УДК 517.54

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ЛОКАЛЬНО ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Баранова О.Е.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 06.06.2021, после переработки 01.07.2021.

Центральное место в теории конформных отображений занимает решение экстремальных задач на классах однолистных отображений. В известных классах нормированных голоморфных функций S и C решение «проблемы коэффициентов» связано с получением точных оценок модулей тейлоровских коэффициентов элементов классов. Аналогичные задачи ставятся для классов локально однолистных отображений. В.Г.Шеретов ввел в рассмотрение классы локально конформных отображений, генерируемых с помощью интегральных структурных формул из элементов классов S и C. В статье решена задача о точной оценке модуля тейлоровского коэффициента в этом классе.

Ключевые слова: локально однолистные функции, структурные формулы, оценки коэффициентов.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 3. С. 58–69.
https://doi.org/10.26456/vtpmk623

1. Введение

Класс C Каратеодори состоит из всех голоморфных и однолистных в единичном круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$ функций $h(z)$, принимающих значения в правой полуплоскости и нормированных условием $h(0) = 1$. Тейлоровские разложения этих функций в единичном круге имеют вид

$$h(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ..., \tag{1}$$

тейлоровские коэффициенты c_n удовлетворяют неравенствам $|c_n| \leq 2$, $n = 1, 2, ...$. Равенства в этих неравенствах достигаются на функциях

$$h_\theta(z) = \frac{1 - e^{i\theta} z}{1 + e^{i\theta} z}, \quad \theta \in [0; 2\pi],$$

отображающих единичный круг на правую полуплоскость.

Класс S состоит из всех голоморфных и однолистных в единичном круге Δ функций $f(z)$, нормированных условиями $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Тейлоровские разложения элементов класса в круге Δ имеют вид

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_n z^n + ..., \tag{2}$$

для коэффициентов (2) справедливы неравенства $|a_n| \leq n$, $n = 1, 2, ...$, равенства в которых достигаются на функциях Кебе

$$f_\alpha(z) = \frac{z}{(1+e^{i\alpha}z)^2}, \quad \alpha \in [0; 2\pi],$$

отображающих единичный круг на плоскость с разрезом по лучу с началом в точке $\frac{1}{4}e^{-i\alpha}$, не проходящему через начало координат.

В монографии [1] введены в рассмотрение класс $\tilde{S}$, образованный всеми локально однолистными голоморфными в единичном круге Δ функциями f, удовлетворяющими условиям $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, и его подкласс $\tilde{S}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, элементы $F^{(\alpha)}(z)$ которого генерируются с помощью структурной формулы

$$F^{(\alpha)}(z) = e^{-i\eta} \int\limits_0^{e^{i\eta}z} h^\alpha(t) \cdot f'(t)dt \tag{3}$$

из элементов $h \in C$, $f \in S$ при произвольном $\eta \in [0; 2\pi]$. Под знаком интеграла в (3) стоит однозначная ветвь аналитической функции h^α, принимающая значение 1 в начале координат.

При $\alpha = 0$ класс $\tilde{S}_\alpha$ совпадает с классом S. В [1] доказан критерий принадлежности функции классу $\tilde{S}_\alpha$.

1. Оценки тейлоровских коэффициентов элементов класса $\tilde{S}_\alpha$

В единичном круге Δ тейлоровские разложения элементов $F^{(\alpha)}(z) \in \tilde{S}_\alpha$ имеют вид

$$F^{(\alpha)}(z) = z + F_1^{(\alpha)}z + F_2^{(\alpha)}z^2 + ... + F_n^{(\alpha)}z^n + ...$$

В [1] получены оценки модулей тейлоровских коэффициентов при $\alpha = 1$ вида

$$|F_n^{(1)}| \leq \frac{2n^2+1}{3}, \quad n = 1, 2, ...$$

В [2] получены аналогичные неравенства для $\alpha = 2; 3; 4$.

