МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 510.624

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЕРАТОРА ЧАСТИЧНОЙ ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКИ[1]

Секорин В.С.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 20.05.2022, после переработки 30.05.2022.

В работе рассмотрены различные семантики частичной фиксированной точки для бесконечных алгебраических систем. Показано, что операторы частичной фиксированной точки рассматриваемых семантик можно промоделировать оператором инфляционной фиксированной точки в тех алгебраических системах, в которых есть строгий частичный порядок со сколь угодно длинными цепями.

Ключевые слова: частичная фиксированная точка, инфляционная фиксированная точка, алгебраическая система, семантика.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 2. С. 14–26.
https://doi.org/10.26456/vtpmk634

1. Введение

В настоящее время разнообразные методы математической логики находят всё более широкое применение при решении задач проектирования и анализа программного обеспечения. Одним из разделов математической логики, который наиболее тесным образом связан с информатикой, является теория логических языков. Например, логические языки используются в системах управления базами данных. В них они применяются в качестве средства извлечения информации из базы данных. Но необходимо отметить, что многие простые, но имеющие большое практическое значение [1] свойства являются невыразимыми в логике первого порядка. Одними из таких свойств являются транзитивное замыкание и определение чётности количества элементов носителя алгебраической системы.

Эта причина обосновывает тот факт, что логика первого порядка и различные её расширения постоянно изучаются. Среди одних из самых распространённых расширений можно выделить оператор фиксированной точки. Существует несколько видов таких операторов: инфляционной фиксированной точки, наименьшей фиксированной точки и частичной фиксированной точки. Самым общим

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00435).

из этих операторов является оператор частичной фиксированной точки (PFP-оператор). Отметим, что предложен этот оператор был Ю. Гуревичем в работе [3]. В книге [4] Л. Либкина содержится подробное изложение свойств PFP-оператора для конечных алгебраических систем.

Значимым фактом является то, что операции базы данных могут выполняться не только над элементами самой базы данных, но и над произвольными элементами универсума. Это тоже может увеличить выразительные возможности языка первого порядка, но незначительно [7]. В результате совместного использовании двух упомянутых возможностей существуют случаи, в которых применение PFP-оператора происходит для бесконечных алгебраических систем. В данной работе мы рассмотрим следующие три семантики оператора частичной фиксированной точки: PFP, $\mathrm{PFP}^{\forall}$ и $\mathrm{PFP}^{\exists}$. Результатом PFP-оператора является множество тех наборов, которые принадлежат предикату на двух подряд идущих совпадающих шагах [4]. Результатом $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператора является множество тех наборов, которые принадлежат предикату на всех шагах, начиная с некоторого [8]. Результатом $\mathrm{PFP}^{\exists}$-оператора является множество тех наборов, которые принадлежат предикату на бесконечном количестве шагов [8].

Необходимо отметить, что в современных системах управления базами данных рекурсивные запросы выполняются как оператор инфляционной фиксированной точки. Поэтому возникает вопрос: в каких случаях можно промоделировать PFP-операторы различных семантик при помощи IFP-операторов. Мы рассматриваем алгебраическую систему, содержащую отношение строгого частичного порядка $<$ со сколь угодно длинными дискретными цепями. В качестве основного результата доказано утверждение о том, что в такой алгебраической системе можно промоделировать PFP-операторы всех трёх рассматриваемых семантик при помощи IFP-операторов.

1. Основные определения

Будем рассматривать операторы частичной и инфляционной фиксированной точки. Для этого определим их синтаксис и семантику.

