УДК 519.63

ЭКОНОМИЧНЫЕ ФАКТОРИЗОВАННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА[1]

Бештоков М.Х.
Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик

Поступила в редакцию 13.04.2021, после переработки 05.07.2021.

Изучены экономичные факторизованные схемы для псевдопараболических уравнений третьего порядка. На основе общей теории устойчивости разностных схем доказаны устойчивость и сходимость разностных схем.

Ключевые слова: краевые задачи, псевдопараболическое уравнение, устойчивость и сходимость схемы, экономичные факторизованные схемы.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 3. С. 44–57.
https://doi.org/10.26456/vtpmk622

Введение

В математической литературе уравнения вида

$$u_t - Au_t - Bu = f(x,t)$$

принято называть псевдопараболическими уравнениями, где A и B — операторы второго или более высокого порядка по пространственным переменным.

Краевые задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка возникают при изучении движения почвенной влаги [1]-[2], фильтрации жидкости в пористых телах [3]-[4].

Краевые задачи для различных классов уравнений третьего порядка изучались в работах [5]-[8]. Краевые задачи с общим нелокальным условием Самарского А.А. для псевдопароболических уравнений высокого порядка изучена в работе [9]. Численным методам решения краевых задач для псевдопараболических уравнений посвящены работы [10], [11]. Данная работа посвящена построению экономичных факторизованных схем для псевдопараболических уравнений третьего порядка.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ГФЕН Китая в рамках научного проекта №20-51-53007.

При построении разностных схем воспользовались уравнением с искусственной вязкостью [12], [13]. Заметим, что подобные уравнения можно использовать для реализации некорректно поставленных для параболических уравнений краевых задач [14].

1. Постановка задачи A

В цилиндре $Q_T = G \times [0 \leq t \leq T]$, основанием которого служит $p-$мерный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, ..., x_{\alpha-1}, x_\alpha, x_{\alpha+1}, ..., x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, ..., p\}$ с границей Γ, рассматривается первая краевая задача для псевдопараболического уравнения

$$u_t = Lu + \mu L u_t + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u\Big|_\Gamma = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \bar{G} = G + \Gamma, \tag{3}$$

где $Lu = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u$, $L_\alpha u = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$, $0 < c_0 \leq k_\alpha(x,t) \leq c_1$, $\mu = const > 0$.

Как отмечено в работе [2] второе слагаемое в правой части уравнения (1) мало при впитывании и велико при испарении.

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом h_α, $h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$, $\alpha = 1, 2, ..., p$. Совокупность $\overline{\omega}_h$ точек $\big(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, ..., x_\alpha^{(i_\alpha)}, ..., x_p^{(i_p)}\big)$ пересечения этих плоскостей назовем узлами разностной сетки.

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \overline{\omega}_{h_\alpha},\ \overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, ..., N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha = l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, ..., p\},$$

Множество узлов, принадлежащих границе Γ, назовем граничными узлами, $\gamma_h = \big(x_i \in \Gamma\big)$, где $\gamma_{-\alpha}$ – левый граничный узел $x_\alpha = 0$, $\gamma_{+\alpha}$ – правый граничный узел $x_\alpha = l_\alpha$.

На отрезке $[0, T]$ введём равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, ..., j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$.

Пусть H_h- пространство сеточных функций, определенных на $\overline{\omega}_h$ и равных нулю на границе (при $x_\alpha = 0$, $x_\alpha = l_\alpha$).

Задаче (1) поставим в соответствие двухслойную разностную схему:

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda\Big(\sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j\Big) + \mu \Lambda y_t + \varphi^j, \tag{4}$$

$$y\Big|_{\gamma,h} = 0, \quad y(x,0) = u_0(x), \tag{5}$$

где

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha}\Big[a_{\alpha, i_{\alpha+1}} \frac{y_{i_\alpha+1} - y_{i_\alpha}}{h_\alpha} - a_{\alpha, i_\alpha} \frac{y_{i_\alpha} - y_{i_\alpha - 1}}{h_\alpha}\Big],$$

$$y=y^j,\ a_{\alpha,i_\alpha}=k_\alpha(x_{i_\alpha-\frac{1}{2}},\bar t),\ \varphi_i^j=f(x_i,\bar t),\ \bar t=t_{j+\frac{1}{2}},\ y_t=\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau},\alpha=1,2,...,p.$$

Приведем разностную схему (4) к каноническому виду, тогда с учетом $y^{j+1}=y^j+\tau y_t^j$ получим

$$B\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau}+Ay^j=\varphi^j,\quad 0\le t=j\tau<t_0,\ j=0,1,2,...,j_0,$$

где $B=E+\bar\sigma\tau A\ge 0.5\tau A$ при $\bar\sigma=\sigma+\dfrac{\mu}{\tau}\ge 0.5$, если $\sigma\ge 0,\ \mu=\mu(\tau)$ стремится к нулю как и τ (т.е. $\mu=O(\tau),\mu\in(0,\tau]$), $\Lambda=-A$, $A=\sum\limits_{\alpha=1}^{p}A_\alpha,\ \ -A_\alpha y=(a_\alpha y_{\bar x_\alpha})_{x_\alpha}$, $E-$ единичный оператор.

