УДК 510.676, 519.7

ЧАСТИЧНЫЕ СТЕПЕНИ БЫСТРОРАСТУЩИХ ФУНКЦИЙ

Солон Б.Я.
Ивановский государственный университет, г. Иваново

Поступила в редакцию 25.01.2022, после переработки 17.02.2022.

В статье вводится понятие быстрорастущей функции и рассматриваются частичные степени быстрорастущих функций. Частичные степени могут быть как тотальными, так и не тотальными. Вводится понятие е-быстрорастущей функции и доказывается, что частичные степени е-быстрорастущих функций не тотальны и разложимы.

Ключевые слова: частичные степени, квазиминимальные частичные степени, быстрорастущие функции, е-быстрорастущие функции.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 1. С. 53–68.
https://doi.org/10.26456/vtpmk630

Введение

Понятие алгоритмической сводимости функций, которая совпадала бы с Тьюринговой сводимостью на тотальных функциях, впервые было дано в монографии С. К. Клини "Введение в метаматематику". Уточнение этого понятия в терминах рекурсивных операторов, приведенное в монографии Х. Роджерса [4], позволило ввести в рассмотрение две наиболее широкие в интуитивном смысле алгоритмические сводимости функций: е-сводимость (сводимость по перечислимости) и се-сводимость. Эти понятия оказались столь же естественными, как Тьюрингова сводимость в ряде ситуаций, например, в теории групп и в вычислимой теории моделей. Начиная с работ Дж. Кейса [2] и М. Г. Розинаса [1], появилось большое количество работ, посвященных изучению степенных структур, пороженных данными сводимостями. Классы функций, взаимно е-сводимыми друг к другу, принято называть в терминологии Х. Роджерса частичными степенями. Так как се-сводимость функций 'сильнее' е-сводимости функций, то любая частичная степень состоит из некоторой совокупности се-степеней. Один из важных вопросов состоит в описании частичных степеней, которые состоят из более чем одной се-степени. Такие частичные степени называются разложимыми. Цель данной статьи — описание нового класса разложимых частичных степеней.

1. Основные определения и предварительные утверждения

Мы будем использовать понятия и терминологию, которые приняты в монографии [4]. Пусть $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел; A, B, $\dots$, X, Y (с индексами или без) — подмножества ω. Пусть, как обычно, $\langle x, y\rangle$ — канторовский номер упорядоченной пары (x, y). Если z — канторовский номер пары (x, y), то пусть $\langle z\rangle_1 = x$ и $\langle z\rangle_2 = y$. Пусть PF — множество одноместных частичных арифметических функций. Для данной частичной функции $\alpha : \omega \to \omega$ пусть $\mathrm{dom}(\alpha)$, $\mathrm{ran}(\alpha)$ и $\mathrm{graph}(\alpha) = \{\langle x, \alpha(x)\rangle : x \in \mathrm{dom}(\alpha)\}$ область определения, множество значений и график α, соответственно. Будем писать $\alpha(x)\downarrow$, если $x \in \mathrm{dom}(\alpha)$ и $\alpha(x)\uparrow$, если $x \notin \mathrm{dom}(\alpha)$. Для обозначения частичных функций из PF будем использовать малые греческие буквы начала алфавита: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Для данных частичных функций α и β через $\alpha \oplus \beta$ обозначим сочленение функций α и β, такое, что $\mathrm{dom}(\alpha\oplus\beta) = \mathrm{dom}(\alpha)\oplus\mathrm{dom}(\beta)$, если $x \in \mathrm{dom}(\alpha\oplus\beta)$ — четное, то $\alpha\oplus\beta(x) = \alpha(\frac{x}{2})$ и x — нечетное, то $\alpha\oplus\beta(x) = \beta(\frac{x-1}{2})$. Мы ограничим использование символов f, g, h только для обозначения *тотальных* функций, т. е. таких, что $\mathrm{dom}\, f = \omega$. Будем использовать терминологию Р. И. Соара, ставшей в последнее время общепринятой, и вместо термина 'частично рекурсивная функция' будем говорить 'частично вычислимая функция' (ч. в. функция), и вместо 'общерекурсивная функция' - 'вычислимая функция'.

Множество тотальных функций обозначим через TF. Если $\mathrm{graph}(\alpha) \subseteq \mathrm{graph}(\beta)$, то мы будем писать $\alpha \subseteq \beta$ для краткости. Множество A называется *однозначным*, если $A = \mathrm{graph}(\alpha)$ для некоторой частичной функции α. Пусть $\tau^{-1}(X) = \{(x, y) : \langle x, y\rangle \in X\}$, тогда для однозначного множества A имеем $\tau^{-1}(A) = \alpha$, где $A = \mathrm{graph}(\alpha)$ Обозначим через SV класс всех однозначных множеств. Мы будем отождествлять функции с их графиками. Термин *функциональный оператор* мы будем использовать в случае однозначных отображений $PF \to PF$ (не обязательно всюду определенных).

Определение 1. *Отображение*

$$\Phi_t : 2^\omega \to 2^\omega : \Phi_t(X) = \{x : (\exists u)[\langle x, u\rangle \in W_t \;\&\; D_u \subseteq X]\}$$

называется е-оператором с геделевым номером t.

Очевидно, что любой е-оператор Φ обладает свойствами:
(i) *Монотонности* $A \subseteq B \Rightarrow \Phi(A) \subseteq \Phi(B)$,
(ii) *Непрерывности* $(\forall x)[x \in \Phi(A) \Rightarrow (\exists D)[D \subset A \wedge x \in \Phi(D)]$.

Определение 2. *Функциональный оператор Ψ называется частично вычислимым, если он определяется некоторым е-оператором Φ_z, т. е. он определен на некотором множестве $F \subseteq PF$ и для любой функции $\alpha \in F$ имеет место равенство*

$$\Psi(\alpha) = \tau^{-1}(\Phi_z(\mathrm{graph}(\alpha))).$$

В этом случае будем считать, что Ψ имеет тот же номер, что и Φ_z, т. е. $\Psi = \Psi_z$.

Определение 3. *Ч. в. оператор Ψ называется вычислимым, если он определяется таким е-оператором Φ_z, что функциональный оператор $\Psi : PF \to PF$ является всюду определенным.*

Введем обозначения: $E = \{\Phi_z : z \in \omega\}$ — множество всех е-операторов; PC — множество всех частично вычислимых операторов; C — множество всех вычислимых операторов. В статье будем рассматривать две сводимости на PF:

$$\alpha \leq_e \beta \iff (\exists \Psi \in PC)[\alpha = \Psi(\beta)],$$
$$\alpha \leq_{ce} \beta \iff (\exists \Psi \in C)[\alpha = \Psi(\beta)].$$

Ранее эти сводимости были детально изучены в статье М. Г. Розинаса [1].