Определение 1 (Формула логики частичной фиксированной точки, [3])**.** *Формулой* PFP*-логики называется формула, построенная по правилам логики первого порядка с использованием оператора частичной фиксированной точки* PFP*: если $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ — формула со свободными переменными $\bar{x}$ и $\bar{y}$, содержащая несигнатурный предикатный символ Q, то $\mathrm{PFP}_{Q(\bar{y})}(\varphi)$ — формула исходной сигнатуры, содержащая свободные переменные $\bar{x}$ и $\bar{y}$. При этом длина $\bar{y}$ совпадает с местностью Q.*

Определение 2 (Значение PFP, $\mathrm{PFP}^{\forall}$ и $\mathrm{PFP}^{\exists}$, сходимость, зацикливание, [3, 8])**.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — это алгебраическая система, $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ — формула с новым предикатным символом Q, где $\bar{y}$ — набор переменных. Зафиксируем значения переменных $\bar{x}$ как $\bar{d} \in |\mathfrak{A}|$. Построим последовательность множеств $Q_i^{\bar{d}}$ следующим образом. Пусть*

$$Q_0^{\bar{d}} = \varnothing; \quad Q_{i+1}^{\bar{d}} = \{\bar{y} \in |\mathfrak{A}| \mid (\mathfrak{A}, Q_i^{\bar{d}}) \models \varphi(\bar{d},\bar{y})\},$$

для $i \in \omega$.

Значением частичной фиксированной точки $\mathrm{PFP}_{Q(\bar{y})}(\varphi)(\bar{d})$ *является следующее множество* $Q_*^{\bar{d}}$. *Если существует натуральное число* n *такое, что выполнено* $Q_n = Q_{n+1}$, *то говорим, что* PFP*-оператор сходится, и полагаем* $Q_*^{\bar{d}}$ *равное* Q_n. *Если такого* n *не существует, то* $Q_*^{\bar{d}} = \varnothing$.

Значением частичной фиксированной точки $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(\bar{y})}(\varphi)(\bar{d})$ *является следующее множество* $Q_\forall^{\bar{d}}$. *Множеству* $Q_\forall^{\bar{d}}$ *принадлежат только те* $\bar{y}$, *для которых существует* i *такой, что выполнено* $\bar{y} \in Q_j$ *для всех* $j > i$. *Следовательно, для этих* $\bar{y}$ *формула* $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(\bar{y})}(\varphi)(\bar{d}, \bar{y})$ *будет истинной.*

Значением частичной фиксированной точки $\mathrm{PFP}^{\exists}_{Q(\bar{y})}(\varphi)(\bar{d})$ *является следующее множество* $Q_\exists^{\bar{d}}$. *Множеству* $Q_\exists^{\bar{d}}$ *принадлежат только те* $\bar{y}$, *для которых выполнено* $\bar{y} \in Q_i$ *для бесконечно многих* i. *Следовательно, для этих* $\bar{y}$ *формула* $\mathrm{PFP}^{\exists}_{Q(\bar{y})}(\varphi)(\bar{d}, \bar{y})$ *будет истинной.*

Если существуют два натуральных числа n *и* m *такие, что выполнено* $n \neq m$ *и* $Q_n = Q_m$, *то* PFP*-оператор зацикливается.*

Приведём примеры определённых выше операторов частичной фиксированной точки.

Пример 1. Рассмотрим следующую систему: носителем является множество вершин графа V, а двухместный предикат $E^{(2)}$ означает, что между двумя вершинами есть ребро (ориентированное). Тогда множество вершин, достижимых из вершины $v \in V$, можно выразить при помощи формулы $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(x)}(\theta)(v, x)$, где

$$\theta(v, x) \equiv x = v \vee Q(x) \vee (\exists y)\big(Q(y) \wedge E(y, x)\big).$$

На первом шаге в предикат Q попадёт только вершина v, то есть $Q_1 = \{v\}$. На всех последующих шагах будет выполнено:

$$Q_{i+1} = \{x \mid Q_i(x) \text{ или } (\exists y)\big(Q_i(y) \wedge E(y, x)\big)\},$$

таким образом на $(i+1)$-м шаге в предикат попадут те и только те вершины, которые были на предыдущем шаге или в которые есть ребра из них.