Отметим, что для двухслойных схем в канонической форме $By_t+Ay^j=\varphi^j$ условия устойчивости следующие [см. 15, стр. 602]:

$$B>0,\ A=A^*>0,\ B\ge 0.5\tau A.$$

Пусть известно значение $y=y^j$ на $j-$м слое, требуется найти y^{j+1}. Для этого получаем уравнение

$$By^{j+1}=F^j,\quad F^j=(B-\tau A)\,y^j+\tau\varphi^j,\quad j=0,1,... \tag{6}$$

$$y^j\big|_{\gamma_h}=0,\quad y^0=u_0(x),$$

где F^j- известная правая часть, γ_h- граница сетки $\bar\omega_h$.

Факторизуем оператор $B=E+\tau\bar\sigma\,(A_1+A_2+...+A_p)$, т.е. запишем его факторизованным оператором

$$\widetilde B=B_1\cdot B_2\cdots B_p,\quad B_\alpha=E+\bar\sigma\tau A_\alpha.$$

и перейдем от исходной схемы (6) к факторизованной схеме

$$B_1\cdot B_2\cdots B_p y_t+Ay=\varphi^j, \tag{7}$$

где $\widetilde B=B_1\cdot B_2\cdots B_p=\big(E+\bar\sigma\tau\,(A_1+A_2+...+A_p)+\tau^2Q_p\big)=B+\tau^2Q_p\ge B$, $Q_p^*=Q_p\ge 0$.

Таким образом, $\widetilde B\ge B\ge E+0.5\tau A$, т.е. факторизованная схема (7) устойчива, если $\bar\sigma=\sigma+\dfrac{\mu}{\tau}\ge 0.5,\ \sigma\ge 0,\ \mu=O(\tau),\ A(t)=A^*(t)>0$ для всех $t\in\bar\omega_\tau$, $A(t)$ – непрерывен по Липшицу по t, $B(t)>0$ для всех $t\in\bar\omega_\tau$, $B(t)\ge 0.5\tau A(t)$ для всех $t\in\omega_\tau$ и существует оператор $B^{-1}(t)$.

Справедлива следующая [15, стр. 349].

Теорема 1. *Если выполнены условия* $0<c_0\le k_\alpha(x,t)\le c_1,\ \mu=const>0$, $\mu=O(\tau),\ \bar\sigma=\sigma+\dfrac{\mu}{\tau}\ge 0.5,\ \sigma\ge 0$, *существует оператор* $A^{-1}(t)$, *то для схемы (4)-(5) верна оценка*

$$\|y(t+\tau)\|_{A(t_j)}\le M\left(\|y^0\|_{A(0)}+\|\varphi^0\|_{A^{-1}(0)}+\|\varphi^j\|_{A^{-1}(t_j)}+\sum_{j'=0}^{j}\|\left(A^{-1}\varphi\right)_{\bar t_{j'}}\|_{A(t_{j'})}\tau\right),$$

где $\|y\|_A=\|y\|_{A(t)}=\sqrt{(A(t)y,y)},\ M,c_0,c_1=const>0.$

Очевидно, что $B_\alpha y^{j+1} = E + \bar{\sigma}\tau A_\alpha -$ трехточечные разностные операторы с переменными коэффициентами. Они являются экономичными так как уравнения

$$B_\alpha y^{j+1} = (E + \bar{\sigma}\tau A_\alpha)\, y^{j+1} = F^j, \quad \alpha = 1, 2, ..., p.$$

могут быть решены методом прогонки.

Факторизованная схема (7) сходится с первым порядком точности по τ, т.е. со скоростью $O(\tau)$.

2. Постановка задачи Б

Вместо уравнения (1) рассмотрим следующее псевдопараболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \frac{\partial}{\partial t} Lu - u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{8}$$

где $Lu = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u$, $L_\alpha u = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$, $0 < c_0 \le k_\alpha(x,t) \le c_1$, $\alpha = 1, 2, ..., p$.