В статье доказываются точные оценки модулей тейлоровских коэффициентов $F_n^{(\alpha)}$ для произвольного натурального значения α. Справедлива

Теорема. *Пусть* $F^{(m)}(z) \in \tilde{S}_m$, $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\left|F_n^{(m)}\right| \leq (-1)^m \left(\sum_{k=1}^{m} 2^k (-1)^k C_m^k \frac{(n+1)(n+2)\cdot ... \cdot(n+k)}{(k+2)!}(2n+k) + n \right).$$

Равенства в неравенствах достигаются для элементов $F^{(m)}(z)$, *генерируемых по формулам (3) из экстремалей* $h_\theta(z)$ *и* $f_\alpha(z)$ *классов* C *и* S, *т.е. для функций вида*

$$F^{(m)}(z) = e^{-i\eta} \int\limits_0^{e^{i\eta}z} \left(\frac{1-e^{i\theta}t}{1+e^{i\theta}t}\right)^m \cdot \left(\frac{t}{(1+e^{i\alpha}t)^2}\right)' dt, \quad \alpha, \theta \in [0; 2\pi].$$

2. Вспомогательные утверждения

Для вектора $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ определим оператор $\Sigma^{(p)}(x,n)$, действующий по правилу

$$\Sigma^{(0)}(x,n) = x_n, \quad \Sigma^{(1)}(x,n) = \sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1}, \quad \dots,$$
$$\Sigma^{(p)}(x,n) = \underbrace{\sum_{i_p=1}^{n} \sum_{i_{p-1}=1}^{i_p} ... \sum_{i_1=1}^{i_2}}_{p \text{ раз}} x_{i_1} = \sum_{i_p=1}^{n} \Sigma^{(p)}(x, i_p). \tag{4}$$

Лемма 1. *Для произвольных натуральных n и p справедливо равенство*

$$\Sigma^{(p)}(x,n) = C_{n+p-2}^{p-1} x_1 + C_{n+p-3}^{p-1} x_2 + C_{n+p-4}^{p-1} x_3 + ... C_p^{p-1} x_{n-1} + C_{p-1}^{p-1} x_n =$$
$$= \sum_{m=1}^{n} C_{n+p-m-1}^{p-1} x_m. \tag{5}$$

Доказательство проведем индукцией по p. При $p = 1$ равенство (5) верно. Пусть (5) выполнено для натурального p. Рассмотрим

$$\Sigma^{(p+1)}(x,n) = \underbrace{\sum_{i_{p+1}=1}^{n} \sum_{i_p=1}^{i_{p+1}} ... \sum_{i_1=1}^{i_2}}_{p+1 \text{ раз}} x_{i_1}.$$

Преобразования дают

$$\Sigma^{(p+1)}(x,n) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{i_p=1}^{i} ... \sum_{i_1=1}^{i_2}}_{p+1 \text{ раз}} x_{i_1} = \sum_{i=1}^{n} \Sigma^{(p)}(x,i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{i} C_{i+p-m-1}^{p-1} x_m = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=k}^{n} C_{i+p-k-1}^{p-1} \right) x_k = \sum_{k=1}^{n} A_k x_k.$$

Упростим вид коэффициентов A_k. Имеем

$$A_k = \sum_{i=k}^{n} C_{i+p-k-1}^{p-1} = C_{p-1}^{p-1} + C_p^{p-1} + C_{p+1}^{p-1} + ... + C_{n+p-k-1}^{p-1} =$$
$$= \frac{(p-1)!}{(p-1)!} \left(\frac{1}{0!} + \frac{p}{1!} + \frac{p(p+1)}{2!} + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!} + ... + \right.$$
$$\left. + \frac{p(p+1)(p+2) \cdot \dots \cdot (p+n-k-1)}{(n-k)!} \right) =$$
$$= \frac{p!}{p!} \left(\frac{p+1}{1!} + \frac{p(p+1)}{2!} + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!} + ... + \right.$$
$$\left. + \frac{p(p+1)(p+2) \cdot \dots \cdot (p+n-k-1)}{(n-k)!} \right) =$$

Последовательно складывая дроби, находим

$$A_k = \frac{p!}{p!}\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2!} + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!} + ... + \right.$$
$$\left. + \frac{p(p+1)(p+2)\cdot\dots\cdot(p+n-k-1)}{(n-k)!}\right) =$$
$$= \frac{p!}{p!}\left(\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3!} + \frac{p(p+1)(p+2)(p+4)}{4!} + ... + \right.$$
$$\left. + \frac{p(p+1)(p+2)\cdot\dots\cdot(p+n-k-1)}{(n-k)!}\right).$$