Пример 2. Рассмотрим систему из примера 1. Тогда множество вершин, принадлежащих некоторому циклу, можно выразить при помощи следующей формулы $(\exists a)(\exists b)(\exists v)\,\mathrm{PFP}^{\exists}_{Q(u,x)}(\theta)(a, b, v, b, x)$, где

$$\begin{aligned}\theta(a, b, v, u, x) \equiv \neg a = b \wedge& \\ &[\neg(\exists s)Q(a, s) \to u = a \vee u = b \wedge x = v] \wedge \\ &[(\exists s)Q(a, s) \to u = a \vee u = b \wedge (\exists y)\big(Q(b, y) \wedge E(y, x)\big)].\end{aligned}$$

При помощи элемента a будем отличать первый шаг от последующих. На первом шаге в паре с элементов a добавим всевозможные вершины, и на всех следующих шагах будем их сохранять. В паре с элементом b будем добавлять те и только те вершины, в которые есть рёбра из вершин, добавленных в паре с b на предыдущем шаге.

На первом шаге в предикат Q в паре с b попадёт только вершина v, а в паре с a все вершины графа, то есть $Q_1 = \{(b, v)\} \cup \{(a, y) \mid y \in V\}$. На всех последующих шагах будет выполнено:

$$Q_{i+1} = \{(b, x) \mid (\exists y)\big(Q_i(b, y) \wedge E(y, x)\big)\} \cup \{(a, y) \mid y \in V\},$$

таким образом на $(i+1)$-м шаге в предикат в паре с b попадут те и только те вершины, в которые есть ребра из вершин шага с номером i.

Пример 3. Рассмотрим произвольную группу $(G; \cdot^{(2)}, ^{-1(1)}, e^{(0)})$. Тогда проверить является ли рассматриваемая группа циклической можно при помощи следующей формулы $(\exists v)(\forall x)\,\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(x)}(\theta)(v,x)$, где

$$\theta(v,x) \equiv x = v \vee x = v^{-1} \vee Q(x) \vee (\exists u)(Q(u) \wedge (x = v \cdot u \vee x = v^{-1} \cdot u)).$$

На первом шаге в предикат Q попадут два элемента v и v^{-1}, то есть $Q_1 = \{v, v^{-1}\}$. На всех последующих шагах будет выполнено:

$$Q_{i+1} = \{x \mid Q(x) \vee (\exists u)(Q(u) \wedge (x = v \cdot u \vee x = v^{-1} \cdot u))\},$$

таким образом на $(i+1)$-м шаге в предикат попадут те и только те элементы, которые являются v^j или v^{-j}, где $j \leq i+1$.

Определение 3 (Формула логики инфляционной фиксированной точки, [3])**.** *Формулой* IFP*-логики называется формула, построенная по правилам логики первого порядка с использованием оператора инфляционной фиксированной точки* IFP*: если $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула со свободными переменными $\bar{x}$ и $\bar{y}$, содержащая несигнатурный предикатный символ Q, то $\mathrm{IFP}_{Q(\bar{y})}(\varphi)$ — формула исходной сигнатуры, содержащая свободные переменные $\bar{x}$ и $\bar{y}$. При этом длина $\bar{y}$ совпадает с местностью Q.*

Определение 4 (Значение IFP, [3])**.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — это алгебраическая система, $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула с новым предикатным символом Q, где $\bar{y}$ — набор переменных. Зафиксируем значения переменных $\bar{x}$ как $\bar{d} \in |\mathfrak{A}|$. Построим последовательность множеств $Q_i^{\bar{d}}$ следующим образом. Пусть*

$$Q_0^{\bar{d}} = \varnothing; \quad Q_{i+1}^{\bar{d}} = Q_i^{\bar{d}} \cup \{\bar{y} \in |\mathfrak{A}| \mid (\mathfrak{A}, Q_i^{\bar{d}}) \models \varphi(\bar{d}, \bar{y})\},$$

для $i \in \omega$.