Как обычно, пусть $\deg_e(\alpha) = \{\gamma : \gamma \equiv_e \alpha\}$ — *функциональная e-степень* или *частичная степень* и $\deg_{ce}(\alpha) = \{\gamma : \gamma \equiv_{ce} \alpha\}$ — *ce-степень* функции α. Пусть $\mathbf{L}_e$ — ч.у. множество частичных степеней и $\mathbf{L}_{ce}$ — ce-степеней. Множество $\mathbf{L}_e(\leq\mathbf{a})$, где $\mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$, состоит из всех частичных степеней $\leq \mathbf{a}$.

Очевидно, что $\alpha \leq_{ce} \beta \to \alpha \leq_e \beta$ для любых $\alpha, \beta \in PF$, следовательно, любая частичная степень состоит из некоторого ч.у. множества ce-степеней. Обозначим через $\mathbf{L}_e^{ce}(\mathbf{a})$ ч.у. множество ce-степеней, содержащихся в частичной степени $\mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$. Частичная степень $\mathbf{a}$ называется *неразложимой* (на ce-степени), если $|\mathbf{L}_e^{ce}(\mathbf{a})| = 1$, в противном случае $\mathbf{a}$ называется *разложимой*.

Частичная степень (ce-степень) называется *тотальной*, если она содержит некоторую тотальную функцию. Ч.у. множество тотальных e-степеней обозначим через $\mathbf{TL}_e$, а тотальных ce-степеней — через $\mathbf{TL}_{ce}$.

Нам понадобятся следующие простые утверждения о соотношениях между сводимостями $\leq_e$ и $\leq_{ce}$. Здесь $\chi_A(x)$ — частичная характеристическая функция множества A.

Предложение 1. (i) $(\forall \alpha \in PF)(\forall f \in TF)[\alpha \leq_e f \iff \alpha \leq_{ce} f]$;
(ii) $(\forall A, B)[A \leq_e B \iff \chi_A \leq_{ce} \chi_B \iff \chi_A \leq_e \chi_B]$.

Обозначим через $\mathbf{TL}_e(\leq\mathbf{a}) = \{\deg_e(f) : f \leq_e \alpha\}$ частично упорядоченное отношением $\leq$. Ясно, что $\mathbf{TL}_e(\leq\mathbf{a})$ является верхней полурешеткой для любой функциональной степени $\mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$. Следующая теорема позволяет, в частности, утверждать, что если $|\mathbf{TL}_e(\leq\mathbf{a})| \geq 2$, то частичная степень $\mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$ разложима.

Теорема 1. *Для любой частичной степени* $\mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$ *верхняя полурешетка* $\mathbf{TL}_e(\leq\mathbf{a})$ *изоморфно вложима в* $\mathbf{L}_e^{ce}(\mathbf{a})$.

Доказательство. Если α — ч.в. функция, то $|\mathbf{TL}_e(\leq\mathbf{a})| = |\mathbf{L}_e^{ce}(\mathbf{a})| = 1$ и утверждение теоремы выполнено тривиально.

Пусть теперь α не является ч.в. функцией и $\deg_e(f) \in \mathbf{TL}_e(\leq\mathbf{a})$. Определим функцию $\beta^f(\langle x, y\rangle) = f(x)$, если $y \in \mathrm{graph}(\alpha)$, и $\beta^f(\langle x, y\rangle)\uparrow$ в противном случае. Ясно, что $\beta^f \leq_e \alpha$. С другой стороны,

$$(\forall y)[y \in \mathrm{graph}(\alpha) \iff (\exists x)(\exists z)[\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \in \mathrm{graph}(\beta^f)]],$$

поэтому $\alpha \leq_e \beta^f$. Итак, если $\deg_e(f) \in \mathbf{TL}_e(\leq\mathbf{a})$, то $\alpha \equiv_e \beta^f$ и $\deg_{ce}(\beta^f) \in \mathbf{L}_e^{ce}(\mathbf{a})$.

Определим отображение

$$\epsilon : \mathbf{TL}_e(\leq\mathbf{a}) \to \mathbf{L}_e^{ce}(\mathbf{a}) : \epsilon(\deg_e(f)) = \deg_{ce}(\beta^f).$$

Пусть $f \leq_e g$, в силу предложения 1 (i) в этом случае $f \leq_{ce} g$. Пусть Φ_n — e-оператор, определяющий вычислимый оператор и такой, что $\mathrm{graph}(f) = \Phi_n(\mathrm{graph}(g))$. Пусть z_0 — произвольный фиксированный элемент из $\mathrm{graph}(\alpha)$. Определим два e-оператора Υ' и Υ''. При входе $\langle\langle x, z_0\rangle, u\rangle$ оператор Υ'

дает выход $\langle x, u\rangle$, при входе $\langle\langle x, z\rangle, u\rangle$ при $z \neq z_0$ оператор Υ' не дает никакого выхода. Ясно, что $\Upsilon'(A) \in SV$ для любого однозначного множества A, т. е. Υ' определяет вычислимый оператор. В частности, так как

$$\mathrm{graph}(\beta^g) = \{\langle\langle x, y\rangle, g(x)\rangle : y \in \mathrm{graph}(\alpha)\},$$

то

$$\Upsilon'(\mathrm{graph}(\beta^g)) = \{\langle x, g(x)\rangle : x \in \omega\} = \mathrm{graph}(g).$$

Заметим, что, так как e-операторы Φ_n и Υ' определяют вычислимые операторы, то их композиция $\Phi_n * \Upsilon'$ также определяет вычислимый оператор. При этом

$$\Phi_n * \Upsilon'(\mathrm{graph}(\beta^g)) = \Phi_n(\mathrm{graph}(g)) = \mathrm{graph}(f).$$

Работу e-оператора Υ'' определяет следующая инструкция: на входе $\langle\langle x, y\rangle, u\rangle$ оператор дает выход y. Ясно, что $\Upsilon''(\mathrm{graph}(\beta^g)) = \mathrm{graph}(\alpha)$.

Теперь опишем работу e-оператора Φ_m: элементы произвольного множества A одновременно подаем на входы операторов $\Phi_n * \Upsilon'$ и Υ'', число $\langle\langle x, y\rangle, u\rangle$ является выходом оператора Φ_m, если $y \in \Upsilon''(A)$ и $\langle x, u\rangle \in \Phi_n * \Upsilon'(A)$. Ясно, что если $\Phi_n * \Upsilon'(A) \in SV$, то $\Phi_m(A) \in SV$, следовательно, Φ_m определяет вычислимый оператор. Непосредственно видно, что

$$\Phi_m(\mathrm{graph}(\beta^g)) = \{\langle\langle x, y\rangle f(x)\rangle : y \in \mathrm{graph}(\alpha)\} = \mathrm{graph}(\beta^f).$$

Следовательно, $\beta^f \leq_{ce} \beta^g$.

Обратно, пусть $\beta^f \leq_{ce} \beta^g$ и $\Psi(\beta^g) = \beta^f$ (для некоторого вычислимого оператора Ψ. Пусть $h(\langle x, y\rangle) = g(x)$. Ясно, что $h \equiv_e g$. Пусть $\eta = \Psi(h)$. Так как $\mathrm{graph}(\beta^g) \subset \mathrm{graph}(h)$, то $\mathrm{graph}(\beta^g) \subset \mathrm{graph}(\eta)$. Пусть z_0 — произвольный фиксированный элемент из $\mathrm{graph}(\alpha)$, тогда $\{\langle\langle x, z_0\rangle, f(x)\rangle : x \in \omega\} \subset \mathrm{graph}(\eta)$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{graph}(f) = \{\langle x, y\rangle : \langle\langle x, z_0\rangle, f(x)\rangle \in \mathrm{graph}(\eta)\}.$$

Это означает, что $f \leq_e \eta$, а так как $\eta \leq_e h$ и $h \equiv_e g$, то $f \leq_e g$.

