. *Если в уноиде $\mathfrak{A}$ есть конечный класс мощности n, то он даёт хотя бы один класс мощности k в уноиде $\exp \mathfrak{A}$ для любого k, являющегося делителем n.*

Доказательство. Рассмотрим конечный класс $C = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ уноида $\mathfrak{A}$, в котором $f(x_i) = x_{i+1}$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$ и $f(x_n) = x_1$. Пусть k — произвольный делитель числа n, то есть $n = km$. Рассмотрим множество $B = \{ x_k, x_{2k}, \dots, x_{mk} \}$. Так как $f^k(x_k) = x_{2k}$, $f^k(x_{2k}) = x_{3k}, \dots,$ $f^k(x_{mk}) = x_k$, то $f^k(B) = B$. Поскольку $f^l(x_k) \neq x_{pk}$ при $l < k$, $p = 1, \dots, m$, то $f^l(B) \neq B$ при $l < k$. Следовательно, $\operatorname{ord} B = k$, то есть B принадлежит классу мощности k. □

Лемма 3. *Конечный класс мощности $n \neq 2$ уноида $\mathfrak{A}$ даёт хотя бы два класса мощности n уноида $\exp \mathfrak{A}$. Класс мощности $n = 2$ в уноиде $\mathfrak{A}$ даёт ровно один класс мощности 2 в уноиде $\exp \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Если $C = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$, то множества $B_1 = \{ x_1 \}$ и $B_2 = \{ x_2, \dots, x_n \}$ принадлежат классам мощности n уноида $\exp \mathfrak{A}$. Если $n \neq 2$, то $|B_1| \neq |B_2|$, поэтому B_1 и B_2 принадлежат разным классам. Если $C = \{ x_1, x_2 \}$, то $f(\varnothing) = \varnothing$, $f(C) = C$, $f(\{ x_1 \}) = \{ x_2 \}$, $f(\{ x_2 \}) = \{ x_1 \}$, поэтому единственным классом мощности 2 является $\{ \{ x_1 \}, \{ x_2 \} \}$. □

Лемма 4. *Если класс мощности n уноида $\mathfrak{A}$ даёт класс мощности k уноида $\exp \mathfrak{A}$, то k является делителем n.*

Доказательство. Рассмотрим конечный класс $C = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$, в котором $f(x_i) = x_{i+1}$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$ и $f(x_n) = x_1$. Так как $f^n(x) = x$ для всех $x \in C$, то $f^n(B) = B$ для любого $B \subseteq C$, поэтому все подмножества C принадлежат конечным классам. Рассмотрим множество отображений $G = \{ f^1, f^2, \dots, f^n = e \}$. Для произвольного множества $B \subseteq C$ рассмотрим множество $H_B = \{ f^i \in G : f^i(B) = B \}$. Множество G является циклической группой порядка n с образующей f, а H_B является подгруппой группы G. Следовательно, группа H_B также циклическая (см. [4]) и имеет некоторую образующую f^j, то есть $H_B = \{ f^j, f^{2j}, \dots, f^{mj} = e \}$. Поэтому $f^n = f^{mj}$, $n = mj$ и j является делителем n. С другой стороны $f^l(B) \neq B$ для всех $l < j$, так как $f^l \notin H_B$. Поэтому $\operatorname{ord} B = j$. □

Лемма 5. *Конечные классы мощности n и k уноида $\mathfrak{A}$ дают хотя бы один класс мощности* НОК(n, k) *уноида* $\exp \mathfrak{A}$. *Здесь через* НОК *обозначено наименьшее общее кратное.*

Доказательство. Пусть $C_1 = \{ x_1, \dots, x_n \}$, $C_2 = \{ y_1, \dots, y_k \}$. Рассмотрим множество $B = \{ x_1, y_1 \}$. Пусть $N =$ НОК(n, k). Так как $N = mn$ для некоторого m, то получаем $f^N(x_1) = \underbrace{f^n(\dots f^n(}_{m \text{ раз}} x_1) \dots) = x_1$. Аналогично получается $f^N(y_1) = y_1$, поэтому $f^N(B) = B$. Наоборот, пусть $f^M(B) = B$ для некоторого

M, тогда $f^M(x_1) = x_1$, $f^M(y_1) = y_1$. Разделим M на n с остатком: $M = pn + r$, $0 \leqslant r < n$. Тогда $x_1 = f^M(x_1) = f^{pn+r}(x_1) = f^r(x_1)$, поэтому $r = 0$ и M делится на n. Аналогично доказывается, что M делится на k, а значит, $M \geqslant \text{НОК}(n, k)$. Поэтому число $N = \text{НОК}(n, k)$ является наименьшим, для которого $f^N(B) = B$, а значит, B принадлежит классу мощности $\text{НОК}(n, k)$ в унοиде $\exp\mathfrak{A}$. □