Продолжая эти преобразования, окончательно получим

$$A_k = \frac{p!}{p!}\left(\frac{(p+1)(p+2)\cdot ... \cdot(p+n-k-1)}{(n-k-1)!} + \frac{p(p+1)\cdot ... \cdot(p+n-k-1)}{(n-k)!}\right) =$$
$$= \frac{p!}{p!}\cdot\frac{(p+1)(p+2)\cdot ... \cdot(p+n-k)}{(n-k)!} = \frac{(p+n-k)!}{p!(n-k)!} = C^p_{p+n-k}.$$

Таким образом,

$$\Sigma^{(p+1)}(x,n) = \sum_{k=1}^{n} C^p_{p+n-k} x_k$$

и равенство (5) верно для натурального $p+1$. Тогда (5) справедливо для любого натурального p.

Для вектора $x^* = \{1^2, 2^2, ..., n^2\}$ обозначим

$$\Sigma^{(p)}(x^*, n) = \Sigma^{(p)}(n). \tag{6}$$

Лемма 2. *Для произвольных натуральных n и p справедливо равенство*

$$\Sigma^{(p)}(n) = \sum_{m=1}^{n} C^{p-1}_{n+p-m-1} m^2 = \frac{(n+p-1)(n+p)(2n+p)}{p(p+1)(p+2)} C^{p-1}_{n+p-2}. \tag{7}$$

Первое равенство в (7) следует из леммы 1, второе легко проверяется непосредственно или с использованием математического пакета Maple.

3. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы проведем индукцией по m.

Пусть $m = 1$. Для подынтегрального выражения в (3) с учетом (1) и (2) имеем

$$\begin{aligned} h(t)\cdot f'(t) &= \left(1 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1} + ...\right)\cdot \\ &\cdot \left(1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + ... + n a_{n-1} t^{n-1} + ...\right) = \\ &= 1 + \gamma_1^{(1)} t + \gamma_2^{(1)} t^2 + ... + \gamma_{n-1}^{(1)} t^{n-1} + ..., \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} &\gamma_0^{(1)} = 1, \quad \gamma_1^{(1)} = c_1 + 2a_2, \quad \gamma_2^{(1)} = c_2 + 2a_2 c_1 + 3a_3, \\ &\gamma_3^{(1)} = c_3 + 2a_2 c_2 + 3a_3 c_1 + 4a_4, \quad \dots, \\ &\gamma_{n-1}^{(1)} = c_{n-1} + 2a_2 c_{n-2} + 3a_3 c_{n-3} + ... + (n-1)a_{n-1} c_1 + n a_n, \quad \dots. \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда для $F^{(1)}(z) \in \tilde{S}_1$ имеем

$$F^{(1)}(z) = e^{-i\eta} \int\limits_0^{e^{i\eta}z} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_{k-1}^{(1)} t^{k-1}\right) dt = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_{k-1}^{(1)}}{k} e^{i(k-1)\eta} z^k.$$

Коэффициенты Тейлора этого ряда имеют вид

$$F_n^{(1)} = \frac{\gamma_{n-1}^{(1)}}{n} \cdot e^{i(n-1)\eta}, \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

где $\gamma_{n-1}^{(1)}$, $n = 1, 2, 3, ...$, находятся по формулам (9).

Оценим модули коэффициентов, используя неравенства для коэффициентов функций классов S и C. Получим

$$\left|F_1^{(1)}\right| = 1,$$

$$\left|F_n^{(1)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(1)}\right|}{n} \leq \frac{1}{n}\left(|c_{n-1}| + \sum_{k=2}^{n-1} k\,|a_k|\,|c_{n-k}| + n\,|a_n|\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\left(2 + 2\sum_{k=2}^{n-1} k^2 + n^2\right), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Таким образом,

$$\left|F_n^{(1)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(1)}\right|}{n} \leq \frac{1}{n}\left(2\sum_{k=1}^{n} k^2 - n^2\right), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Используя (6), обозначим $\Sigma^{(1)}(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ и перепишем последнее неравенство в виде

$$\left|F_n^{(1)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(1)}\right|}{n} \leq \frac{2\Sigma^{(1)}(n) - n^2}{n}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Отсюда находим

$$\left|\gamma_{n-1}^{(1)}\right| \leq 2\Sigma^{(1)}(n) - n^2, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{10}$$