Преобразуем уравнение (8), тогда умножая обе части уравнения (8) на e^t и интегрируя затем от 0 до t по τ, получаем

$$Lu - u = -F, \tag{9}$$

где $F = \int\limits_0^t e^{\tau - t} f(x,\tau)d\tau - (Lu_0(x) - u_0(x))\, e^{-t}$.

В той же области вместо уравнения (9) будем рассматривать следующее уравнение с малым параметром ε

$$\varepsilon u_t = \bar{L}u + F, \tag{10}$$

с краевыми и начальными условиями

$$u\Big|_\Gamma = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \bar{G} = G + \Gamma,$$

где $\bar{L}u = Lu - u$.

В виду того, что при $t = 0$ начальные условия для уравнения (8) и (10) совпадают, поэтому в окрестности $t = 0$ у производной u_t^ε не возникает особенности типа пограничного слоя [11], (см. [12], стр. 120).

Покажем теперь, что $u^\varepsilon \to u$ в некоторой норме при $\varepsilon \to 0$. Обозначим для этого через $\tilde{z} = u^\varepsilon - u$ и подставим $u^\varepsilon = \tilde{z} + u$ в задачу (10):

$$\varepsilon \tilde{z}_t = \bar{L}\tilde{z} + \tilde{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{11}$$

$$\tilde{z}\Big|_\Gamma = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

$$\tilde{z}(x,0) = 0, \quad x \in \overline{G}, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

где $\tilde{f}(x,t) = -\varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Получим энергетическое тождество, для чего умножим уравнение (11) скалярно на $\tilde{z}$:

$$\left(\varepsilon\tilde{z}_t,\tilde{z}\right)=\left(\bar{L}\tilde{z},\tilde{z}\right)+\left(\tilde{f}(x,t),\tilde{z}\right). \tag{12}$$

Будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$(u,v)=\int_G uvdx,\quad (u,u)=\|u\|_0^2,\quad \|u\|^2_{L_2(0,l_k)}=\int_0^{l_k}u^2(x,t)dx_k.$$

Далее через $M_i,\ i=1,2,...$ обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

Оценим слагаемые, входящие в (12):

$$\left(\varepsilon\tilde{z}_t,\tilde{z}\right)=\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2, \tag{13}$$

$$\left(\bar{L}\tilde{z},\tilde{z}\right)=\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\bar{L}_\alpha\tilde{z},\tilde{z}\right)=\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left(k_\alpha(x,t)\tilde{z}_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha},\tilde{z}\right)-\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\tilde{z},\tilde{z}\right)=$$

$$=-\sum_{\alpha=1}^{p}\left(k_\alpha(x,t)\tilde{z}_{x_\alpha},\tilde{z}_{x_\alpha}\right)-\sum_{\alpha=1}^{p}\left(1,\tilde{z}^2\right)\le -c_0\|\tilde{z}_x\|_0^2-\|\tilde{z}\|_0^2, \tag{14}$$

$$\left(\tilde{f}(x,t),\tilde{z}\right)\le\frac{1}{2}\|\tilde{z}\|_0^2+\frac{1}{2}\|\tilde{f}\|_0^2. \tag{15}$$

Учитывая преобразования (13)-(15), из ((12) получаем неравенство

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2+\|\tilde{z}\|_0^2+2c_0\|\tilde{z}_x\|_0^2\le\|\tilde{f}\|_0^2. \tag{16}$$

Проинтегрируем (16) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2+\|\tilde{z}\|^2_{2,Q_t}+\|\tilde{z}_x\|^2_{2,Q_t}\le M\int_0^t\|\tilde{f}\|_0^2d\tau=\varepsilon^2M\int_0^t\|u_\tau\|_0^2d\tau, \tag{17}$$

где $M-$ зависит только от входных данных задач (11), $\|\tilde{z}_x\|^2_{2,Q_t}=\int\limits_0^t\|\tilde{z}_x\|_0^2d\tau$.

Будем предполагать, что u_t есть ограниченная функция при $t\to 0$, т.е. в классе достаточно гладких функций $\varepsilon^2\int\limits_0^t\|u_\tau\|_0^2d\tau=O(\varepsilon^2)$. Тогда из априорной оценки (17) следует сходимость u^ε к u при $\varepsilon\to 0$ в норме $\|\tilde{z}\|_1^2=\varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2+\|\tilde{z}\|^2_{2,Q_t}+\|\tilde{z}_x\|^2_{2,Q_t}$. Поэтому при малом ε решение задачи (10) будем принимать за приближенное решение первой краевой задачи для псеводопараболического уравнения (8).

Построим для задачи (10) двухслойную разностную схему:

$$\varepsilon\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau}+A(\sigma y^{j+1}+(1-\sigma)y^j)=\varphi^j, \tag{18}$$

$$y^j\big|_{\gamma_h}=0,\quad y^0=u_0(x),$$

где $A > 0-$ самосопряженный оператор.