Итак, доказано, что $f \leq_e g \iff \beta^f \leq_{ce} \beta^g$. Отсюда следует, что

$$\deg_e(f) \neq \deg_e(g) \to \epsilon(\deg_e(f)) \neq \epsilon(\deg_e(g),$$

следовательно, $\epsilon : \mathbf{TL}_e(\leq\mathbf{a}) \to \mathbf{L}_e^{ce}(\mathbf{a})$ — изоморфное вложение. □

Если $|\mathbf{TL}_e(\leq\mathbf{a})| = 1$, то частичные степени $\mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$ могут быть как разложимыми, так и неразложимыми. Ненулевые частичные степени $\mathbf{a}$, для которых $|\mathbf{TL}_e(\leq\mathbf{a})| = 1$, называются квазиминимальными.

Следующее предложение дает описание тотальных частичных степеней. Для краткости будем использовать символ c_γ для обозначения характеристической функции множества $\mathrm{graph}(\gamma)$.

Предложение 2. *Для любой частичной степени* $\mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\deg_e(\alpha) \in \mathbf{TL}_e$;

(ii) $(\exists\beta)[\beta \in \deg_e(\alpha) \wedge \overline{\mathrm{graph}(\beta)} \leq_e \mathrm{graph}(\beta)]$;

(iii) $(\exists\gamma)[\gamma \in \deg_e(\alpha) \wedge c_\gamma \in \deg_e(\alpha)]$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii): Так как $\underline{\deg_e(\alpha)} \in \mathbf{TL}_e$, то существует $f \in TF$, $\underline{\text{такая,}}$ что $f \in \deg_e(\alpha)$. Ясно, что $\overline{\text{graph}(f)} \leq_e \text{graph}(f)$. Заметим, что $\overline{\text{graph}(f)} = \{\langle x, y\rangle : y \neq f(x)\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Пусть $\beta \in \deg_e(\alpha) \wedge \overline{\text{graph}(\beta)} \leq_e \text{graph}(\beta)$ для некоторой функции $\beta \in PF$. В этом случае

$$\{\langle z, 0\rangle : z \in \overline{\text{graph}(\beta)}\} \cup \{\langle z, 1\rangle : z \in \text{graph}(\beta)\} \leq_e \text{graph}(\beta).$$

Тривиально, $\text{graph}(\beta) \leq_e \{\langle z, 0\rangle : z \in \overline{\text{graph}(\beta)}\} \cup \{\langle z, 1\rangle : z \in \text{graph}(\beta)\}$. Итак,

$$c_\beta \equiv_e \{\langle z, 0\rangle : z \in \overline{\text{graph}(\beta)}\} \cup \{\langle z, 1\rangle : z \in \text{graph}(\beta)\} \equiv_e \text{graph}(\beta).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Так как $c_\gamma \in TF$, то $\deg_e(\alpha) \in \mathbf{TL}_e$. □

2. e-быстрорастущие функции и их частичные степени

Введем основное определение статьи. Ранее термин, используемый в данном определении, не применялся для произвольных функций из PF.

Определение 4. *Частичная функция α называется быстрорастущей (б.р.), если для любой вычислимой функции g*

$$(\exists x)[\alpha(x)\downarrow \wedge\, \alpha(x) > g(x)].$$

Обозначим через **FG** множество всех частичных степеней, содержащих хотя бы одну б.р. функцию.

Лемма 1. *Если α — б.р. функция, то она не является (частично) вычислимой.*

Доказательство. Предположим, что $\alpha(x)$ — возрастающая ч.в. функция и для любой вычислимой функции $g(x)$ выполнено

$$(\exists x)[\alpha(x)\downarrow \wedge\, \alpha(x) > g(x)].$$

Пусть $\{x_n : n \in \omega\}$ — перечисление $\text{dom}(\alpha)$ без повторений. Определим функцию $h(n) = \alpha(x_n)$ для всех $n \in \omega$; ясно, что $h(n)$ — вычислимая функция. Поэтому

$$(\exists n)[\alpha(n)\downarrow \wedge\, \alpha(n) > h(n) = \alpha(x_n)].$$

Так как $n \leq x_n$ для всех $n \in \omega$, то $\alpha(n) \leq \alpha(x_n)$ — противоречие.

Если $\alpha(x)$ — не является возрастающей ч.в. функцией и является быстрорастущей функцией, то пусть $\beta(x)$ — произвольная возрастающая ч.в. функция, такая что $\text{dom}(\alpha) \subseteq \text{dom}(\beta)$ и $\alpha(x) \leq \beta(x)$ для всех $x \in \text{dom}(\alpha)$. Ясно, что тогда для функции $\beta(x)$ выполнено условие определения 4, поэтому имеем случай, рассмотренный в начале доказательства леммы. □

Определение 5. *Пусть ϵ — произвольная частичная функция. Частичная функция α называется ϵ-быстрорастущей (ϵ-б.р.), если для любой тотальной функции $g \leq_e \epsilon$ выполняется условие*

$$(\exists x)[\alpha(x)\downarrow \wedge\, \alpha(x) > g(x)].$$

В данной терминологии частичная функция α называется *е-быстрорастущей* (е-б.р.), если она α–б.р. Более точно,

Определение 6. *Частичная функция α называется е-б.р., если для любой тотальной функции $g \leq_e \alpha$ выполняется условие*

$$(\exists x)[\alpha(x)\downarrow \wedge \alpha(x) > g(x)].$$

Введем обозначения $\boldsymbol{\epsilon}$**FG** и **eFG** для частичных степеней, содержащих хотя бы одну, соответственно, ϵ-б.р. и е-б.р. функцию.

Существование ϵ-б.р. функций для любой функции $\epsilon \in PF$ дает теорема 2. Докажем существование е-б.р. функций.

Предложение 3. *Для любой функции $\beta \in PF$ существует е-б.р. функция γ, такая, что $\beta <_e \gamma$.*

Доказательство. Пусть $f_0, f_1 \ldots, f_n, \ldots$ — все тотальные функции, сводящиеся к β. Построим функцию γ по шагам так, чтобы были удовлетворены следующие требования:

(S): $\beta <_e \gamma$;

(eFG): $(\forall f)[f \leq_e \gamma \rightarrow (\exists x)[\gamma(x)\downarrow \wedge \gamma(x) > f(x)]]$,

где f — переменная для тотальных функций. Ясно, что если требование (eFG) будет удовлетворено, то по определению 6 γ является е-б.р.