Пусть $m = 2$. Для подынтегрального выражения в (3) с учетом (8) имеем

$$h^2(t) \cdot f'(t) = h(t) \cdot (h(t) \cdot f'(t)) =$$

$$= \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1} t^{n-1}\right) \cdot \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{n-1}^{(1)} t^{n-1}\right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{n-1}^{(2)} t^{n-1},$$

где

$$\begin{gathered} \gamma_0^{(2)} = 1, \quad \gamma_1^{(2)} = c_1 + \gamma_1^{(1)}, \quad \gamma_2^{(2)} = c_2 + c_1\gamma_1^{(1)} + \gamma_2^{(1)}, \quad \ldots, \\ \gamma_{n-1}^{(2)} = c_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-k}\gamma_{k-1}^{(1)} + \gamma_{n-1}^{(1)}, \quad \ldots. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда

$$F^{(2)}(z) = e^{-i\eta} \int\limits_0^{e^{i\eta}z} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_{k-1}^{(2)} t^{k-1}\right) dt = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_{k-1}^{(2)}}{k} e^{i(k-1)\eta} z^k.$$

Тейлоровские коэффициенты последнего ряда допускают оценки

$$\begin{aligned} &\left|F_1^{(2)}\right| = 1, \\ &\left|F_n^{(2)}\right| = \left|\frac{\gamma_{n-1}^{(2)}}{n} e^{i(n-1)\eta}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(2)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left(|c_{n-1}| + \sum_{k=2}^{n-1} |c_{n-k}| \left|\gamma_{k-1}^{(1)}\right| + \left|\gamma_{n-1}^{(1)}\right|\right) \le \\ &\qquad \le \frac{1}{n}\left(2 + 2\sum_{k=2}^{n-1} \left|\gamma_{k-1}^{(1)}\right| + \left|\gamma_{n-1}^{(1)}\right|\right) = \frac{1}{n}\left(2\sum_{k=1}^{n} \left|\gamma_{k-1}^{(1)}\right| - \left|\gamma_{n-1}^{(1)}\right|\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left|F_n^{(2)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(2)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left(2\sum_{k=1}^{n} \left|\gamma_{k-1}^{(1)}\right| - \left|\gamma_{n-1}^{(1)}\right|\right), n = 1, 2, ... \tag{12}$$

Используя (8), оценим правую часть (12) следующим образом:

$$\begin{aligned} \left|F_n^{(2)}\right| &= \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(2)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left(2\sum_{k=1}^{n}\left(2\Sigma^{(1)}(k) - k^2\right) - \left(2\Sigma^{(1)}(n) - n^2\right)\right) = \\ &= \frac{1}{n}\left(2^2 \sum_{k=1}^{n} \Sigma^{(1)}(k) - 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\Sigma^{(1)}(n) + n^2\right) = \\ &= \frac{1}{n}\left(2^2 \sum_{k=1}^{n} \Sigma^{(1)}(k) - 4\Sigma^{(1)}(n) + n^2\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left|F_n^{(2)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(2)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left(2^2 \sum_{k=1}^{n} \Sigma^{(1)}(k) - 4\Sigma^{(1)}(n) + n^2\right). \tag{13}$$

Отсюда

$$\left|\gamma_{n-1}^{(2)}\right| \le 2^2 \sum_{k=1}^{n} \Sigma^{(1)}(k) - 4\Sigma^{(1)}(n) + n^2 = 2^2\Sigma^{(2)}(n) - 4\Sigma^{(1)}(n) + n^2,\ n = 1, 2, ... \tag{14}$$

Повторяя рассуждения, проведенные выше, при $m = 3$ последовательно находим

$$\begin{aligned} &h^3(t) \cdot f'(t) = h(t) \cdot \left(h^2(t) \cdot f'(t)\right) = \\ &\qquad = \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1} t^{n-1}\right) \cdot \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{n-1}^{(2)} t^{n-1}\right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{n-1}^{(3)} t^{n-1}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_0^{(3)} = 2, \quad \gamma_1^{(3)} = c_1 + \gamma_1^{(2)}, \quad \gamma_2^{(3)} = c_2 + c_1\gamma_1^{(2)} + \gamma_2^{(2)}, \quad \ldots,$$
$$\gamma_{n-1}^{(3)} = c_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-k}\gamma_{k-1}^{(2)} + \gamma_{n-1}^{(2)}, \quad \ldots. \tag{15}$$