Значением частичной фиксированной точки $\mathrm{IFP}_{Q(\bar{y})}(\varphi)(\bar{d})$ является следующее множество

$$Q_*^{\bar{d}} = \bigcup_i Q_i^{\bar{d}}.$$

Пример 4. Рассмотрим систему из примера 3. Тогда проверить, является ли группа G группой кручения, можно при помощи формулы $(\forall u)\,\mathrm{IFP}_{Q(\bar{x})}(\theta)(u,e)$, где

$$\theta(u,x) \equiv x = u \vee (\exists v)(Q(v) \wedge x = v \cdot u).$$

На первом шаге в предикат Q попадёт только элемент v, то есть $Q_1 = \{v\}$. На всех последующих шагах будет выполнено:

$$Q_{i+1} = Q_i \cup \{x \mid (\exists v)(Q(v) \wedge x = v \cdot u)\},$$

таким образом на $(i+1)$-м шаге в предикат попадут те и только те элементы, которые являются v^j, где $j \leq i+1$.

2. Определение бесконечного дискретного предпорядка

Мы рассмотрим алгебраическую систему, в которой есть отношение строгого частичного порядка $<$.

Определение 5 (Предпорядок, [5]). *Нестрогим предпорядком является бинарное отношение на множестве, обладающие свойствами рефлексивности и транзитивности.*

Зададим нестрогий предпорядок на парах следующим образом:

$$\mathrm{leq}(a,b,c,d) = \mathrm{IFP}_{L(u,v)}(\theta_L)(a,b,c,d),$$

где

$$\begin{aligned}\theta_L(u,v,s,t) \equiv\ & [\neg(\exists x)(\exists y)L(x,y) \to u = v]\wedge \\ & [(\exists x)(\exists y)L(x,y) \wedge \neg L(s,t) \to (\forall x)(\forall y)\big(L(x,y)\wedge \\ & \quad (\exists z)(y < z \wedge (\forall z')(y < z' \to z = z' \vee z < z') \to u = x \wedge v = z)\big)]\wedge \\ & [L(s,t) \to L(u,v)].\end{aligned}$$

Отметим, что leq является нестрогим порядком не для всех пар. Например, пары (a,b), для которых выполнено $b < a$, не попадут в предпорядок leq. В дальнейшем всегда будем рассматривать только те пары, которые участвуют в leq.

Кроме того, среди всех цепей будем рассматривать только такие, которые являются цепями подряд идущих элементов.

Лемма 1. *Пусть алгебраическая система имеет отношение строгого частичного порядка $<$, в котором имеются сколь угодно длинные дискретные цепи. Тогда формула* leq *задаёт нестрогий предпорядок на множестве пар.*

Доказательство. Необходимо показать, что выполняются следующие два свойства: рефлексивность и транзитивность.

Рассмотрим произвольную пару элементов (a,b). Для неё будет выполнена формула $\mathrm{leq}(a,b,a,b)$ так как добавление новых пар в множество L продолжается до тех пор, пока не будет выполнена формула $L(a,b)$ согласно второй конъюнкции формулы θ_L. Следовательно, отношение leq является рефлексивным.

Рассмотрим три пары элементов $(a,b),(c,d)$ и (e,f) такие, что выполнены формулы $\mathrm{leq}(a,b,c,d)$ и $\mathrm{leq}(c,d,e,f)$. Пусть пара (a,b) впервые попадает в множество L на i-м шаге, то есть $(a,b) \in L_i$. Пара $(c,d),(e,f)$ попадают на j и k шаге, соответственно. Следовательно, $i \leq j$ и $j \leq k$. Тогда будет выполнено $i \leq k$. Следовательно, выполнено $\mathrm{leq}(a,b,e,f)$, то есть отношение leq является транзитивным. □

Все пары вида (a,a) будут добавлены во множество L на первом шаге. Положение в порядке каждой пары (a,b) задаётся расстоянием между элементами a,b в порядке $<$.

Будем называть пары (a,b) и (c,d) эквивалентными, если они попадают во множество L на одном шаге. Тогда выполнено $\mathrm{leq}(a,b,c,d)$ и $\mathrm{leq}(c,d,a,b)$. Будем говорить, что пара (a,b) меньше или равна пары (c,d), обозначая $(a,b) \leq (c,d)$, если выполнена формула $\mathrm{leq}(a,b,c,d)$. Будем говорить, что пара (a,b) строго меньше пары (c,d), обозначая $(a,b) < (c,d)$, если выполнена формула $\mathrm{leq}(a,b,c,d)\wedge\neg\,\mathrm{leq}(c,d,a,b)$.