Обозначим через α_t конечную функцию (т. е. $|\operatorname{dom}(\alpha)| < \infty$), построенную к концу шага t. Пусть σ — переменная для конечных функций, будем писать $\alpha_t \subset_p \sigma$, если $\operatorname{graph}(\alpha_t) \subset \operatorname{graph}(\sigma)$ и

$$(\forall x)(\forall y)[x \in \operatorname{dom}(\alpha_t) \wedge y \in (\operatorname{dom}(\sigma) - \operatorname{dom}(\alpha_t)) \rightarrow x < y].$$

Шаг 0. Полагаем $\operatorname{dom}(\alpha_0) = \emptyset$.

Шаг $t+1$. Пусть $z_t = 1 + \max(\operatorname{dom}(\alpha_t))$. Последовательно проверим следующие условия и после определения α_{t+1} переходим к следующему шагу.

$$t = 3n. \tag{1}$$

Полагаем $\operatorname{graph}(\alpha_{t+1}) = \operatorname{graph}(\alpha_t) \cup \{\langle z_t, f_n(2z_t) + 1\rangle\}$.

$$t = 3n + 1. \tag{2}$$

$$\langle 2z_t, 0\rangle \in \Psi_n(\beta). \tag{2.1}$$

Полагаем $\operatorname{graph}(\alpha_{t+1}) = \operatorname{graph}(\alpha_t) \cup \{\langle z_t + 1, 0\rangle\}$.

$$\langle 2z_t, 0\rangle \notin \Psi_n(\beta). \tag{2.2}$$

Полагаем $\operatorname{graph}(\alpha_{t+1}) = \operatorname{graph}(\alpha_t) \cup \{\langle z_t, 0\rangle\}$.

$$t = 3n + 2. \tag{3}$$

$$(\exists \sigma)[\alpha_t \subset_p \sigma \wedge \Phi_n(\operatorname{graph}(\sigma \oplus \beta)) \notin SV]. \tag{3.1}$$

Полагаем $\alpha_{t+1} = \sigma^*$, где конечное множество graph(σ^*) имеет наименьший канонический индекс среди σ, удовлетворяющих условию (3.1). Если не выполнено условие (3.1), то имеет место

$$(\forall\sigma)[\alpha_t \subset_p \sigma \to \Phi_n(\mathrm{graph}(\sigma \oplus \beta)) \in SV]. \tag{3.2}$$

В этом случае проверим выполнимость условия

$$(\exists x)(\exists\sigma)[\alpha_t \subset_p \sigma \wedge \Psi_n(\sigma \oplus \beta)(2x){\downarrow} \wedge \sigma(x){\downarrow} \wedge \Psi_n(\sigma \oplus \beta)(2x) < \sigma(x)]. \tag{3.3}$$

Полагаем $\alpha_{t+1} = \sigma^*$, где конечное множество graph(σ^*) имеет наименьший канонический индекс среди σ, удовлетворяющих условию (3.3) для наименьшего x.

Если не выполнены условия (3.1) и (3.3), то возможны еще два взаимоисключающих друг друга случая:

$$(\exists x)(\exists\sigma_1)(\exists\sigma_2)[\alpha_t \subset_p \sigma_1 \wedge \alpha_t \subset_p \sigma_2 \wedge \Psi_n(\sigma_1 \oplus \beta)(x){\downarrow} \wedge \Psi_n(\sigma_2 \oplus \beta)(x){\downarrow} \wedge \\ \Psi_n(\sigma_1 \oplus \beta)(x) \neq \Psi_n(\sigma_2 \oplus \beta)(x)]. \tag{3.4}$$

Обозначим через $u = \max(\mathrm{graph}(\sigma_1^*) \cup \mathrm{graph}(\sigma_2^*))$, где graph$(\sigma_1^*)$ и graph(σ_2^*) имеют наименьшие канонические индексы среди σ_1 и σ_2, удовлетворяющих условию (3.4) для наименьшего x. Полагаем

$$\mathrm{graph}(\alpha_{t+1}) = \mathrm{graph}(\alpha_t) \cup \{\langle u+1, 0\rangle\}.$$

Наконец, если не выполняется и условие (3.4), то

$$(\forall x)(\forall\sigma_1)(\forall\sigma_2)[\alpha_t \subset_p \sigma_1 \wedge \alpha_t \subset_p \sigma_2 \wedge \Psi_n(\sigma_1 \oplus \beta)(x){\downarrow} \wedge \Psi_n(\sigma_2 \oplus \beta)(x){\downarrow} \to \\ \Psi_n(\sigma_1 \oplus \beta)(x) = \Psi_n(\sigma_2 \oplus \beta)(x)]. \tag{3.5}$$

Полагаем в этом случае $\alpha_{t+1} = \alpha_t$.

Описание конструкции закончено. Из построения следует, что $\alpha_t \subseteq \alpha_{t+1}$ для всех $t \in \omega$. Пусть $\alpha = \bigcup_{t\in\omega} \alpha_t$ и $\gamma = \alpha \oplus \beta$. Докажем, что функция удовлетворяет требованиям (S) и (eFG).

Непосредственно из определения функции γ следует, что $\beta \leq_e \gamma$. Допустим, что $\gamma \leq_e \beta$, тогда $\gamma = \Psi_n(\beta)$ для некоторого n. Рассмотрим шаг $t+1$, где $t = 3n+1$. Если при этом имел место случай (2.1), то $\langle 2z_t, 0\rangle \in \Psi_n(\beta)$ и

$$\langle z_t, 0\rangle \notin \mathrm{graph}(\alpha) \to \langle 2z_t, 0\rangle \notin \mathrm{graph}(\gamma).$$

При выполнении условия (2.2) имеем $\langle 2z_t, 0\rangle \notin \Psi_n(\beta)$, но конструкция обеспечивает

$$\langle z_t, 0\rangle \in \mathrm{graph}(\alpha) \to \langle 2z_t, 0\rangle \in \mathrm{graph}(\gamma).$$

Следовательно, $\gamma \neq \Psi_n(\beta)$ и $\gamma \not\leq_e \beta$ и требование (S) удовлетворено.

Пусть теперь тотальная функция $f \leq_e \gamma$, тогда $f = \Psi_n(\gamma)$ для некоторого n. Рассмотрим шаг $t+1$, где $t = 3n+2$. Условие (3.1) не могло выполняться, так как graph(f) — однозначное множество. Если выполняется условие (3.3), то для некоторого x

$$f(2x) = \Psi_n(\sigma \oplus \beta)(2x) < \sigma^*(x) = \alpha(x) = \gamma(2x),$$

и требование (eFG) удовлетворено. Случай (3.4) не мог иметь место, так как в противном случае $\Psi_n(\sigma \oplus \beta)(x)$ не определено, а по нашему предположению $f = \Psi_n(\gamma) = \Psi_n(\alpha \oplus \beta)$ — тотальная функция. В самом деле, допустим, что $\Psi_n(\alpha\oplus\beta)(x)\downarrow$, тогда функцию α вместе с σ_1^* и σ_2^* можно использовать для построения конечной функции σ, такой, что $\alpha_t \subset_p \sigma$, для которой множество $\Psi_n(\alpha \oplus \beta)$ неоднозначно. Это противоречит результату проверки случая (3.1).

