ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАТИКА, КИБЕРНЕТИКА

УДК 512.54.05, 512.543.7

ОБ ОТСУТСТВИИ ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ДЛЯ ОДНОКОЭФФИЦИЕНТНЫХ КОММУТАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Дурнев В.Г.*, **Зеткина А.И.***,**

*Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова, г. Ярославль

**Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Поступила в редакцию 21.04.2022, после переработки 18.05.2022.

В работе построено разрешенное относительно неизвестных уравнение в свободной группе ранга 2, левая часть которого принадлежит коммутанту (имеет нулевую сумму показателей по каждой переменной), а правая часть – простейший коммутатор, не имеющее решения в этой группе, но имеющее решение в любом конечном гомоморфном образе этой группы.

Ключевые слова: свободная группа, уравнение в свободной группе, финитная аппроксимируемость, коммутатор элементов, коммутант группы.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 2. С. 5–13.
https://doi.org/10.26456/vtpmk633

Введение

В теории чисел хорошо известен классический локально-глобальный принцип Минковского-Хассе [1], который допускает различные формулировки. Приведем три из них по монографии [1], близкие к теме настоящей заметки:

1. «*Квадратичная форма с рациональными коэффициентами тогда и только представляет нуль в поле рациональных чисел, когда она представляет нуль в поле вещественных чисел и во всех полях p-адических чисел (для всех простых чисел p)* Q_p.»

2. «*Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *– квадратическая форма с целыми коэффициентами. Тогда уравнение* $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ *имеет нетривиальное целочисленное решение тогда и только тогда, когда* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *– неопределенная форма и для любого примарного модуля* p^m *сравнение* $f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0\,(mod\,p^m)$ *имеет такое решение, в котором хотя бы одна компонента не делится на* p.»

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-52-26006).

3. «*Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – неособенная квадратическая форма с рациональными коэффициентами. Тогда уравнение $f(x_1, \ldots, x_n) = r$, где r – произвольное рациональное число, имеет решение в рациональных числах тогда и только тогда, когда это уравнение имеет решение в поле вещественных чисел и во всех полях p-адических чисел Q_p.*»

Это дает простой переборный алгоритм для решения вопроса о разрешимости в рациональных числах уравнения $f(x_1, \ldots, x_n) = r$.

Аналогичное утверждение справедливо и для систем линейных целочисленных уравнений [1]: *система линейных уравнений с целыми коэффициентами*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j$$

имеет решение в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда она имеет решение в любом кольце вычетов $\mathbb{Z}_k$.

В то же время, многочлен $x^4 + 1$ неприводим над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ (над полем рациональных чисел Q, неразложим в кольцах многочленов $\mathbb{Z}[x]$ и $Q[x]$), но приводим над произвольным конечным полем $GF(q)$ (разложим в кольце $GF(q)[x]$)

Обозначим через F_n свободную группу ранга n со свободными образующими $a_1, \ldots, a_n$. Хорошо известно, что свободная группа F_n является *финитно аппроксимируемой* [6]. Это означает, что для любого неединичного элемента g группы F_n существует конечная факторгруппа F_n/N, в которой образ элемента g отличен от единичного элемента. Как пишут авторы монографии [6], А. И. Мальцев [7] указал на важность изучения финитной аппроксимируемости групп не только относительно предиката равенства, но и относительно предикатов сопряженности, извлечения корня и вхождения в конечно порожденные подгруппы: из финитной аппроксимируемости конечно определенной группы относительно этих предикатов при условии разрешимости в ней проблемы равенства вытекает разрешимость указанных предикатов. Пусть G – группа, ρ – предикат, определенный на группе G и ее гомоморфных образах. Говорят, что *группа G финитно аппроксимируема относительно ρ, если для любых элементов группы G, на которых предикат ρ ложен, существует такая конечная факторгруппа G/N, что предикат ρ ложен для образов в G/N этих элементов.* Изучению финитной аппроксимируемости групп относительно равенства из различных классов групп посвящены многие работы Д.И. Молдаванского и его учеников. В ряде работ изучалась финитная аппроксимируемость свободных групп относительно предикатов сопряженности элементов и возможности извлечения корня n-ой степени. Г. Баумслаг [4] установил финитную аппроксимируемость свободных групп относительно сопряженности и возможности извлечения корня простой степени, т.е. относительно разрешимости уравнений вида $x^{-1}hx = g$ и $x^p = g$, где h и g – элементы свободной группы.