Тогда

$$F^{(3)}(z) = e^{-i\eta}\int\limits_0^{e^{i\eta}z}\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty}\gamma_{k-1}^{(3)}t^{k-1}\right) = z + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\gamma_{k-1}^{(3)}}{k}e^{i(k-1)\eta}z^k.$$

Тейлоровские коэффициенты последнего ряда допускают оценки

$$\left|F_1^{(3)}\right| = 1,$$
$$\left|F_n^{(3)}\right| = \left|\frac{\gamma_{n-1}^{(3)}}{n}e^{i(n-1)\eta}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(3)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left(|c_{n-1}| + \sum_{k=2}^{n-1}|c_{n-k}|\left|\gamma_{k-1}^{(2)}\right| + \left|\gamma_{n-1}^{(2)}\right|\right) \le$$
$$\le \frac{1}{n}\left(2 + 2\sum_{k=2}^{n-1}\left|\gamma_{k-1}^{(2)}\right| + \left|\gamma_{n-1}^{(2)}\right|\right) = \frac{1}{n}\left(2\sum_{k=1}^{n}\left|\gamma_{k-1}^{(2)}\right| - \left|\gamma_{n-1}^{(2)}\right|\right).$$

Таким образом,

$$\left|F_n^{(3)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(3)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left(2\sum_{k=1}^{n}\left|\gamma_{k-1}^{(2)}\right| - \left|\gamma_{n-1}^{(2)}\right|\right), \quad n = 1, 2, ... \tag{16}$$

С учетом (14) неравенства (16) примут вид

$$\left|F_n^{(3)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(3)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left[2\sum_{k=1}^{n}\left(2^2\sum_{m=1}^{k}\Sigma^{(1)}(m) - 4\Sigma^{(1)}(k) + k^2\right) - \right.$$
$$\left. -2^2\sum_{k=1}^{n}\Sigma^{(1)}(k) + 4\Sigma^{(1)}(n) - n^2\right]$$

или

$$\left|F_n^{(3)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(3)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left[2^3\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}\Sigma^{(1)}(m) - 12\sum_{k=1}^{n}\Sigma^{(1)}(k) + 6\Sigma^{(1)}(n) - n^2\right].$$

Окончательно получаем

$$\left|F_n^{(3)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(3)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left[2^3\Sigma^{(3)}(n) - 12\Sigma^{(2)}(n) + 6\Sigma^{(1)}(n) - n^2\right]. \tag{17}$$

Таким образом, неравенства (10), (13) и (17) можно записать в символическом виде

$$\left|F_n^{(1)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(1)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left(2\Sigma^{(1)}(n) - 1\right),$$

$$\left|F_n^{(1)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(2)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left(2\Sigma^{(1)}(n) - 1\right)^2,$$

$$\left|F_n^{(3)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(3)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left(2\Sigma^{(1)}(n) - 1\right)^3,$$

где $\Sigma^{(1)}(n)$ – оператор, определенный в (4). Покажем теперь, что для любого натурального m имеет место неравенство

$$\left|F_n^{(m)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(m)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left(2\Sigma^{(1)}(n) - 1\right)^m = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m} 2^{m-k}(-1)^k C_m^{m-k}\Sigma^{(m-k)}(n). \qquad (18)$$

Пусть неравенство (18) верно для $m-1$, т.е. выполнено

$$\left|F_n^{(m-1)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(m-1)}\right|}{n} \le \frac{1}{n}\left(2\Sigma^{(1)}(n) - 1\right)^{m-1}, \quad n = 1, 2, ... \qquad (19)$$

Отсюда имеем

$$\left|\gamma_{n-1}^{(m-1)}\right| \le \left(2\Sigma^{(1)}(n) - 1\right)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k 2^{m-1-k} C_{m-1}^{m-1-k}\Sigma^{(m-1-k)}(n). \qquad (20)$$

Пусть $F^{(m)}(z) = e^{-i\eta}\int\limits_0^{e^{i\eta}z} h^m(t)\cdot f'(t)dt$. Подынтегральное выражение разложим в ряд. Последовательно находим

$$h^m(t)\cdot f'(t) = h(t)\cdot\left(h^{m-1}(t)f'(t)\right) =$$
$$= \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-1}t^{k-1}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{k-1}^{(m-1)}t^{k-1}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{k-1}^{(m)}t^{k-1},$$