Наконец, пусть выполнено (3.5), тогда все значения функции $\Psi_n(\alpha\oplus\beta)(x)$ можно эффективно вычислить, подставляя в Ψ_n всевозможные функции вида $\sigma \oplus \beta$, где $\alpha_t \subset_p \sigma$. Это означает, что

$$\Psi_n(\alpha \oplus \beta) = \Psi_n(\gamma) \leq_e \beta.$$

В этом случае существует такое m, что $f_m = \Psi_n(\gamma)$. Тогда на некотором шаге $t+1$, где $t = 3m$, функция α была определена таким образом, что

$$\gamma(2z_t)\downarrow \wedge\, \gamma(2z_t) = \alpha(z_t) = f_m(2z_t) + 1 > f_m(2z_t).$$

Следовательно, требование (eFG) удовлетворено и в этом случае. Итак, предложение полностью доказано. □

Следствие 1. *Существуют быстрорастущие квазиминимальные функции.*

Доказательство. Пусть β — произвольная квазиминимальная функция и γ — e-б.р. функция из предложения 3, такая, что $\beta <_e \gamma$. Из доказательства предложения 3 следует, что если тотальная функция $f \leq_e \gamma$, то $f \leq_e \beta$. Так как β — квазиминимальная функция, то любая $f \leq_e \beta$ является вычислимой функцией. Следовательно, γ — быстрорастущая квазиминимальная функция. □

Простейшие свойства ϵ–б.р. и e-б.р. функций перечислены в следующем предложении. Сначала введем еще одно определение.

Определение 7. *Тотальная функция g мажорируема относительно функции $\alpha \in PF$, если существует тотальная функция $f \leq_e \alpha$, такая, что $(\forall x)[g(x) \leq f(x)]$.*

Предложение 4. *Для любой функции $\epsilon \in PF$,*

(i) *если α — ограниченная функция, то α не является ϵ-б.р.;*

(ii) *если α — e-б.р. функция, то $\deg_e(\alpha)$ — нетотальная частичная степень;*

(iii) *возрастающая функция α e-б.р. тогда и только тогда, когда любая тотальная инъективная функция g, для которой $\operatorname{ran}(g) = \operatorname{ran}(\alpha)$ не мажорируема относительно функции α;*

(iv) *любая e-б.р. и ϵ-б.р. для любой $\epsilon \in PF$ функция является б.р.*

Доказательство. (i). Если $\alpha \in PF$ — ограниченная функция, то существует функция-константа $k = k(x)$, такая, что $(\forall x)[\alpha(x)\downarrow \to \alpha(x) \leq k(x)]$. Ясно, что k — вычислимая функция и, следовательно, $k \leq_e \alpha$. Из определения 5 следует, что α не является ϵ-б.р. функцией.

(ii). Пусть α — e-б.р. функция, предположим, что $\deg_e(\alpha)$ — тотальная частичная степень. В силу предложения 3 (iii) в этом случае

$$(\exists \gamma \in PF)[\gamma \in \deg_e(\alpha) \wedge c_\gamma \in \deg_e(\alpha)],$$

где $c_\gamma(x)$ — характеристическая функция множества $\mathrm{graph}(\gamma)$. Пусть $\alpha = \Psi_n(c_\gamma)$ для некоторого n. Так как $c_\gamma(x)$ — тотальная функция, то из любого пересчета множества $\mathrm{graph}(c_\gamma)$ можно с помощью подходящего оператора перечисления получить пересчет в естественном порядке $\langle 0, c_\gamma(0)\rangle$, $\langle 1, c_\gamma(1)\rangle$, ... В этом случае получим некоторое фиксированное перечисление множества $\mathrm{graph}(\alpha)$ с помощью е-оператора Φ_n, определяющего Ψ_n.

Обозначим через $a_k = \langle x_k, \alpha(x_k)\rangle$ k-ый член перечисления $\mathrm{graph}(\alpha)$. Определим тотальную функцию $g(k) = \max\{\alpha(x_0), \ldots, \alpha(x_k)\}$ для всех $k = 0, 1, \ldots$ Докажем, что

$$g \leq_e \alpha \wedge (\forall x)[\alpha(x)\downarrow \rightarrow \alpha(x) \leq g(x)].$$

Заметим, что $k \leq x_k$ для всех k, а равенство $k = x_k$ возможно лишь в том случае, когда $\langle 0, \alpha(0)\rangle, \langle 1, \alpha(1)\rangle \ldots, \langle k, \alpha(k)\rangle$ — первые $k+1$ члены прямого пересчета множества $\mathrm{graph}(\alpha)$. Из определения функции g непосредственно следует, что $g \leq_e \alpha$ и для всех k

$$\alpha(x_k) \leq g(k).$$

Так как g по определению — неубывающая функция, поэтому

$$(\forall k)[k \leq x_k \rightarrow g(k) \leq g(x_k)].$$

Следовательно, $\alpha(x_k) \leq g(k) \leq g(x_k)$ для всех k. Это означает, что существует тотальная функция $g \leq_e \alpha$, такая, что

$$(\forall x)[\alpha(x)\downarrow \rightarrow \alpha(x) \leq g(x)],$$

что противоречит условию предложения.

(iii). $\Leftarrow$: Пусть $\alpha \in PF$ — данная функция и $g(n) = a_n$, $n \in \omega$, где a_n — n-ый член прямого пересчета множества $\mathrm{ran}(\alpha)$ и $a_n = \alpha(x_n)$. Тогда g — тотальная инъективная функция, для которой $\mathrm{ran}(g) = \mathrm{ran}(\alpha)$. По условию, g не мажорируема относительно функции α, потому для любой тотальной функции $f \leq_e \alpha$ существует такое n, что $g(n) = a_n > f(n)$. Так как

$$(\forall x)[\alpha(x)\downarrow \rightarrow (\exists n)[\alpha(x) = \alpha(x_n)],$$

то в результате получаем

$$(\forall f)[f \leq_e \alpha \rightarrow (\exists x)[\alpha(x)\downarrow \wedge \alpha(x) > f(x)]],$$

т. е. α является е-б.р. функцией.

$\Rightarrow$: Пусть α — е-б.р. функция и $g : \omega \rightarrow \mathrm{ran}(\alpha)$ — тотальная инъективная функция. Допустим, что g мажорируема относительно функции α, т. е. существует тотальная функция $f \leq_e \alpha$, такая, что $(\forall x)[g(x) \leq f(x)]$. Определим функцию $p(x) = \max\{f(y) : y \leq x\}$ для всех x. Очевидно, что $p \leq_e f \leq_e \alpha$ и p — неубывающая функций. Покажем, что $a_n \leq p(n)$ для всех n.