В работе [8] установлена финитная аппроксимируемость свободных групп относительно разрешимости уравнений вида $[x, y] = g$ и $x^n = g$, где $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ – коммутатор элементов x и y. В этой же работе [8] *построено уравнение вида $w(x_1, \ldots, x_4, a_1, a_2) = 1$ такое, что оно не имеет решения в свободной группе F_2 со свободными образующими a_1 и a_2, но уравнение $w(x_1, \ldots, x_4, \overline{a_1}, \overline{a_2}) = 1$ имеет решение в любой конечной факторгруппе F_2/N, где $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ – образы в факторгруп-*

пе F_2/N *при естественном гомоморфизме свободных образующих* a_1 *и* a_2 *группы* F_2.

1. Однокоэффициентные коммутантные уравнения

В ряде работ [5, 7–12] рассматривались уравнения вида

$$w\,(\,x_1, \ldots,\, x_n\,) \;=\; g(\,a_1, \ldots, a_m\,),$$

где $w\,(\,x_1, \ldots,\, x_n\,)$ – групповое слово в алфавите неизвестных $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$, т. е. не содержит констант $a_1,\, \ldots,\, a_m$, а $g(\,a_1, \ldots, a_m\,)$ – слово в алфавите констант $a_1,\, \ldots,$ a_m, т. е. не содержит неизвестных. Они получили название *уравнений, разрешенных относительно неизвестных, однокоэффициентных уравнений, уравнений с правой частью.* Проблема разрешимости для таких уравнений иногда называется *проблемой подстановки* или *проблемой сравнения с образцом.* Традиционно считалось, что уравнения такого вида являются «более простыми», чем произвольные уравнения.

В работе [11] *построено такое разрешенное относительно неизвестных уравнение* $w(x_1, \ldots, x_n) = [a, b]$ *(однокоэффициентное уравнение) с коммутатором в правой части, что оно не имеет решения в свободной группе* F_n*, однако уравнение*

$$w(x_1, \ldots, x_n) \;=\; [\overline{a_1}, \overline{a_2}]$$

имеет решение в любой конечной факторгруппе F_n/N*, где через* $\overline{a_1}$ *и* $\overline{a_2}$ *обозначены образы свободных образующих* a_1 *и* a_2 *свободной группы* F_n *относительно ее естественного гомоморфизма на факторгруппу* F_n/N.

В настоящей заметке усиливается и дополняется этот результат – *строится обладающее аналогичным свойством уравнение, разрешенное относительно неизвестных и имеющее вид* $w(x_1, \ldots, x_m) = [a_1, a_2]$*, где* $[a_1, a_2]$ *– коммутатор образующих элементов* a_1 *и* a_2 *свободной группы* F_2*, а* $w(x_1, \ldots, x_m)$ *– групповое слово только от переменных (не содержит констант) и, более того, оно принадлежит коммутанту свободной группы* $\langle\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle\rangle$.

В работе А.Г. Маканина [12] уравнения вида $w(x_1, \ldots, x_n) = g(a, b)$, где слово $w(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит коммутанту свободной группы $\langle\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle\rangle$, т.е. в этом слове сумма показателей любой переменной x_i равна нулю, получили название *коммутантных уравнений.* В этой работе доказано, что *некоммутантные уравнения в любой конечно порожденной нильпотентной группе финитно аппроксимируемы.*

Для произвольных натуральных чисел p, q и m обозначим через $w_{p,q,m}(x, y, z, t, u, v)$ слово $(x^2u)^{2+p}(z^{-1}y^2vz)^{2+q}t^{2m+3}$ и рассмотрим уравнение

$$([w_{p,q,m}(x, y, z, t, u, v), u]^2\,[w_{p,q,m}(x, y, z, t, u, v), v])^4\,[u, v] \;=\; [a_1, a_2].$$