Лемма 6. *Если в унοиде $\mathfrak{A}$ есть хотя бы один класс типа ω, то в унοиде $\exp\mathfrak{A}$ есть бесконечно много классов типа ω.*

Доказательство. Пусть $C = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ — класс типа ω унοида $\mathfrak{A}$, в котором $f(x_i) = x_{i+1}$. Множества $B_i = \{x_0, x_i\}$, $i > 0$, принадлежат разным классам типа ω, так как ни для одного из них не существует множества B такого, что $f(B) = B_i$. □

Докажем ещё одну лемму о порядках множеств.

Лемма 7. *Если $\operatorname{ord} B_1 = n$, $\operatorname{ord} B_2 = k$ и B_1, B_2 являются подмножествами разных классов, то $\operatorname{ord}(B_1 \cup B_2) = \text{НОК}(n, k)$.*

Доказательство. Пусть $N = \text{НОК}(n, k)$. Так как N делится на n, то $f^N(B_1) = B_1$, а так как N делится на k, то $f^N(B_2) = B_2$, поэтому $f^N(B_1 \cup B_2) = B_1 \cup B_2$. Так как B_1 и B_2 — подмножества разных классов, то f не может отобразить элементы B_1 на элементы B_2 или наоборот. Поэтому если $f^M(B_1 \cup B_2) = B_1 \cup B_2$ для некоторого M, то $f^M(B_1) = B_1$, $f^M(B_2) = B_2$. Следовательно, M делится на n и k, а значит, и на $\text{НОК}(n, k)$. Поэтому N является наименьшим положительным числом, для которого $f^N(B_1 \cup B_2) = B_1 \cup B_2$, то есть $\operatorname{ord}(B_1 \cup B_2) = N$. □

Теперь мы можем доказать критерий эквивалентности унοидов $\mathfrak{A}$ и $\exp\mathfrak{A}$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{A} = (A, f^{(1)})$, где f — разнозначная функция. Унοиды $\mathfrak{A}$ и $\exp\mathfrak{A}$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:*

1. *либо в $\mathfrak{A}$ нет классов типа ω, либо их бесконечно много;*
2. *для любого натурального $n > 0$ либо в $\mathfrak{A}$ нет классов мощности n, либо их бесконечно много;*
3. *если в $\mathfrak{A}$ есть класс мощности n, то есть и классы мощности k для любого k, являющегося делителем n;*
4. *если в $\mathfrak{A}$ есть классы мощности n и k, то есть также класс мощности $\text{НОК}(n, k)$;*
5. *если в $\mathfrak{A}$ есть класс типа $\mathbb{Z}$, то есть и классы мощности n для любого натурального $n > 0$.*

Доказательство. Сначала докажем, что все условия являются необходимыми.

Если в $\mathfrak{A}$ имеется конечное количество $k > 0$ классов типа ω, то по лемме 6 в $\exp\mathfrak{A}$ имеется бесконечно много классов типа ω, поэтому по теореме 2 унοиды $\mathfrak{A}$ и $\exp\mathfrak{A}$ не являются элементарно эквивалентными.

Пусть в $\mathfrak{A}$ имеется конечное количество $k > 0$ классов мощности n. Если $n \neq 2$, то по лемме 3 каждый из этих классов даст хотя бы два класса в уноиде $\exp \mathfrak{A}$, поэтому $\exp \mathfrak{A}$ содержит больше классов мощности n, чем уноид $\mathfrak{A}$, и $\chi_{\mathfrak{A}}(n) \neq \chi_{\exp \mathfrak{A}}(n)$. Пусть $n = 2$. Если уноид $\mathfrak{A}$ не содержит классов мощности 1, то $\chi_{\mathfrak{A}}(1) \neq \chi_{\exp \mathfrak{A}}(1)$, так как $\exp \mathfrak{A}$ содержит класс $\{ \varnothing \}$ мощности 1. Если $\mathfrak{A}$ содержит класс $\{ y \}$ мощности 1, то каждый класс $\{ x_1, x_2 \}$ мощности 2 совместно с классом $\{ y \}$ даст в $\exp \mathfrak{A}$ два класса $\{ \{ x_1 \}, \{ x_2 \} \}$ и $\{ \{ x_1, y \}, \{ x_2, y \} \}$, поэтому $\chi_{\mathfrak{A}}(2) \neq \chi_{\exp \mathfrak{A}}(2)$. Во всех случаях по теореме 2 уноиды $\mathfrak{A}$ и $\exp \mathfrak{A}$ не являются элементарно эквивалентными.