Допустим, что $a_{n_0} > p(n_0)$ для некоторого n_0, тогда при любом $y \leq n_0$ имеем $g(y) \leq f(y) \leq p(n_0) < a_{n_0}$. Поэтому $g(x_0), \ldots, g(x_{n_0})$ — (n_0+1) различных элементов множества $\mathrm{ran}(\alpha)$ (напомним, что g — инъективная функция), меньших a_{n_0}, что невозможно, так множество $\mathrm{ran}(\alpha)$ может иметь только n_0 таких элементов. Итак, $a_n \leq p(n)$ для всех n. Докажем, что в этом случае $(\forall x)[\alpha(x)\downarrow \rightarrow \alpha(x) \leq p(x)]$.

Пусть $\alpha(x)$ определено, тогда $x = x_n$ для некоторого n. Так как $\alpha(x)$ — возрастающая функция, то $n \leq x_n$ для всех n. В результате имеем

$$\alpha(x) = \alpha(x_n) = a_n \leq p(n) \leq p(x_n) = p(x).$$

Итак, $p \leq_e \alpha \wedge (\forall x)[\alpha(x)\downarrow \to \alpha(x) \leq p(x)]$. Это означает, что α не является e-б.р. функцией. Следовательно, любая тотальная инъективная функция g, для которой $\mathrm{ran}(g) = \mathrm{ran}(\alpha)$, не мажорируема относительно функции α.

(iv). Если α — ϵ-б.р. (e-б.р.) частичная функция, то, в частности, для любой вычислимой функции f выполнено

$$f \leq_e \alpha \wedge (\exists x)[\alpha(x)\downarrow \wedge \alpha(x) > f(x)],$$

т. е. α — б.р. частичная функция. □

В то время, когда любая частичная степень, содержащая e-б.р. функцию, нетотальна, существуют тотальные частичные степени, содержащие б.р. функции. Это следует из свойства частичных степеней наследовать вверх свойство содержать б.р. функции.

Предложение 5. *Если $\alpha \leq_e \beta$ и α — б.р., то существует б.р. функция γ, такая что $\beta \equiv_e \gamma$.*

Доказательство. Пусть α — б.р. и $\alpha \leq_e \beta$. Из определения следует, что для любой вычислимой функции g неверно, что $(\forall x)[\alpha(x)\downarrow \to \alpha(x) \leq g(x)]$. Рассмотри функцию $\gamma(x) = \alpha(x) \oplus \beta(x)$. Ясно, что $\gamma \equiv_e \beta$. Докажем, что $\gamma(x)$ является б.р. функцией.

Предположим, что для некоторой вычислимой g выполнено

$$(\forall x)[\gamma(x)\downarrow \to \gamma(x) \leq g(x)].$$

Тогда $(\forall x \in \mathrm{dom}(\alpha))[\alpha(x) = \gamma(2x) \leq g(2x)]$. Пусть $f(x) = g(\frac{x}{2})$, если x — четное, и $f(x) = 0$, если x — нечетное. Ясно, что f — вычислимая функция и

$$(\forall x)[\alpha(x)\downarrow \to \alpha(x) \leq f(x)],$$

что противоречит тому, что α — б.р. функция. □

Заметим, что из предложения 5 следует, что существуют как тотальные так и нетотальные частичные степени, содержащие б.р. функции. Можно доказать, что и тех и других частичных степеней несчетное множество.

Теорема 2. *Для любой $\epsilon \in PF$ существует счетный набор ϵ-б.р. частичных функций $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$, таких, что*

$$(\forall k, l)[k \neq l \to \alpha_k \not\leq_e \alpha_l].$$

Доказательство. Пусть $\epsilon \in PF$ данная частичная функция. Построим по шагам множества $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots$ так, чтобы были удовлетворены следующие требования для всех k, l

(ϵFG_k): α_k — ϵ-быстрорастущая функция;

$(V_{k,l})$: $\quad k \neq l \to \alpha_k \not\leq_e \alpha_l$.

Опишем конструкцию для построения последовательности $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ Обозначим через α_{k_t} начальный сегмент функции α_k, построенный к началу шага $t+1$. Пусть σ — переменная для конечных функций, запись $\alpha_{k_t} \subset_p \sigma$ означает то же, что и в предложении 3. Построение будем вести таким образом, чтобы для всех k, t выполнялось $\alpha_{k_t} \subset_p \alpha_{k_{t+1}}$. Полагаем $\alpha_k = \bigcup_{t\in\omega} \alpha_{k_t}$ для всех k.

Шаг 0. Полагаем $\alpha_{k_0} = \emptyset$ и $z_{k_0} = 0$ для всех k.

Шаг $t+1$. Пусть $t = \langle k, l, s\rangle$ и $z_{k_t} = 1 + \max(\mathrm{dom}(\alpha_{k_t}))$. Последовательно проверим приведенные ниже условия, и после определения $\alpha_{k_{t+1}}$ и $\alpha_{l_{t+1}}$ переходим к шагу $t+2$.

$$s = 2n \tag{1}$$

Пусть $g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots$ — все тотальные функции, e-сводящиеся к ϵ. Полагаем

$$\alpha_{k_{t+1}}(z_{k_t}) = g_n(z_{k_t}) + 1.$$

$$s = 2n+1 \tag{2}$$

$$(\exists\sigma)[\alpha_{l_t} \subset_p \sigma \wedge \Phi_n(\mathrm{graph}(\sigma)) \notin SV]. \tag{2.1}$$

Если (2.1) выполнено, то полагаем $\alpha_{k_{t+1}} = \alpha_{k_t}$ и $\alpha_{l_{t+1}} = \sigma^*$, где конечное множество $\mathrm{graph}(\sigma^*)$ имеет наименьший канонический индекс среди σ, удовлетворяющих условию (2.1). Если не выполнено условие (2.1), то имеет место

$$(\forall\sigma)[\alpha_{l_t} \subset_p \sigma \to \Phi_n(\mathrm{graph}(\sigma)) \in SV]. \tag{2.2}$$

В этом случае Φ_n определяет частично вычислимый оператор Ψ_n. Проверим выполнимость условия

$$(\exists x)(\exists y)(\exists\sigma)[x \geq z_{k_t} \wedge \alpha_{l_t} \subset_p \sigma \wedge (x, y) \in \Psi_n(\sigma)]. \tag{2.2.1}$$

Если (2.2.1) выполнено, то пусть x^*, y^* — наименьшие числа, удовлетворяющие (2.2.1) и σ^* – конечная функция, график которой $\mathrm{graph}(\sigma^*)$ имеет наименьший канонический индекс среди σ, удовлетворяющих условию (2.2.1) при $x = x^*$ и $y = y^*$. Полагаем

$$\alpha_{k_{t+1}} = \alpha_{k_t} \cup \{(x^*+1, 0)\} \text{ и } \alpha_{l_{t+1}} = \sigma^*.$$

Если (2.2.1) не выполнено, то имеет место

$$(\forall x)(\forall y)(\forall\sigma)[x \geq z_{k_t} \wedge \alpha_{l_t} \subset_p \sigma \to (x, y) \notin \Psi_n(\sigma)]. \tag{2.2.2}$$

Полагаем

$$\alpha_{k_{t+1}} = \alpha_{k_t} \cup \{(z_{k_t}, 0)\} \text{ и } \alpha_{l_{t+1}} = \alpha_{l_t}.$$

Описание конструкции закончено.