Лемма 2. *Пусть алгебраическая система имеет отношение строгого частичного порядка $<$, в котором имеются сколь угодно длинные дискретные цепи. Тогда предпорядок, задаваемый формулой* leq, *является дискретным и в нём имеется бесконечная дискретная цепь подряд идущих элементов.*

Доказательство. Последовательно докажем наличие у предпорядка leq следующих двух свойств: дискретности и отсутствия наибольшего элемента.

Покажем, что порядок является дискретным, то есть для любой пары всегда найдётся следующая. Рассмотрим фактор-порядок. Пусть (u, v) — произвольная пара в предпорядке leq. Так как в порядке $<$ существуют сколь угодно длинные дискретные цепи, то найдётся хотя бы одна цепь, длина которой строго больше расстояния между элементами u и v. В такой цепи существует пара (u', v') такая, что она является эквивалентной паре (u, v) и элемент v' не является последним в цепи. Пусть z — это следующий элемент для v' в порядке $<$. Следовательно, пара (u', z) является следующей парой для (u, v) в предпорядке leq.

Допустим, что существует наибольшая в цепи пара элементов (a, b), то есть для любой другой пары (c, d), сравнимой с (a, b), выполнено $\mathrm{leq}(c, d, a, b)$. В отношении $<$ существуют сколь угодно длинные цепи или бесконечные цепи. Если элемент b является не последним в конечной цепи или принадлежит бесконечной цепи, то существует элемент f такой, что $b < f$. Следовательно, не будет выполнено $\mathrm{leq}(a, f, a, b)$. Противоречие. Пусть элемент b является последним в некоторой конечной цепи. Тогда существует конечная цепь большей длины с первым элементом e и последним f. Следовательно, не будет выполнено $\mathrm{leq}(e, f, a, b)$. Противоречие. □

3. Моделирование работы оператора

Покажем, как можно промоделировать оператор частичной фиксированной точки

$$\mathrm{PFP}_{Q(\bar{x})}(\varphi) \tag{1}$$

для различных семантик. Для этого построим следующий оператор инфляционной фиксированной точки $\mathrm{IFP}_{P(u,v,\bar{y})}(\theta)$.

$$\varphi'(a, b, \bar{y}) \equiv (\varphi)^{Q(\bar{t})}_{P(a,b,\bar{t})}(\bar{y}),$$

$$\begin{aligned}\theta(u, v, \bar{y}) \equiv\ & [\neg(\exists p)(\exists q)(\exists \bar{x})P(p, q, \bar{x}) \to u = v \wedge (\exists p)\varphi'(p, p, \bar{x})] \wedge \\ & [(\exists p)(\exists q)(\exists \bar{x})P(p, q, \bar{x}) \to \\ & \quad \neg(\exists \bar{z})P(u, v, \bar{z}) \wedge (\forall p)(\forall q)(\neg(\exists \bar{z})P(p, q, \bar{z}) \to \mathrm{leq}(u, v, p, q)) \wedge \\ & \quad (\exists s)(\exists t)((\exists \bar{z})P(s, t, \bar{x}) \wedge \\ & \qquad (\forall p)(\forall q)((\exists \bar{z})P(p, q, \bar{z}) \to \mathrm{leq}(p, q, s, t)) \wedge \varphi'(s, t, \bar{y}))],\end{aligned}$$

$$\Psi \equiv \mathrm{IFP}_{P(u,v,\bar{y})}(\theta).$$

Покажем, как можно промоделировать PFP-операторы разных семантик при помощи формул, содержащих IFP-операторы.

Лемма 3. *Пусть P_i — это множества, получаемые при построении оператора* (1)*, а Q_i — при построении оператора Ψ. Пусть i — любое натуральное положительное число такое, что единственным номером меньшим i, на котором значением Q является пустое множество, является 0. Тогда выполнено $P_i(u,v,\bar{x}) = Q_i(\bar{x})$ для любых $\bar{x}$. Здесь пара (u,v) является i-й в цепи предпорядка* leq.