Пусть в $\mathfrak{A}$ имеется класс мощности n, но для некоторого делителя k числа n в $\mathfrak{A}$ нет класса мощности k. Тогда по лемме 2 в $\exp \mathfrak{A}$ есть класс мощности k, и снова $\mathfrak{A}$ и $\exp \mathfrak{A}$ не элементарно эквивалентны.

Пусть в $\mathfrak{A}$ имеются классы мощности n и k, но нет класса мощности $\text{НОК}(n, k)$. Тогда такой класс есть в $\exp \mathfrak{A}$ по лемме 5, а значит, как и ранее, $\mathfrak{A}$ и $\exp \mathfrak{A}$ не элементарно эквивалентны.

Пусть в $\mathfrak{A}$ есть класс $\{ \dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots \}$ типа $\mathbb{Z}$, но нет ни одного класса мощности n. Тогда $\mathfrak{A}$ и $\exp \mathfrak{A}$ не элементарно эквивалентны, так как в $\exp \mathfrak{A}$ множество $\{ \dots, x_{-2n}, x_{-n}, x_0, x_n, x_{2n}, \dots \}$ принадлежит классу мощности n.

Теперь докажем достаточность условий. Если в уноиде $\mathfrak{A}$ нет классов типа ω, то для каждого элемента x существует элемент $f^{-1}(x)$. Поэтому для каждого множества B существует множество $B_1 = \{ f^{-1}(x) : x \in B \}$ такое, что $f(B_1) = B$. Следовательно, в $\exp \mathfrak{A}$ также нет классов типа ω. Если же в $\mathfrak{A}$ есть бесконечно много классов типа ω, то их будет бесконечно много и в уноиде $\exp \mathfrak{A}$. В обоих случаях $\chi_{\mathfrak{A}}(\omega) = \chi_{\exp \mathfrak{A}}(\omega)$.

Если в уноиде $\mathfrak{A}$ есть бесконечно много классов мощности n, то по лемме 3 в $\exp \mathfrak{A}$ также есть бесконечно много классов мощности n. Наоборот, пусть в уноиде $\exp \mathfrak{A}$ есть класс мощности n, то есть существует множество B порядка n. Заметим, что B не может содержать ни одного элемента из класса типа ω, так как тогда $f^n(B) \neq B$. Если в B имеется элемент бесконечного порядка, то в уноиде $\mathfrak{A}$ есть класс типа $\mathbb{Z}$, содержащий этот элемент. Тогда по условию 5 в $\mathfrak{A}$ есть класс мощности n, а по условию 2 их бесконечно много. Тогда по лемме 3 их число бесконечно и в $\exp \mathfrak{A}$, поэтому $\chi_{\mathfrak{A}}(n) = \chi_{\exp \mathfrak{A}}(n)$. Предположим теперь, что все элементы множества B имеют конечный порядок. Так как функция f не может отобразить элементы одного класса на элементы другого, то класс B можно представить в виде $B = \bigcup B_i$, где $B_i \subseteq C_i$, C_i — попарно различные классы уноида $\mathfrak{A}$, $f^n(B_i) = B_i$ для всех i (здесь i принимает значения из некоторого множества индексов, возможно, бесконечного или даже несчётного). Пусть $\operatorname{ord} B_i = m_i$. Так как $f^n(B_i) = B_i$, то n делится на любое из чисел m_i, а значит, существует лишь конечно много различных m_i. Изменяя обозначения, можно добиться, чтобы этими значениями были $m_1, \dots, m_p$. Остальные классы не повлияют на порядок множества B, поэтому по лемме 7 $n = \operatorname{ord} B = \text{НОК}(m_1, \dots, m_p)$. По лемме 4 мощность каждого класса C_i делится на m_i, то есть $|C_i| = k_i m_i$ для некоторых k_i. По условию 4 в уноиде $\mathfrak{A}$ есть также класс мощности $\text{НОК}(k_1 m_1, \dots, k_p m_p)$. Тогда по условию 3 в $\mathfrak{A}$ есть класс мощности n, так как $\text{НОК}(k_1 m_1, \dots, k_p m_p)$ делится на $\text{НОК}(m_1, \dots, m_p)$. По условию 2 $\mathfrak{A}$ содержит бесконечно много таких классов, тогда их число бесконечно и в $\exp \mathfrak{A}$. Итак, мы доказали, что уноид $\mathfrak{A}$ содержит конечный класс мощности n тогда и только тогда, когда уноид $\exp \mathfrak{A}$ содержит класс мощности n, причём число таких классов бесконечно в обоих унoидах. Поэтому $\chi_{\mathfrak{A}}(n) = \chi_{\exp\mathfrak{A}}(n)$ для всех натуральных n.