Заметим, что левая часть уравнения принадлежит коммутанту свободной группы $\langle\langle x, y, z, t, u, v\rangle\rangle$, т.е. это уравнение является *коммутантным.*

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При любом $n \geq 2$ и любых неотрицательных m, p и q уравнение*

$$([w_{p,q,m}(x,y,z,t,u,v),u]^2\,[w_{p,q,m}(x,y,z,t,u,v),v])^4\,[u,v] \;=\; [a_1,a_2]$$

не имеет решения в свободной группе F_n, однако уравнение

$$([w_{p,q,m}(x,y,z,t,u,v),u]^2\,[w_{p,q,m}(x,y,z,t,u,v),v])^4\,[u,v] \;=\; [\overline{a_1},\overline{a_2}]$$

имеет решение в любой конечной факторгруппе F_n/N, где через $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ обозначены образы свободных образующих a_1 и a_2 свободной группы F_n относительно ее естественного гомоморфизма на факторгруппу F_n/N.

Доказательство. Пусть F_n/N – конечная факторгруппа свободной группы F_n. Покажем, что уравнение

$$([w_{p,q,m}(x,y,z,t,u,v),u]^2\,[w_{p,q,m}(x,y,z,t,u,v),v])^4\,[u,v] \;=\; [\overline{a_1},\overline{a_2}] \qquad (1)$$

имеет решение в F_n/N.

Полагаем $U = \overline{a_1}$, $V = \overline{a_2}$. Покажем, что уравнение

$$([w_{p,q,m}(x,y,z,t,\overline{a_1},\overline{a_2}),\overline{a_1}]^2\,[w_{p,q,m}(x,y,z,t,\overline{a_1},\overline{a_2}),\overline{a_2}])^4\,[\overline{a_1},\overline{a_2}] \;=\; [\overline{a_1},\overline{a_2}] \qquad (2)$$

имеет решение. Для этого достаточно доказать разрешимость уравнения $w_{p,q,m}(x,y,z,t,\overline{a_1},\overline{a_2}) = 1$: если X, Y, Z, T – решение этого уравнения, то X, Y, Z, T – решение уравнения (2), X, Y, Z, T, U, V – решение уравнения (1) в F_n/N.

Так как $w_{p,q,m}(x,y,z,t,u,v)$ – это слово $(x^2u)^{2+p}(z^{-1}y^2vz)^{2+q}t^{2m+3}$, остается показать, что уравнение

$$(x^2\overline{a_1})^{2+p}(z^{-1}y^2\overline{a_2}z)^{2+q}t^{2m+3} \;=\; 1 \qquad (3)$$

имеет решение X, Y, Z, T в F_n/N.

Для произвольного элемента g факторгруппы F_n/N через $|g|$ будем обозначать его порядок.

Пусть $|\overline{a_1}| = 2^s(2s'+1)$ и $|\overline{a_2}| = 2^r(2r'+1)$.

Тогда $|\overline{a_1}^{2s'+1}| = 2^s$ и $|\overline{a_2}^{2r'+1}| = 2^r$.

По теореме Силова [6] в конечной группе F_n/N найдется такой элемент, что элементы $\overline{a_1}^{2s'+1}$ и $h^{-1}\overline{a_2}^{2r'+1}h$ принадлежат одной и той же силовской 2-подгруппе. Значит, этой же силовской 2-подгруппе принадлежит и элемент

$$g \;=\; (\overline{a_1}^{2s'+1})^{2+p}(h^{-1}\overline{a_2}^{2r'+1}h)^{2+q}.$$

Поэтому $|g| = 2^l$ при некотором l.

Существуют такие целые числа α и β, что

$$1 \;=\; 2^l\alpha \,+\, (2m+3)\beta.$$

Тогда $g = g^{\beta(2m+3)}$, а в качестве решения уравнения (2) можно взять $X = \overline{a_1}^{s'}$, $Y = \overline{a_2}^{r'}$, $Z = h$, $T = (g^{-1})^{\beta}$.