Доказательство. Проведём индукцию по i.

Базис. Если $i = 0$, то $P_0 = \varnothing$ и $Q_0 = \varnothing$. Если $i = 1$, то при построении IFP оператора будет выполнена подформула $\neg(\exists p)(\exists q)(\exists \bar{x})P(p,q,\bar{x})$. Тогда в P_1 будут добавлены такие наборы, что первые два элемента удовлетворяют формуле $u = v$, то есть совпадают. Пары вида (s,s) являются начальными в цепи предпорядке leq. Остальные элементы удовлетворяют формуле $(\exists p)\varphi'(p,p,\bar{x})$. Так как множество P_0 пусто, то можно выбрать любой элемент p'. Тогда

$$P_1(s,s,\bar{y}) \Leftrightarrow \varphi'(p',p',\bar{y}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{y}) \Leftrightarrow Q_1(\bar{y})$$

для любого s.

Индукционный шаг. По индукционному предположению выполнено $P_i(u,v,\bar{x}) = Q_i(\bar{x})$. Докажем для $i+1 \leq j$. Пусть (s,t) — следующая невыбранная пара элементов, тогда

$$P_{i+1}(s,t,\bar{y}) \Leftrightarrow \varphi'(u,v,\bar{y}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{y}) \Leftrightarrow Q_{i+1}(\bar{y}).$$

Пара элементов (s,t) будет выбрана корректно, так как предпорядок дискретный и выполнена подформула $\neg(\exists \bar{z})P(u,v,\bar{z}) \wedge (\forall p)(\forall q)(\neg(\exists \bar{z})P(p,q,\bar{z})$. □

Лемма 4. *Пусть P_i — это множества, получаемые при построении оператора* (1)*, а Q_i — при построении оператора Ψ. Пусть i — любое натуральное положительное число такое, что $Q_i = \varnothing$. Тогда выполнено $\neg P_j(u,v,\bar{x})$ для $j \geq i$ и любых $\bar{x}$. Здесь пара (u,v) является j-й в цепи предпорядка* leq.

Доказательство. Проведём индукцию по j.

Базис: $j = i$. Выполнено $Q_i = \varnothing$. Пусть (u,v) является i-й в некоторой цепи предпорядка leq. Тогда согласно утверждению 3 в P не будет добавлено ни одного набора вида $(u,v,\bar{x})$, то есть выполнено $\neg P_j(u,v,\bar{x})$ для любых $\bar{x}$.

Индукционный шаг. По индукционному предположению выполнено $\neg P_j(u,v,\bar{x})$ для любых $\bar{x}$, если (u,v) — это j-ая пара в предпорядке leq. Докажем для $j+1 \geq i$. Пусть пара (e,f) является $(j+1)$-й в предпорядке leq. На j-м шаге не будет добавлено ни одного набора по индукционному предположению. Следовательно, на $(j+1)$-м шаге подформула

$$(\exists \bar{z})P(s,t,\bar{x}) \wedge (\forall p)(\forall q)((\exists \bar{z})P(p,q,\bar{z}) \rightarrow \mathrm{leq}(p,q,s,t))$$

будет выполнена для тех же элементов s и t, для которых она была выполнена на j-м шаге. Это означает, что на $(j+1)$-м шаге подформула $\varphi'(s,t,\bar{y})$ будет выполнена для тех же наборов $\bar{y}$, для которых она была выполнена на j-м шаге, то есть ни для каких. Следовательно, выполнено $\neg P_{j+1}(e,f,\bar{x})$ для любых $\bar{x}$. □

Теперь можем доказать теорему о моделировании PFP-оператора.