где

$$\gamma_0^{(m)} = 1, \quad \gamma_1^{(m)} = c_1 + \gamma_1^{(m-1)}, \quad \gamma_2^{(m)} = c_2 + c_1\gamma_1^{(m-1)} + \gamma_2^{(m-1)}, \quad \ldots,$$
$$\gamma_{n-1}^{(m)} = c_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-k}\gamma_{k-1}^{(m-1)} + \gamma_{n-1}^{(m-1)}, \quad \ldots. \qquad (21)$$

Тогда

$$F_m(z) = e^{-i\eta}\int\limits_0^{e^{i\eta}z}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{k-1}^{(m)}t^{k-1}\right)dt = z + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_{k-1}^{(m)}}{n}e^{i\eta(n-1)}z^n.$$

Для модулей коэффициентов с учетом (21) имеем

$$\left|F_n^{(m)}\right| = \frac{\left|\gamma_{n-1}^{(m)}\right|}{n} = \frac{1}{n}\left|c_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-k}\gamma_{k-1}^{(m-1)} + \gamma_{n-1}^{(m-1)}\right| \le$$
$$\le \frac{1}{n}\left(2\sum_{k=1}^{n}\left|\gamma_{k-1}^{(m-1)}\right| - \left|\gamma_{n-1}^{(m-1)}\right|\right), \quad n = 1, 2, ... \tag{22}$$

Используя (20) и (21), оценим правую часть (22). Преобразования дают

$$\left|F_n^{(m-1)}\right| \le \frac{1}{n}\left(2\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{m-1}(-1)^p 2^{m-1-p} C_{m-1}^{m-1-p}\Sigma^{(m-1-p)}(k) -\right.$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k 2^{m-1-k} C_{m-1}^{m-1-k}\Sigma^{(m-1-k)}(n)\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\left(2\sum_{k=1}^{n}\left(2^{m-1}C_{m-1}^{m-1}\Sigma^{(m-1)}(k) + \sum_{p=1}^{m-1}(-1)^p 2^{m-1-p}C_{m-1}^{m-1-p}\Sigma^{(m-1-p)}(k)\right) -\right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}2^{m-k}C_{m-1}^{m-k}\Sigma^{(m-k)}(n)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(2^m C_{m-1}^{m-1}\Sigma^{(m)}(n) + \sum_{p=1}^{m-1}(-1)^p 2^{m-p} C_{m-1}^{m-1-p}\Sigma^{(m-p)}(n) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k 2^{m-k}C_{m-1}^{m-k}\Sigma^{(m-k)}(n) + (-1)^m 2^0 C_{m-1}^0\Sigma^{(0)}(n)\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\left(2^m C_m^m \Sigma^{(m)}(n) + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k 2^{m-k}\left(C_{m-1}^{m-1-k} + C_{m-1}^{m-k}\right)\Sigma^{(m-k)}(n) + \right.$$
$$\left. + (-1)^m 2^0 C_m^0 \Sigma^{(0)}(n)\right) = \frac{1}{n}\left(2^m C_m^m\Sigma^{(m)}(n) + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k 2^{m-k}C_m^{m-k}\Sigma^{(m-k)}(n) + \right.$$
$$\left. + (-1)^m 2^0 C_m^0\Sigma^{(0)}(n)\right) = \frac{1}{n}\left(2\Sigma^{(1)}(n) - 1\right)^m.$$

Таким образом, для любых натуральных n и m справедливы неравенства

$$\left|F_n^{(m)}\right| \le \frac{1}{n}\left(2\Sigma^{(1)}(n) - 1\right)^m = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k 2^{m-k}C_m^{m-k}\Sigma^{(m-k)}(n)\right). \tag{23}$$

Выражения $\Sigma^{(m-k)}(n)$ запишем по формулам (7) леммы 2. Тогда (23) примет вид

$$\left|F_n^{(m)}\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m} 2^{m-k}(-1)^k C_m^{m-k}\frac{(n+m-k-1)(n+m-k)(2n+m-k)}{(m-k)(m-k+1)(m-k+2)}C_{n+m-k-2}^{m-k-1}.$$