Поэтому в качестве решения уравнения (1) можно взять, например, $U = \overline{a_1}$, $V = \overline{a_2}$, $X = \overline{a_1}^{s'}$, $Y = \overline{a_2}^{r'}$, $Z = h$, $T = (g^{-1})^{\beta}$.

Остается показать, что *уравнение*

$$([w_{p,q,m}(x,y,z,t,u,v),u]^2\,[w_{p,q,m}(x,y,z,t,u,v),v])^4\,[u,v] \;=\; [a_1,a_2]$$

не имеет решения в свободной группе F_n. Предположим противное, т.е. что это уравнение имеет решение U, V, X, Y, Z, T в свободной группе F_2.

В работе [9] А.А. Вдовина доказала гипотезу Эдмундса и Розенберга: если в свободной группе выполняется равенство $[s,t][u,v]=x^k$ и $x\neq 1$, то $k\leq 3$. Поэтому из равенства

$$([w_{p,q,m}(X,Y,Z,T,U,V),U]^2\,[w_{p,q,m}(X,Y,Z,T,U,V),V])^4\,[U,V] \;=\; [a_1,a_2]$$

следуют равенства

$$[w_{p,q,m}(X,Y,Z,T,U,V),U]^2\,[w_{p,q,m}(X,Y,Z,T,U,V),V] \;=\; 1 \tag{4}$$

и $[U,V]\;=\;[a_1,a_2]$.

А.И. Мальцев в работе [5] доказал, что из последнего равенства следует: U и V – *свободные образующие группы* F_2.

Поэтому *существует такой автоморфизм* φ *группы* F_2, *что* $\varphi(U)\;=\;a$ *и* $\varphi(V)=b$.

Введем обозначения $\varphi(X)=\overline{X}$, $\varphi(Y)=\overline{Y}$, $\varphi(Z)=\overline{Z}$, $\varphi(T)=\overline{T}$.

Из равенства (4) получаем

$$[w_{p,q,m}(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\overline{T},a_1,a_2),a_1]^2\,[w_{p,q,m}(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\overline{T},a_1,a_2),a_2] \;=\; 1. \tag{5}$$

Из последнего равенства получаем равенства [11]

$$[w_{p,q,m}(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\overline{T},a_1,a_2),a_1] \;=\; 1 \;\&\; [w_{p,q,m}(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\overline{T},a_1,a_2),a_2] \;=\; 1, \tag{6}$$

из которых следует

$$w_{p,q,m}(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\overline{T},a_1,a_2) \;=\; 1, \tag{7}$$

т.е.

$$(\overline{X}^2a_1)^{2+p}(\overline{Z}^{-1}\overline{Y}^2a_2\overline{Z})^{2+q}\overline{T}^{2m+3} \;=\; 1.$$

Г. Щютценбергер в работе [15] показал, что из последнего равенства следует: в свободной группе F_2 найдется такой элемент A и такие целые числа γ и δ, что

$$\overline{X}^2a_1 \;=\; A^{\gamma}, \quad \overline{Z}^{-1}\overline{Y}^2a_2\overline{Z} \;=\; A^{\delta}.$$

Покажем, что это невозможно.

Для произвольного элемента w свободной группы F_n и произвольного i $(1\leq i\leq n)$ через $|w|_{a_i}$ обозначим сумму показателей образующего элемента a_i в выражении w через свободные образующие $a_1,\,\ldots,\,a_n$. Тогда, с одной стороны,

$$2\nmid|\overline{X}^2a_1|_{a_1} \;=\; \gamma|A|_{a_1},$$

$$2\nmid|\overline{Z}^{-1}\overline{Y}^2a_2\overline{Z}|_{a_2} \;=\; \delta|A|_{a_2}.$$

Поэтому $2\nmid\gamma$, $2\nmid|A|_{a_1}$, $2\nmid\delta$, $2\nmid|A|_{a_2}$.