Приведем разностную схему (18) к каноническому виду, тогда с учетом $y^{j+1} = y^j + \tau y_t^j$ получим

$$By_t + Ay^j = \varphi^j,$$

где $B = \varepsilon E + \sigma\tau A \geq 0.5\tau A$ при $\sigma \geq 0.5$, $\varepsilon > 0$, $E-$ единичный оператор, $\Lambda = -A$, $A = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} A_\alpha$, $-A_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}$, $a_{\alpha,i_\alpha} = k_\alpha(x_{i_\alpha - \frac{1}{2}}, \bar{t})$, $\varphi_i^j = f(x_i, \bar{t})$, $\bar{t} = t_{j+\frac{1}{2}}$.

Пусть известно значение $y = y^j$ на $j-$м слое, требуется найти y^{j+1}, тогда получаем уравнение

$$By^{j+1} = F^j, \quad F^j = (B - \tau A)\, y^j + \tau\varphi, \quad j = 0, 1, ... \tag{19}$$

$$y^j\big|_{\gamma_h} = 0, \quad y^0 = u_0(x),$$

где F^j- известная правая часть, γ_h- граница сетки ω_h.

Факторизуем оператор $B = \varepsilon\left(E + \frac{\tau}{\varepsilon}\sigma\left(A_1 + A_2 + ... + A_p\right)\right)$, т.е. запишем его факторизованным оператором

$$\widetilde{B} = B_1 \cdot B_2 \cdots B_p, \quad B_\alpha = \varepsilon E + \sigma\tau A_\alpha$$

и перейдем от исходной схемы (19) к факторизованной схеме

$$B_1 \cdot B_2 \cdots B_p y_t + Ay = \varphi, \tag{20}$$

где

$$\widetilde{B} = B_1 \cdot B_2 \cdots B_p = \varepsilon\left(E + \sigma\frac{\tau}{\varepsilon}\left(A_1 + A_2 + ... + A_p\right) + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2}Q_p\right) = B + \frac{\tau^2}{\varepsilon}Q_p \geq B,$$

$$Q_p^* = Q_p \geq 0.$$

Таким образом, $\widetilde{B} \geq B \geq \varepsilon E + 0.5\tau A$, т.е. факторизованная схема (20) устойчива, если $\sigma \geq 0.5$, $A(t) = A^*(t) > 0$ для всех $t \in \bar{\omega}_\tau$, $A(t)-$ липшиц-непрерывен по t, $B(t) > 0$ для всех $t \in \bar{\omega}_\tau$, $B(t) \geq \varepsilon E + 0.5\tau A(t)$ для всех $t \in \omega_\tau$, $0 < \varepsilon \leq 1$.

Итак справедлива следующая [15, стр. 349]

Теорема 2. *Если выполнено условие* $0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1$, $\sigma \geq 0.5$, *то для схемы (18) верна оценка*

$$\|y(t+\tau)\|_{A(t)}^2 \leq M\left(\|y^0\|_{A(0)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j'=0}^{j}\|\varphi^{j'}\|^2\tau\right),$$

где $\|y\|_A = \|y\|_{A(t)} = \sqrt{(A(t)y, y)}$, $M, c_0, c_1 = const > 0$.

Факторизованная схема (20) сходится со скоростью $O\left(\frac{\tau}{\varepsilon} + \varepsilon\right)$.

Следствие 1. Если выбрать $\varepsilon = \sqrt{\tau}$, тогда факторизованная схема (20) сходится со скоростью $O(\sqrt{\tau})$, т.е. с порядком точности $\frac{1}{2}$ по τ.

3. Постановка задачи B

Уравнение (1) перепишем в виде уравнения с искусственной вязкостью [12]:

$$\varepsilon u_{tt} + u_t = Lu + \mu Lu_t + f(x,t), \tag{21}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \tag{22}$$

$$u\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{23}$$

где $Lu = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u$, $L_\alpha u = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$, $0 < c_0 \le k_\alpha(x,t) \le c_1$, $|k_{\alpha t}(x,t)| \le c_2$, $\varepsilon > 0$.