Докажем, что для всех k, l, $k \neq l$, построенные в результате конструкции функции $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ удовлетворяют требованиям (ϵFG_k) и $(V_{k,l})$.

По определению 6 функция α_k окажется ϵ-быстрорастущей, если для любой тотальной функции $g \leq_e \epsilon$ выполнено

$$(\exists x)[\alpha_k(x){\downarrow} \wedge \alpha_k(x) > g(x)].$$

Так как все тотальные функции, e-сводящиеся к функции суть $g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots$, то для каждой тотальной функции $g \leq_e \epsilon$ выполнено $g = g_n$ для некоторого n. Из конструкции следует, что шаги $t+1$, где $t = \langle k, 0, 2n \rangle$, $n \in \omega$, обеспечивают для функции α_k выполнение требования (ϵFG_k):

$$\alpha_{k_{t+1}}(z_{k_t}) = g_n(z_{k_t}) + 1.$$

Докажем, наконец, что $\alpha_k \nleq_e \alpha_l$ для всех $k \neq l$. Допустим противное, тогда существует такое n, что $\alpha_k = \Psi_n(\alpha_l)$. Рассмотрим шаг $t+1$, где $t = \langle k, l, 2n+1 \rangle$. Ясно, что условие (2.1) на этом шаге не выполнено, так как $\Phi_n(\mathrm{graph}(\sigma^*)) \notin SV$ влечет $\Phi_n(\mathrm{graph}(\alpha_l)) \notin SV$. Если выполнено условие (2.2.1), то имеем конъюнкцию $x^* \geq z_{k_t} \wedge \alpha_{l_t} \subset_p \sigma^* \wedge (x^*, y^*) \in \Psi_n(\sigma^*)$. После доопределения функций $\alpha_{k_{t+1}} = \alpha_{k_t} \cup \{(x^*+1, 0)\}$ и $\alpha_{l_{t+1}} = \sigma^*$ в результате конструкции получим $(x^*, y^*) \notin \alpha_k$ и $(x^*, y^*) \in \Psi_n(\sigma^*) \subseteq \Psi_n(\alpha_k)$. Следовательно, в этом случае $\alpha_k \neq \Psi_n(\alpha_l)$ и $\alpha_k \nleq_e \alpha_l$.

Если условие (2.2.1) не выполнено, то

$$(\forall x)(\forall y)(\forall \sigma)[x \geq z_{k_t} \wedge \alpha_{l_t} \subset_p \sigma \to (x, y) \notin \Psi_n(\sigma)].$$

В частности, для $x = z_{k_t}$ имеем $(\forall y)[(z_{k_t}, y) \notin \Psi_n(\alpha_k)]$. В результате конструкции получим в этом случае $(z_{k_t}, 0) \in \alpha_k$ и $(z_{k_t}, 0) \notin \Psi_n(\alpha_k)$. Следовательно, и в этом случае $\alpha_k \neq \Psi_n(\alpha_l)$ и $\alpha_k \nleq_e \alpha_l$.

Таким образом, требование $(V_{k,l})$ удовлетворено, и теорема полностью доказана. □

3. Основной результат

В 1955 г. Ю. Т. Медведев [3] построил такую невычислимую частичную функцию α, что для любой тотальной функции g выполнено $g \leq_e \alpha \to g$ — вычислимая функция. Дж. Кейс [2] назвал e-степени, содержащие графики функций, обладающие указанным выше свойством, квазиминимальными.

Следующие ниже определения вполне естественны.

Определение 8. *Невычислимая частичная функция $\alpha \in PF$ называется квазиминимальной, если для любой тотальной функции g выполнено $g \leq_e \alpha \to g$ — вычислимая функция.*

Частичная степень, содержащая хотя бы одну квазиминимальную функцию, называется квазиминимальной частичной степенью. Обозначим через $\mathbf{Q}$ множество всех квазиминимальных частичных степеней. Заметим, что в любой квазиминимальной частичной степени все частичные функции являются квазиминимальными. Иная ситуация для частичных степеней, содержащих e-быстрорастущие функции.

Предложение 6. *Для любой e-б.р. $\alpha \in PF$ существует не e-б.р. $\beta \in PF$ такая, что $\beta \equiv_e \alpha$.*

Доказательство. Пусть $\beta = \chi_{\mathrm{graph}(\alpha)}$. Ясно, что $\alpha \equiv_e \chi_{\mathrm{graph}(\alpha)}$ и β — ограниченная функция. По предложения 4 (i) β не является ϵ-б.р. функцией для любой функции $\epsilon \in PF$, и, следовательно, не является e-б.р. функцией. □

Предложение 7. *Если* $\mathbf{0}_e \neq \mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$ *— неразложимая e-степень, то* $\mathbf{a}$ *— казиминимальная.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{0}_e \neq \mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$ не является квазиминимальной, тогда существует $f \in TF$, такая, что $\mathbf{0}_e < \deg_e(f) \leq \deg_e(\alpha)$. В этом случае $\mathbf{TL_e}(\leq \mathbf{a})$ содержит по крайней мере два элемента $\mathbf{0}_e$ и $\deg_e(f)$. Тогда из теоремы 1 следует, что $|\mathbf{L}_e^{ce}(\mathbf{a})| \geq 2$, что противоречит неразложимости e-степени $\mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$. □

Итак, множество неразложимых e-степеней является подмножеством множества квазиминимальных e-степеней.

Определение 9. *Функция* $\alpha \in PF$ *называется дополняемой до ч. в. ф., если* $\mathrm{graph}(\alpha) \subseteq \mathrm{graph}(\phi_z)$ *для некоторого* z. *Множество дополняемых до ч. в. ф. обозначим через EPF.*

Например, любая частичная характеристическая функция является дополняемой до ч. в. ф. В то же время, существуют частичные функции, которые не дополняемы до ч. в. ф. Простейшие свойства функций из *EPF* приведем в следующем предложении.

Предложение 8. *Для любых* $\alpha, \beta \in PF$

(i) $[(\beta \in EPF) \wedge (\alpha \leq_{ce} \beta)] \to \alpha \in EPF;$

(ii) $[(\alpha \in EPF) \wedge (\alpha \leq_{e} \beta)] \to \alpha \leq_{ce} \beta;$

(iii) *ce-степень* $\deg_{ce}(\chi_\alpha)$ *является наименьшим элементом частично упорядоченного множества* $\mathbf{TL_e}(\leq \mathbf{a})$, *причем* $\deg_{ce}(\chi_\alpha) = \{\beta :\ \beta \in EPF \cap \deg_e(\alpha)\};$

(iv) $\alpha \notin EPF \to |\mathbf{L}_e^{ce}(\deg_e(\alpha)| \geq 2.$

Доказательство. (i). Пусть $\alpha \leq_{ce} \beta$ и Ψ — такой вычислимый оператор, что $\alpha = \Psi(\beta)$, и ϕ — такая ч.в. функция, что $\mathrm{graph}(\beta) \subseteq \mathrm{graph}(\phi)$. Пусть $\psi = \Psi(\phi)$, ясно, что ψ — ч.в. функция, и, в силу монотонности e-оператора Φ, определяющего Ψ, $\mathrm{graph}(\alpha) \subseteq \mathrm{graph}(\psi)$.