Но, с другой стороны,

$$2 \mid |\overline{X}^2 a_1|_{a_2} = \gamma |A|_{a_2},$$

$$2 \mid |\overline{Z}^{-1}\overline{Y}^2 a_2 \overline{Z}|_{a_1} = \delta |A|_{a_1}.$$

Поэтому или $2 \mid \gamma$, или $2 \nmid |A|_{a_1}$, или $2 \nmid \delta$, или $2 \nmid |A|_{a_2}$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Заключение

Рассмотренное в теореме уравнение имеет вид $w(x_1, \ldots, x_6) = [a_1, a_2]$. Представляет интерес вопрос о возможности уменьшения числа неизвестных в левой части уравнения и длины слова в его правой части. Ясно, что число неизвестных в левой части должно быть не меньше двух, так как при $m = 1$ уравнение $w(x_1, \ldots, x_m) = g$ принимает вид $x_1^n = g$, а в работе [8] показано, что такое уравнение имеет решение в свободной группе F_2 тогда и только тогда, когда оно имеет решение в любой конечной факторгруппе F_2/N. Длина правой части равна 4. Можно показать, что *ее нельзя уменьшить*.

Список литературы

[1] Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, ФизМатЛит, 1972. 496 с.

[2] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, ФизМатЛит, 1972. 288 с.

[3] Мальцев А.И. О гомоморфизмах на конечные группы // Ученые записки Ивановского пед института. 1958. Т. 18. С. 49–60.

[4] Baumslag G. Residual nilpotency and relations in free groups // Journal of Algebra. 1965. Vol. 2. Pp. 271–282.

[5] Coulbois T., Khelif A. Equations in free groups are not finitely approximable // Proceedings of the American Mathematical Society. 1999. Vol. 127, № 4. Pp. 963–965.

[6] Мальцев А.И. Об уравнении $z^{-1}xyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе // Алгебра и логика. 1962. Т. 1, № 5. С. 45–60.

[7] Хмелевский Ю.И. Системы уравнений в свободной группе. I, II // Известия АН СССР. Серия математика. 1971,1972. Т. 35,36, № 6,1.

[8] Schupp P.E. On the substitution problem for free groups // Proceedings of the American Mathematical Society. 1969. Vol. 23. Pp. 421–423.

[9] Edmunds C.C. On the endomorphisms problem for free group // Communications in Algebra. 1975. Vol. 3. Pp. 7–20.

[10] Дурнев В.Г. О проблеме разрешимости для уравнений с одним коэффициентом // Математические заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 832–845.

[11] Дурнев В.Г. Об уравнениях в свободных группах // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, № 1. С. 15–18.

[12] Маканин А.Г. О финитной аппроксимируемости уравнений в конечно порожденных нильпотентных группах // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1992. № 1. С. 48–51.

[13] Вдовина А.А. Произведение коммутаторов и квадратов в свободной группе // Третья международная конференция по алгебре. Тезисы докладов. Красноярск, 1993. С. 66–67.

[14] Курош А.Г. Теория групп. 3-е изд. М.: Наука, ФизМатЛит, 1967. 648 с.

[15] Schutzenberger M.P. Sur l'equation $a^{2+n} = b^{2+m}c^{2+p}$ dans un groupe libre // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. 1959. Vol. 248. Pp. 2435–2436.

Образец цитирования

Дурнев В.Г., Зеткина А.И. Об отсутствии финитной аппроксимируемости для однокоэффициентных коммутантных уравнений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 2. С. 5–13. https://doi.org/10.26456/vtpmk633

Сведения об авторах

1. **Дурнев Валерий Георгиевич**
профессор кафедры компьютерной безопасности и математических методов обработки информации математического факультета Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Россия, 150000, г. Ярославль, ул. Советская, 14/2, ЯрГУ им. П.Г. Демидова. E-mail: durnev@uniyar.ac.ru

2. **Зеткина Алена Игоревна**
аспирантка кафедры теоретической информатики факультета информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Россия, 150000, г. Ярославль, ул. Советская, 14/2, ЯрГУ им. П.Г. Демидова. E-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru

VIOLATION OF FINITE APPROXIMABILITY FOR SINGLE-COEFFICIENT COMMUTANT EQUATIONS

Durnev Valery Georgievich
Professor at the Department of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, Faculty of Mathematics,
Yaroslavl State University named after P.G. Demidov
Russia, 150000, Yaroslavl, st. Sovetskaya, 14/2, YarGU im. P.G. Demidov.
E-mail: durnev@uniyar.ac.ru

Zetkina Alena Igorevna
PhD student at the Department of Theoretical Informatics, Faculty of Informatics and Computer Science,
Yaroslavl State University named after P.G. Demidov
Russia, 150000, Yaroslavl, st. Sovetskaya, 14/2, YarGU im. P.G. Demidov.
E-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru

Received 21.04.2022, revised 18.05.2022.

We construct an equation (resolved with respect to unknowns) such that (i) it has no solution in F_2 (a free group of rank 2), but (ii) it has a solution in any finite homomorphic image of F_2. The left-hand-side of this equation belongs to the derived subgroup (i.e. has zero sum of exponents in each variable), while its right-hand-side is the commutator of two generators of F_2.

Keywords: free group, equation in a free group, residual finiteness, commutator of elements, commutator subgroup.

Citation

Durnev V.G., Zetkina A.I., "Violation of finite approximability for single-coefficient commutant equations", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 2, 5–13 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk633

References

[1] Borevich Z.I., Shafarevich I.R., *Teoriya chisel [Number theory]*, Nauka Publ., Moscow; FizMatLit, 1972 (in Russian), 496 pp.

[2] Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I., *Osnovy teorii grupp [Fundamentals of group theory]*, Nauka Publ., Moscow; FizMatLit, 1972 (in Russian), 288 pp.

[3] Maltsev A.I., "On homomorphisms to finite groups", *Uchenye zapiski Ivanovskogo ped instituta [Scientific notes of the Ivanovo Pedagogical Institute]*, **18** (1958), 49–60 (in Russian).

[4] Baumslag G., “Residual nilpotency and relations in free groups”, *Journal of Algebra*, **2** (1965), 271–282.

[5] Coulbois T., Khelif A., “Equations in free groups are not finitely approximable”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **127**:4 (1999), 963–965.

[6] Maltsev A.I., “About the equation $z^{-1}xyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ in a free group”, *Algebra i logika [Algebra and logic]*, **1**:5 (1962), 45–60 (in Russian).

[7] Khmelevskij Yu.I., “Systems of equations in a free group. I, II”, *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematika [Izvestia of the USSR Academy of Sciences. Mathematics Series]*, **35,36**:6,1 (1971,1972) (in Russian).

[8] Schupp P.E., “On the substitution problem for free groups”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **23** (1969), 421–423.

[9] Edmunds C.C., “On the endomorphisms problem for free group”, *Communications in Algebra*, **3** (1975), 7–20.

[10] Durnev V.G., “On the solvability problem for equations with one coefficient”, *Matematicheskie zametki [Mathematical Notes]*, **59**:6 (1996), 832–845 (in Russian).

[11] Durnev V.G., “On equations in free groups”, *Chebyshevskij sbornik [Chebyshev collection]*, **13**:1 (2012), 15–18 (in Russian).

[12] Makanin A.G., “On the finite approximability of equations in finitely generated nilpotent groups”, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika [Moscow University Mathematics Bulletin, Moscow University Mechanics Bulletin]*, 1992, № 1, 48–51 (in Russian).

[13] Vdovina A.A., “The product of commutators and squares in a free group”, *Tretya mezhdunarodnaya konferentsiya po algebre. Tezisy dokladov*, Krasnoyarsk, 1993, 66–67 (in Russian).

[14] Kurosh A.G., *Teoriya grupp [Group theory]*, 3d ed., Nauka Publ., M.; FizMatLit, 1967 (in Russian), 648 pp.

[15] Schutzenberger M.P., “Sur l’equation $a^{2+n} = b^{2+m}c^{2+p}$ dans un groupe libre”, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences*, **248** (1959), 2435–2436.