Покажем теперь, что решение u^ε задачи (21)-(23) стремится к решению u задачи (1)-(3) в некоторой норме при $\varepsilon \to 0$. Обозначим для этого через $\tilde z = u^\varepsilon - u$ и подставим $u^\varepsilon = \tilde z + u$ в задачу (21)-(23):

$$\varepsilon \tilde z_{tt} + \tilde z_t = L\tilde z + \mu L\tilde z_t + \tilde f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{24}$$

$$\tilde z(x,0) = 0, \quad \tilde z_t(x,0) = 0, \quad x \in \overline{G}, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$\tilde z\Big|_{\Gamma} = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

где $\tilde f(x,t) = -\varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Методом энергетических неравенств получим априорную оценку, для этого умножим уравнение (24) скалярно на $Z = \tilde z + \tilde z_t$:

$$\left(\varepsilon \tilde z_{tt}, Z\right) + \left(\tilde z_t, Z\right) = \left(L\tilde z, Z\right) + \mu\left(L\tilde z_t, Z\right) + \left(\tilde f(x,t), Z\right). \tag{25}$$

Оценим слагаемые, входящие в (25):

$$\left(\varepsilon \tilde z_{tt}, Z\right) = (\varepsilon \tilde z_{tt}, \tilde z + \tilde z_t) = (\varepsilon \tilde z_{tt}, \tilde z) + (\varepsilon \tilde z_{tt}, \tilde z_t) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\tilde z_t, \tilde z) - \varepsilon \|\tilde z_t\|_0^2 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde z_t\|_0^2, \tag{26}$$

$$\left(\tilde z_t, Z\right) = (\tilde z_t, \tilde z + \tilde z_t) = (\tilde z_t, \tilde z) + (\tilde z_t, \tilde z_t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde z\|_0^2 + \|\tilde z_t\|_0^2, \tag{27}$$

$$\left(L\tilde z, Z\right) = \left(L\tilde z, \tilde z + \tilde z_t\right) = \sum_{\alpha=1}^{p}\left(L_\alpha \tilde z, \tilde z + \tilde z_t\right) = \sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left(k_\alpha \tilde z_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha}, \tilde z + \tilde z_t\right) =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{p}\left(k_\alpha \tilde z_{x_\alpha}, \tilde z_{x_\alpha} + \tilde z_{x_\alpha t}\right) \le -c_0\|\tilde z_{x_\alpha}\|_0^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\sqrt{k_\alpha}\tilde z_{x_\alpha}\|_0^2 + M_1\|\tilde z_{x_\alpha}\|_0^2, \tag{28}$$

$$\mu\left(L\tilde z_t, Z\right) = \mu\left(L\tilde z_t, \tilde z + \tilde z_t\right) = \mu\sum_{\alpha=1}^{p}\left(L_\alpha \tilde z_t, \tilde z + \tilde z_t\right) = \mu\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left(k_\alpha \tilde z_{x_\alpha t}\right)_{x_\alpha}, \tilde z + \tilde z_t\right) =$$

$$= -\mu\sum_{\alpha=1}^{p}\left(k_\alpha \tilde z_{x_\alpha, t}, \tilde z_{x_\alpha} + \tilde z_{x_\alpha t}\right) \le -\mu c_0\|\tilde z_{x_\alpha t}\|_0^2 - \frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\sqrt{k_\alpha}\tilde z_{x_\alpha}\|_0^2 + M_2\|\tilde z_{x_\alpha}\|_0^2, \tag{29}$$

$$\left(\tilde{f}(x,t), Z\right) = \left(\tilde{f}(x,t), \tilde{z}+\tilde{z}_t\right) \leq \frac{1}{2}\|\tilde{z}_t\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2 + M_1\|\tilde{f}\|_0^2. \tag{30}$$

Учитывая преобразования (26)-(30), из (25) получаем неравенство

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}_t\|_0^2 + \frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2 + (1-2\varepsilon)\|\tilde{z}_t\|_0^2 + 2c_0\|\tilde{z}_{x_\alpha}\|_0^2 + 2\mu c_0\|\tilde{z}_{x_\alpha t}\|_0^2 + \frac{\mu+1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\sqrt{k_\alpha}\tilde{z}_{x_\alpha}\|_0^2 \leq$$

$$\leq -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{z}_t, \tilde{z}\right) + M_2\left(\|\tilde{z}_{x_\alpha}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2\right) + M_3\|\tilde{f}\|_0^2. \tag{31}$$

Проинтегрируем (31) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\varepsilon\|\tilde{z}_t\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2 + \frac{\mu+1}{2}c_0\|\tilde{z}_x\|_0^2 + 2c_0\|\tilde{z}_x\|_{2,Q_t}^2 + (1-2\varepsilon)\|\tilde{z}_t\|_{2,Q_t}^2 + 2\mu c_0\|\tilde{z}_{xt}\|_{2,Q_t}^2 \leq$$

$$\leq -\varepsilon\left(\tilde{z}_t, \tilde{z}\right) + M_2\int_0^t\left(\|\tilde{z}_{x_\alpha}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2\right)d\tau + M_3\int_0^t\|\tilde{f}\|_0^2 d\tau \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\|\tilde{z}_t\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\tilde{z}\|_0^2 + M_2\int_0^t\left(\|\tilde{z}_{x_\alpha}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2\right)d\tau + M_3\int_0^t\|\tilde{f}\|_0^2 d\tau,$$

где $\|\tilde{z}_x\|_{2,Q_t}^2 = \int\limits_0^t \|\tilde{z}_x\|_0^2 d\tau$.