Остаётся доказать, что $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = \chi_{\exp\mathfrak{A}}(\mathbb{Z})$. Если $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = 0$, то $\mathfrak{A}$ не содержит классов типа $\mathbb{Z}$ и ω, а множество мощностей конечных классов конечно. Пусть $n_1, \ldots, n_p$ — мощности всех конечных классов унoида $\mathfrak{A}$ без повторений. Пусть B — произвольное множество элементов, и пусть $N = n_1 n_2 \ldots n_p$. Для каждого $x \in B$ выполняется $f^N(x) = x$, поэтому $f^N(B) = B$ и $\operatorname{ord} B \leqslant N$. Значит, любой класс унoида $\exp\mathfrak{A}$ содержит не более N элементов и $\chi_{\exp\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = 0$. Пусть $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = 1$. Если в унoиде $\mathfrak{A}$ есть класс типа $\mathbb{Z}$, содержащий элемент x, то в унoиде $\exp\mathfrak{A}$ также есть класс типа $\mathbb{Z}$, содержащий множество $\{\, x \,\}$, поэтому $\chi_{\exp\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = 1$. Если в унoиде $\mathfrak{A}$ есть класс типа ω, то по лемме 6 и в $\exp\mathfrak{A}$ есть класс типа ω, поэтому $\chi_{\exp\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = 1$. Пусть, наконец, $\mathfrak{A}$ содержит бесконечно много конечных классов различных мощностей $n_1, n_2, \ldots$. Пусть x_i — элемент порядка n_i. Заметим, что все x_i принадлежат разным классам. Рассмотрим множество $B = \{\, x_1, x_2, \ldots \}$. Его порядок бесконечен, так как из $f^N(B) = B$ следовало бы $f^N(x_i) = x_i$ для всех i, а это невозможно при $n_i > N$. Так как $\exp\mathfrak{A}$ содержит класс типа $\mathbb{Z}$, то $\chi_{\exp\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = 1$. Во всех случаях получилось $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = \chi_{\exp\mathfrak{A}}(\mathbb{Z})$.

Итак, мы доказали, что из условий 1–5 следует, что $\chi_{\mathfrak{A}} = \chi_{\exp\mathfrak{A}}$. Значит, по теореме 2 унoиды $\mathfrak{A}$ и $\exp\mathfrak{A}$ элементарно эквивалентны. □

Обозначим через $\exp^i\mathfrak{A}$ унoид, получающийся из $\mathfrak{A}$ i-кратным применением операции exp:

$$\exp^0\mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \qquad \exp^{i+1}\mathfrak{A} = \exp\exp^i\mathfrak{A}.$$

Следствие 1. *Существует унoид* $\mathfrak{A} = (A, f^{(1)})$ *такой, что все унoиды* $\mathfrak{A}, \exp\mathfrak{A}$, $\exp^2\mathfrak{A}, \ldots$ *элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Унoид $\mathfrak{A}$ содержит бесконечно много классов мощности n для каждого натурального n и один класс типа $\mathbb{Z}$. При построении последующих унoидов $\exp^i\mathfrak{A}$ в них будут только добавляться новые классы конечных мощностей, а также классы типа $\mathbb{Z}$. Поэтому все $\exp^i\mathfrak{A}$ удовлетворяют условиям теоремы 3, а значит, они элементарно эквивалентны. □

Следствие 2. *Существует унoид* $\mathfrak{A} = (A, f^{(1)})$ *такой, что унoиды* $\mathfrak{A}$ *и* $\exp\mathfrak{A}$ *элементарно эквивалентны, но унoиды* $\exp\mathfrak{A}$ *и* $\exp^2\mathfrak{A}$ *не являются элементарно эквивалентными.*

Доказательство. Унoид $\mathfrak{A}$ содержит бесконечно много классов мощности 2^n для всех $n \geqslant 0$ и не содержит других классов. Он удовлетворяет всем условиям теоремы 3, поэтому $\mathfrak{A}$ и $\exp\mathfrak{A}$ элементарно эквивалентны. Унoид $\exp\mathfrak{A}$ содержит бесконечный класс, так как в $\mathfrak{A}$ есть конечные классы сколь угодно большой мощности, но $\exp\mathfrak{A}$ не содержит класса мощности 3, так как степени двойки не делятся на 3. Поэтому $\exp\mathfrak{A}$ не удовлетворяет условию 5 теоремы 3, а значит, $\exp\mathfrak{A}$ и $\exp^2\mathfrak{A}$ не являются элементарно эквивалентными. □