(ii). Пусть $\alpha \leq_e \beta$ и Φ_z — такой e-оператор, что $\mathrm{graph}(\alpha) = \Phi_z(\mathrm{graph}(\beta))$, и ϕ — такая ч.в. функция, что $\mathrm{graph}(\alpha) \subseteq \mathrm{graph}(\phi)$. Определим e-оператор Υ, полагая $\Upsilon(X) = \Phi_z(X) \cap \mathrm{graph}(\phi)$ для любого множества X. Докажем, что $\mathrm{graph}(\alpha) = \Upsilon(\mathrm{graph}(\beta))$. В самом деле,

$$\Upsilon(\mathrm{graph}(\beta) = \Phi_z(\mathrm{graph}(\beta)) \cap \mathrm{graph}(\phi) = \mathrm{graph}(\alpha) \cap \mathrm{graph}(\phi) = \mathrm{graph}(\alpha).$$

Так как $\Upsilon(X) \subseteq \mathrm{graph}(\phi)$ для любого множества X, то Υ — вычислимый (функциональный) оператор, следовательно, $\alpha \leq_{ce} \beta$.

(iii). Так как $\chi_\alpha \in EPF$ для любой функции α, то $\chi_\alpha \leq_{ce} \beta$ для любой функции $\beta \in \deg_e(\alpha)$. Следовательно, $\deg_{ce}(\chi_\alpha)$ является наименьшим элементом частично упорядоченного множества $\mathbf{L}_e^{ce}(\alpha)$, причем

$$\deg_{ce}(\chi_\alpha) = \{\beta :\ \beta \in EPF \cap \deg_e(\alpha)\}.$$

в силу пункта (i).

(iv). Пусть $\alpha \in PF$ не является дополняемой до ч. в. ф., рассмотрим $\deg_{ce}(\alpha)$ и $\deg_{ce}(\chi_\alpha)$ как элементы $\mathbf{L}_e^{ce}(\alpha)$. Из (iii) следует, что $\deg_{ce}(\chi_\alpha) \leq \deg_{ce}(\alpha)$. Если предположить, что $\deg_{ce}(\alpha) \leq \deg_{ce}(\chi_\alpha)$, то $\deg_{ce}(\alpha) = \deg_{ce}(\chi_\alpha)$, а так как $\deg_{ce}(\chi_\alpha)$ состоит только из дополняемых до ч.в. функций, то $\alpha \in EPF$. Получено противоречие, следовательно, $\deg_{ce}(\alpha) \neq \deg_{ce}(\chi_\alpha)$ и $\mathbf{L}_e^{ce}(\deg_{ce} \alpha))$ состоит не менее, чем из двух ce-степеней. □

Предложение 9. *Любая б.р. функция не дополняема до ч. в. функции.*

Доказательство. Пусть α — б.р. функция. Предположим, что α дополняема до ч. в. ф., и ϕ — та вычислимая функция, для которой $\mathrm{graph}(\alpha) \subseteq \mathrm{graph}(\phi)$. По лемме 1 никакая ч. в. ф. не является б.р., поэтому существует вычислимая функция g, такая, что

$$g \leq_e \alpha \wedge (\forall x)[\phi(x)\downarrow \to \phi(x) \leq g(x)].$$

Так как $(\forall x)[\alpha(x)\downarrow \to \alpha(x) = \phi(x)]$, то $(\forall x)[\alpha(x)\downarrow \to \alpha(x) \leq g(x)]$. Отсюда следует, что α не является б.р., что противоречит предположению. $\square$

Теорема 3. *Любая частичная степень, содержащая б.р. функцию, разложима.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$ — частичная степень, содержащая б.р. функцию α. Очевидно, что $\chi_\alpha \equiv_e \alpha$. Так как по предложению 9 α не дополняема до ч. в. ф. и χ_α дополняема до ч. в. ф., то по предложению 8(i) $\alpha \not\leq_{ce} \chi_\alpha$. Следовательно, $|\mathbf{L}_e^{ce}(\deg_e(\alpha)| \geq 2$ и частичная степень $\mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$ разложима. $\square$

Заключение

В работе установлено следующее. Из предложения 7 следует, что любая ненулевая неразложимая частичная степень является квазиминимальной. Возникает естественный вопрос: всякая ли квазиминимальная частичная степень неразложима? Следствие 1 показывает, что существуют квазиминимальные б.р. частичные степени. Заключительная теорема 3 дает отрицательный ответ на этот вопрос, а именно квазиминимальные частичные степени, содержащие б.р. функции, разложимы.

Список литературы

[1] Розинас М.Г. Частичные степени и r-степени // Сибирский математический журнал. 1974. Т. 15, № 6. С. 1323–1331.

[2] Case J. Enumeration reducibility and partial degreees // Annals of Mathematical Logic. 1971. Vol. 2, № 4. Pp. 419–439. https://doi.org/10.1016/0003-4843(71)90003-9

[3] Medvedev Yu.T. Degrees of difficulty of the mass problem // Doklady Akademii Nauk SSSR. 1955. Vol. 104. Pp. 501–504.

[4] Rogers H. Theory of Recursive Functions and Effective Computability. New York: McGraw-Hill Education, 1967.

Образец цитирования

Солон Б.Я. Частичные степени быстрорастущих функций // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 1. С. 53–68. https://doi.org/10.26456/vtpmk630

Сведения об авторах

1. **Солон Борис Яковлевич**
заведующий кафедрой фундаментальной математики Ивановского государственного университета.

153025, Россия, г. Иваново, ул. Ермака, д. 39, ИвГУ. E-mail: bysolon@gmail.com

PARTIAL DEGREES OF FAST-GROWING FUNCTIONS

Solon Boris Yakovlevich
Head of the Department of Fundamental Mathematics, Ivanovo State University
Russia, 153025, Ivanovo, 39 Ermaka str., IvSU.
E-mail: bysolon@gmail.com

Received 25.01.2022, revised 17.02.2022.

The article introduces the notion of fast-growing function and considers partial degrees of fast-growing functions. Partial degrees can be either total or non-total. The notion of e-fast-growing function is introduced, it is proved that partial degrees of fast-growing functions are not total and decomposable.

Keywords: partial degrees, quasi-minimal partial degrees, fast-growing functions, e-fast-growing functions.

Citation

Solon B.Ya., "Partial degrees of fast-growing functions", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 1, 53–68 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk630

References

[1] Rozinas M.G., "Partial degrees and r-degrees", *Sibirskij matematicheskij zhurnal [Siberian Mathematical Journal]*, **15**:6 (1974), 1323–1331 (in Russian).

[2] Case J., "Enumeration reducibility and partial degreees", *Annals of Mathematical Logic*, **2**:4 (1971), 419–439, https://doi.org/10.1016/0003-4843(71)90003-9.

[3] Medvedev Yu.T., "Degrees of difficulty of the mass problem", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **104** (1955), 501–504.

[4] Rogers H., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill Education, New York, 1967.