Из последнего получаем

$$\varepsilon\|\tilde{z}_t\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{z}_t\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{z}_{xt}\|_{2,Q_t}^2 \leq$$

$$\leq M_4\int_0^t\left(\|\tilde{z}_{x_\alpha}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2\right)d\tau + M_5\int_0^t\|\tilde{f}\|_0^2 d\tau. \tag{32}$$

На основании леммы Гроноулла [16] из (32) получаем оценку

$$\varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{z}_t\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{z}_{xt}\|_{2,Q_t}^2 \leq$$

$$\leq M\int_0^t\|\tilde{f}\|_0^2 d\tau = \varepsilon^2 M\int_0^t\|u_{\tau\tau}\|_0^2 d\tau, \tag{33}$$

где $M-$ зависит только от входных данных задачи (24).

Будем предполагать, что u_{tt} есть ограниченная функция при $t \to 0$, т.е. в классе достаточно гладких функций $\varepsilon^2\int\limits_0^t\|u_{\tau\tau}\|_0^2 d\tau = O(\varepsilon^2)$. Тогда из априорной оценки (33) следует сходимость u^ε к u при $\varepsilon \to 0$ в норме $\|\tilde{z}\|_1^2 = \varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{z}_t\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{z}_{xt}\|_{2,Q_t}^2$. Поэтому при малом ε решение задачи (21)-(23) будем принимать за приближенное решение первой краевой задачи для псевдопараболического уравнения (1)-(3).

Соответствующая разностная схема для задачи (21)-(23) имеет вид:

$$\varepsilon y_{\bar{t}t} + y_{\overset{\circ}{t}} = \Lambda\Big(\sigma_1 y^{j+1} + (1-\sigma_1-\sigma_2)y + \sigma_2 y^{j-1}\Big) + \mu\Lambda y_{\overset{\circ}{t}} + \varphi^j, \tag{34}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad y_t(x,0) = u_1(x), \tag{35}$$

$$y\Big|_{\gamma,h} = 0, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad y = y^j, \quad \check{y} = y^{j-1}, \tag{36}$$

где

$$y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau}, \quad y_{\bar{t}t} = \frac{y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}}{\tau^2},$$

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha}\Big[a_{\alpha,i_\alpha+1}\frac{y_{i_\alpha+1} - y_{i_\alpha}}{h_\alpha} - a_{\alpha,i_\alpha}\frac{y_{i_\alpha} - y_{i_\alpha-1}}{h_\alpha}\Big],$$

$$a_{\alpha,i_\alpha} = k_\alpha(x_{i_\alpha-\frac{1}{2}}, \bar{t}),\ \varphi_i^j = f(x_i, \bar{t}),\ \bar{t} = t_{j+\frac{1}{2}}.$$

Уравнение (34) перепишем в виде:

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi^j, \tag{37}$$

$$y(0) = u_0(x), \quad y(\tau) = u_1(x),$$

где $B = E + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau A + \mu A$, $\quad R = \Big(\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}A + \dfrac{\varepsilon}{\tau^2}E\Big) > \frac{1}{4}A$, $E-$ единичный оператор, $\sigma_1 \geq \sigma_2 - \frac{1}{\tau\|A\|}$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 0,5$, $\Lambda = -A$, $A = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} A_\alpha$, $-A_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}$.

Разрешая (37) относительно y^{j+1}, находим

$$\Big(B + 2\tau R\Big)y^{j+1} = 2\tau(2R - A)y^j + (B - 2\tau R)y^{j-1} + 2\tau\varphi^j.$$

Отсюда видно, что для экономичности трехслойной схемы (37) надо,чтобы оператор $B + 2\tau R$ на верхнем слое был факторизован. Найдем оператор $B + 2\tau R$

$$B + 2\tau R = E + 2\sigma_1\tau A + \Big(\mu A + \frac{2\varepsilon}{\tau}E\Big). \tag{38}$$