Последнее слагаемое выпишем отдельно, а в оставшейся сумме поменяем индекс суммирования, заменяя $m-k$ на k. Тогда

$$\left|F_n^{(m)}\right| \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{m} 2^k(-1)^{m-k}C_m^k C_{n+k-2}^{k-1}\frac{(n+k-1)(n+k)(2n+k)}{k(k+1)(k+2)} + (-1)^m n^2\right) =$$
$$= \frac{(-1)^m}{n}\left(\sum_{k=1}^{m} 2^k(-1)^{k}C_m^k C_{n+k-2}^{k-1}\frac{(n+k-1)(n+k)(2n+k)}{k(k+1)(k+2)} + n^2\right).$$

Заметим, что

$$C_{n+k-2}^{k-1}\cdot\frac{(n+k-1)(2n+k)(n+k)}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+k-2)!(n+k-1)(2n+k)(n+k)}{(k-1)!(n-1)!k(k+1)(k+2)} =$$
$$= \frac{(n+k)!(2n+k)}{(k+2)!(n-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)}{(k+2)!}(2n+k).$$

Тогда

$$\left|F_n^{(m)}\right| \leq (-1)^m\left(\sum_{k=1}^{m} 2^k(-1)^k C_m^k \frac{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)}{(k+2)!}(2n+k) + n\right). \quad (24)$$

Равенства в (24) достигаются, когда неравенства (22) обращаются в равенства, т.е. для тех $F^{(m)}(z)$, которые получаются из экстремалей классов C и S по структурным формулам (3).

Заключение

В статье доказана теорема, дающая новые точные оценки сверху модулей тейлоровских коэффициентов элементов класса $\tilde{S}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$, зависящие от параметра класса. Рассмотрен случай, когда параметр класса принимает натуральные значения. Представляют интерес получение аналогичных результатов для случая произвольного действительного или комплексного значения параметра класса, решение подобных экстремальных задач на классах локально конформных отображений, порождаемых элементами подклассов S^* и S^0 звездных и выпуклых функций класса S и элементов класса Каратеодори C с помощью структурной формулы (3).

Список литературы

[1] Шеретов В.Г. Аналитические и геометрические свойства плоских отображений. Тверь: Тверской государственный университет, 2006. 328 с.

[2] Баранова О.Е., Голубович О.А. Оценки тейлоровских коэффициентов в классах локально однолистных отображений // Применение функционального анализа в теории приближений. 2006. № 36. С. 10–15.

Образец цитирования

Баранова О.Е. Решение одной экстремальной задачи в классе локально однолистных функций // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 3. С. 58–69. https://doi.org/10.26456/vtpmk623

Сведения об авторах

1. **Баранова Ольга Евгеньевна**
доцент кафедры математического анализа Тверского государственного университета.

170100, Россия, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Baranova.OE@tversu.ru

SOLVING ONE EXTREME PROBLEM IN A CLASS OF LOCALLY SINGLE-LEAF FUNCTIONS

Baranova Olga Evgenyevna
Associate Professor at Mathematical Analysis department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: Baranova.OE@tversu.ru

Received 06.06.2021, revised 01.07.2021.

The central place in the theory of conformal maps is occupied by the solution of extreme problems on classes of single-leaf maps. In the known classes of normalized holomorphic functions S and C, the solution of the "coefficient problem" is associated with obtaining accurate estimates of the modules of the Taylor coefficients of class elements. Similar problems are posed for classes of locally single-leaf mappings. V.G.Sheretov introduced classes of locally conformal mappings generated using integral structural formulas from elements of classes S and C. The article solves the problem of an accurate estimation of the modulus of the Taylor coefficient in this class.

Keywords: locally single-leaf functions, structural formulas, coefficient estimates.

Citation

Baranova O.Ye., "Solving one extreme problem in a class of locally single-leaf functions", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 3, 58–69 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk623

References

[1] Sheretov V.G., *Analiticheskie i geometricheskie svojstva ploskikh otobrazhenij*, Tver State University, Tver, 2006 (in Russian), 328 pp.

[2] Baranova O.E., Golubovich O.A., "Estimates of Taylor coefficients in classes of locally single-leaf maps", *Primenenie funktsionalnogo analiza v teorii priblizhenij [Application of functional analysis in approximation theory]*, 2006, № 36, 10–15 (in Russian).