Заключение

Мы получили необходимые и достаточные условия элементарной эквивалентности двух произвольных унoидов вида $\mathfrak{A} = (A, f^{(1)})$ с разнозначной функцией f, а также доказали критерий элементарной эквивалентности уноида $\mathfrak{A} = (A, f^{(1)})$ с разнозначной функцией f и уноида всех его подмножеств. В связи с этим возникает несколько естественных проблем.

1. Сформулировать необходимые и достаточные условия элементарной эквивалентности уноидов $\mathfrak{A} = (A, f^{(1)})$ и $\exp\mathfrak{A}$, если функция f не является разнозначной. В этом случае строение уноида $\exp\mathfrak{A}$ может существенно отличаться от строения уноида $\mathfrak{A}$, поэтому можно ожидать, что критерии элементарной эквивалентности окажутся значительно сложнее.

2. В случае невозможности полного решения предыдущей задачи было бы интересно найти широкие классы уноидов, для которых $\mathfrak{A}$ и $\exp\mathfrak{A}$ элементарно эквивалентны.

3. Исследовать элементарную эквивалентность уноидов, содержащих более одной функции.

Список литературы

[1] Дудаков С.М. Об алгоритмических свойствах алгебры конечных подмножеств некоторых уноидов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 108–116. https://doi.org/10.26456/vtpmk550

[2] Дудаков С.М. О теории моноида конечных подмножеств для одной абелевой группы кручения // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 2. С. 39–55. https://doi.org/10.26456/vtpmk615

[3] Dudakov S.M. On Undecidability of Subset Theory for Some Monoids // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1902, № 1. ID 012060. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1902/1/012060

[4] Lang S. Algebra. New York: Springer, 2002. 918 p.

[5] Marker D. Model theory: an introduction. New York: Springer-Verlag, 2002. 345 p.

[6] Mostowski A. On direct products of theories // The Journal of Symbolic Logic. 1952. Vol. 17, № 3. Pp. 1–31.

[7] Tarski A. Arithmetical classes and types of boolean algebras // Bulletin of the American Mathematical Society. 1949. Vol. 55, № 1. Pp. 63–63.

Образец цитирования

Карлов Б.Н. Об элементарной эквивалентности некоторых уноидов и уноидов их подмножеств // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 3. С. 18–32. https://doi.org/10.26456/vtpmk620

Сведения об авторах

1. **Карлов Борис Николаевич**
доцент кафедры информатики факультета прикладной математики и кибернетики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ. E-mail: bnkarlov@gmail.com

ON ELEMENTARY EQUIVALENCE OF SOME UNOIDS AND UNOIDS OF THEIR SUBSETS

Karlov Boris Nikolaevich
Associate Professor at Computer Science department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: *bnkarlov@gmail.com*

Received 06.08.2021, revised 20.08.2021.

In this paper we study the properties of unoids which contain a single injective function. Necessary and sufficient conditions are established for two such unoids to be elementarily equivalent. From this result we obtain necessary and sufficient conditions for the unoid of all subsets of unoid $\mathfrak{A}$ to be elementarily equivalent to the original unoid $\mathfrak{A}$.

Keywords: unoid, algebra of subsets, elementary equivalence.

Citation

Karlov B.N., "On elementary equivalence of some unoids and unoids of their subsets", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 3, 18–32 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk620

References

[1] Dudakov S.M., "On algorithmic properties of finite subset algebra for some unoids", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 4, 108–116 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk550.

[2] Dudakov S.M., "On theory of finite subsets monoid for one torsion abelian group", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 2, 39–55 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk615.

[3] Dudakov S.M., "On Undecidability of Subset Theory for Some Monoids", *Journal of Physics: Conference Series*, **1902**:1 (2021), 012060, https://doi.org/10.1088/1742-6596/1902/1/012060.

[4] Lang S., *Algebra*, Springer, New York, 2002, 918 pp.

[5] Marker D., *Model theory: an introduction*, Springer-Verlag, New York, 2002, 345 pp.

[6] Mostowski A., "On direct products of theories", *The Journal of Symbolic Logic*, **17**:3 (1952), 1–31.

[7] Tarski A., "Arithmetical classes and types of boolean algebras", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **55**:1 (1949), 63–63.