Положим в (38) $\varepsilon = -0.5\mu\tau A$, $\mu = const > 0$, тогда получим

$$B + 2\tau R = E + \bar{\sigma}\tau A, \quad \bar{\sigma}_1 = 2\sigma_1.$$

Пусть теперь $A = A_1 + A_2$ (т. е. случай, когда $p = 2$), заменим тогда $B + 2\tau R$ факторизованным оператором

$$\tilde{B} + 2\tau\tilde{R} = \Big(E + \bar{\sigma}_1\tau A_1\Big)\Big(E + \bar{\sigma}_1\tau A_2\Big) = E + \bar{\sigma}_1\tau A + \bar{\sigma}_1^2\tau^2 A_1 A_2.$$

Таким образом, если $A = A(t) = A^*(t) > 0$, $R = R(t) = R^*(t) > 0-$ переменные операторы, $A(t), R(t)$ липшиц-непрерывные по t:

$$|((A(t) - A(t-\tau))\,v, v)| \leq \tau c_3\,(A(t-\tau)v, v)\,,$$

$$|((R(t) - R(t-\tau))\,v, v)| \leq \tau c_4\,(R(t-\tau)v, v)\,,$$

для всех v из конечномерного вещественного гильбертово пространства H, $0 < t < j_0\tau$, где $c_3, c_4 = const > 0$, не зависящие от h и τ, тогда условия

$$B = B(t) \geq 0, \quad \text{для всех } t \in \bar{\omega}_\tau,$$

$$R(t) \geq \frac{1}{4}A(t),$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 - \frac{1}{\tau\|A\|},\ \sigma_1 + \sigma_2 > 0,5$$

достаточны для устойчивости схемы (37) по начальным данным и правой части.

Итак, имеет место следующая (см. Теорема 6, [15, стр. 363])

Теорема 3. *Если* $0 < c_0 \le k_\alpha(x,t) \le c_1$, $\mu = const > 0$, $\sigma_1 \ge \sigma_2 - \frac{1}{\tau\|A\|}$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 0,5$ *и существует оператор* $A^{-1}(t)$, *тогда для схемы (34)-(36) имеет место оценка*

$$\|Y(t+\tau)\|_{(t)} \le M_1 \|Y(\tau)\|_{(0)} + M_2 \max_{\tau < t' \le t} \left(\|\varphi(t')\|_{A^{-1}(t')} + \|\varphi_{\bar t}(t')\|_{A^{-1}(t')} \right),$$

где $M_1, M_2 = const > 0$, *не зависящие от* h *и* τ *и выбора начальных данных* y^0, y^1 *и правой части* $\varphi(t)$, $c_0, c_1 = const > 0$,

$$\|Y(t+\tau)\|^2_{(t)} = \frac{1}{4}\Big(A(t)(y(t+\tau)+y(t)), y(t+\tau)+y(t)\Big) + \tau^2\Big(\Big(R(t) - \frac{1}{4}A(t)\Big)y_t, y_t\Big),$$

$$\|Y(\tau)\|^2_{(0)} = \frac{1}{4}\Big(A(0)(y(\tau)+y(0)), y(\tau)+y(0)\Big) + \tau^2\Big(\Big(R(0) - \frac{1}{4}A(0)\Big)y_t(0), y_t(0)\Big),$$

$$\varphi_{\bar t}(t') = \frac{\varphi(t') - \varphi(t'-\tau)}{\tau}.$$

Замечание 1. Если в (38) выбрать $\varepsilon = 0.5\tau$, тогда, выбирая $\mu = O(\tau)$, $\mu \in (0,\tau]$, получаем

$$B + 2\tau R = 2(E + \bar\sigma\tau A),$$

где $\bar\sigma_1 = \sigma_1 + \dfrac{\mu}{2\tau} \ge 0.5.$

Заключение

В работе изучены экономичные факторизованные схемы для псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами. При построении некоторых разностных схем воспользовались уравнением с искусственной вязкостью. На основе общей теории устойчивости для двухслойных и трехслойных разностных схем А.А. Самарского доказаны устойчивость и сходимость предлагаемых в работе разностных схем.

Список литературы

[1] Hallaire M. L'eau et la production vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique. 1964. № 9. Pp. 17–29.

[2] Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.

[3] Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 25, № 5. С. 852–864.

[4] Дзекцер Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Доклады Академии наук СССР. 1972. Т. 202, № 5. С. 1031–1033.

[5] Showalter R.E., Ting T.W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1970. № 1. Pp. 1–26.

[6] Colton D. Pseudoparabolic Equations in One Space Variable // Journal of Differential Equations. 1972. Vol. 12, № 3. Pp. 559–565.

[7] Шхануков М.Х. Об одном методе решения краевых задач для уравнения третьего порядка // Доклады Академии наук СССР. 1982. Т. 256, № 6. С. 1327–1330.

[8] Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальные свойства его решений // Доклады Академии наук СССР. 1982. Т. 267, № 3. С. 567–570.

[9] Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием Самарского А.А. для псевдопараболического уравнения высокого порядка // Доклады Академии наук СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.

[10] Бештоков М.Х. Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдо-параболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 10. С. 1780–1794.

[11] Бештоков М.Х. Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 12. С. 2021–2041.

[12] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1967. Т. 12, № 5. С. 3–122.

[13] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 439 с.

[14] Тхагапсоев Х.Г., Шхануков М.Х., Хапачев Б.С., Абрегов М.Х. Исследование контактной температуры при правке абразивных кругов алмазным инструментом // Сверхтвердые материалы. 1983. № 4. С. 44–49.

[15] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.

[16] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

Образец цитирования

Бештоков М.Х. Экономичные факторизованные схемы для псевдопараболических уравнений третьего порядка // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 3. С. 44–57. https://doi.org/10.26456/vtpmk622

Сведения об авторах

1. **Бештоков Мурат Хамидбиевич**
ведущий научный сотрудник отдела Вычислительных методов Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук.

Россия, 360000, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А. E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

ECONOMICAL FACTORIZED SCHEMES FOR THIRD-ORDER PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS

Beshtokov Murat Khamidbievich
Leading Researcher in the Department of Computational Methods,
Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
Russia, 360004, Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, 89A Shortanova str.
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Received 13.04.2021, revised 05.07.2021.

Economical factorized schemes for pseudo-parabolic equations of the third order are studied. On the basis of the general theory of stability of difference schemes, the stability and convergence of difference schemes are proved.

Keywords: boundary value problems, pseudoparabolic equation, stability and convergence of the scheme, economical factorized schemes.

Citation

Beshtokov M.K., "Economical factorized schemes for third-order pseudoparabolic equations", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 3, 44–57 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk622

References

[1] Hallaire M., "L'eau et la production vegetable", *Institut National de la Recherche Agronomique*, 1964, № 9, 17–29.

[2] Chudnovskij A.F., *Teplofizika pochv*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (in Russian), 352 pp.

[3] Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N., "Ob osnovnykh uravneniyakh filtratsii odnorodnykh zhidkostej v treshchinovatykh porodakh", *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **25**:5 (1960), 852–864 (in Russian).

[4] Dzektser E.S., "Generalization of the equation of motion of ground waters with a free surface", *Soviet Mathematics. Doklady*, **202**:5 (1972), 108–110.

[5] Showalter R.E., Ting T.W., "Pseudoparabolic partial differential equations", *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1970, № 1, 1–26.

[6] Colton D., "Pseudoparabolic Equations in One Space Variable", *Journal of Differential Equations*, **12**:3 (1972), 559–565.

[7] Shkhanukov M.Kh., "On a method for solving boundary value problems for a third-order equation", *Soviet Mathematics. Doklady*, **256**:6 (1982), 1327–1330 (in Russian).

[8] Shkhanukov M.Kh., "n some boundary value problems for a third-order equation and extremal properties of its solutions", *Soviet Mathematics. Doklady*, **267**:3 (1982), 567–570 (in Russian).

[9] Soldatov A.P., Shkhanukov M.Kh., "Boundary value problems with a general nonlocal condition Samarskii A.A. for a high-order pseudoparabolic equation", *Soviet Mathematics. Doklady*, **297**:3 (1987), 547–552 (in Russian).

[10] Beshtokov M.Kh., "Difference method for solving a nonlocal boundary value problem for a degenerating third-order pseudo-parabolic equation with variable coefficients", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**:10 (2016), 1763–1777.

[11] Beshtokov M.Kh., "Differential and Difference Boundary Value Problem for Loaded Third-Order Pseudo-Parabolic Differential Equations and Difference Methods for Their Numerical Solution", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **57**:12 (2017), 1973–1993.

[12] Vishik M.I., Lyusternik L.A., "Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter", *Uspekhi matematicheskikh nauk [Successes of mathematical sciences]*, **12**:5 (1967), 3–122 (in Russian).

[13] Godunov S.K., Ryabenkij V.S., *Raznostnye skhemy*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (in Russian), 439 pp.

[14] Tkhagapsoev Kh.G., Shkhanukov M.Kh., Khapachev B.S., Abregov M.Kh., "Investigation of contact temperature during dressing of abrasive wheels with a diamond tool", *Sverkhtverdye materialy [Superhard materials]*, 1983, № 4, 44–49 (in Russian).

[15] Samarskij A.A., *Teoriya raznostnykh skhem [Theory of Difference Schemes]*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (in Russian), 616 pp.

[16] Ladyzhenskaya O.A., *Kraevye zadachi matematicheskoj fiziki [Boundary value problems of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (in Russian), 407 pp.