Теорема 1. *Формула* $\mathrm{PFP}_{Q(\bar{x})}(\varphi)(\bar{z})$ *выполнена тогда и только тогда, когда выполнена формула* $M(\bar{z})$*, заданная следующим образом:*

$$M(\bar{z}) \equiv (\exists a)(\exists b)(\exists c)(\exists d)\big(\,\mathrm{leq}(a,b,c,d) \wedge \neg\,\mathrm{leq}(c,d,a,b) \wedge \\ (\forall s)(\forall t)(\mathrm{leq}(a,b,s,t) \wedge \neg\,\mathrm{leq}(s,t,a,b) \to \mathrm{leq}(c,d,s,t)) \wedge \\ (\forall \bar{y})(\Psi(a,b,\bar{y}) \leftrightarrow \Psi(c,d,\bar{y})) \wedge \Psi(a,b,\bar{z})\big).$$

Доказательство. Докажем теорему в прямую сторону. Пусть выполнена формула $\mathrm{PFP}_{Q(\bar{x})}(\varphi)(\bar{z})$. Следовательно, существует минимальный j такой, что $Q_j = Q_{j+1}$ и $\bar{z} \in Q_j$. Тогда можно выбрать пары элементов (a,b) и (c,d) таким образом, что элемент (c,d) является следующим после элемента (a,b) в упорядочении leq и (a,b) являеся j-м элементом в leq. По выбору пар элементов (a,b) и (c,d) будут выполнены следующие подформулы: $\mathrm{leq}(a,b,c,d)$, $\neg\,\mathrm{leq}(c,d,a,b)$ и

$$(\forall s)(\forall t)(\mathrm{leq}(a,b,s,t) \wedge \neg\,\mathrm{leq}(s,t,a,b) \to \mathrm{leq}(c,d,s,t)).$$

Допустим, что существует натуральное число k такое, что $0 < k < j$ и $Q_k = \varnothing$. Это означает, что PFP-оператор зацикливается за k шагов. Тогда по определению зацикливания оператора будет существовать j' такой, что $j' < k$, $Q_{j'} = Q_{j'+1}$, так как результат оператора $\mathrm{PFP}_{Q(\bar{x})}(\varphi)$ не пуст. Кроме того, выполнено $\bar{z} \in Q_{j'}$. Получаем противоречие с тем, что j — минимальный номер шага. Следовательно, единственным номером шага i меньший j, на котором $Q_i = \varnothing$, является 0.

Тогда будет выполнена подформула $(\forall \bar{y})(\Psi(a,b,\bar{y}) \leftrightarrow \Psi(c,d,\bar{y}))$ по утверждению 3, так как $Q_j = Q_{j+1}$. Кроме того, будет выполнена подформула $\Psi(a,b,\bar{z})$, так как $\bar{z} \in Q_j$. Тогда получаем, что выполнены все элементы конъюнкции для выбранных элементов a, b, c и d. Следовательно, выполнена вся формула $M(\bar{z})$.

Докажем в обратную сторону. Пусть выполнена формула $M(\bar{z})$. Следовательно, существуют такие элементы a, b, c и d, что выполнены все элементы конъюнкции. Выполненность подформулы $\mathrm{leq}(a,b,c,d)$ означает, что $(a,b) \leq (c,d)$ в предпорядке leq. Выполненность подформулы $\neg\,\mathrm{leq}(c,d,a,b)$ означает, что $(c,d) \not\leq (a,b)$ в предпорядке leq. Тогда получаем, что в предпорядке leq выполнено $(a,b) < (c,d)$. Выполненность подформулы

$$(\forall s)(\forall t)(\mathrm{leq}(a,b,s,t) \wedge \neg\,\mathrm{leq}(s,t,a,b) \to \mathrm{leq}(c,d,s,t))$$

в совокупности с $(a,b) < (c,d)$ соответствует тому, что пара элементов (c,d) является следующей в предпорядке leq для пары (a,b). Пусть пара (a,b) соответствует некоторому натуральному числу j, тогда пара (c,d) — числу $j+1$.

Допустим, что существует натуральное число k такое, что $0 < k < j$ и $Q_k = \varnothing$. Тогда по утверждению 4 будет выполнено $\neg P_j(u,v,\bar{x})$ для всех $\bar{x}$, где пара элементов (u,v) является j-й в предпорядке leq. Получаем противоречие с тем, что выполнена подформула $\Psi(a,b,\bar{z})$. Тогда по утверждению 3 будет выполнено $Q_j = Q_{j+1}$, так как выполнена подформула $(\forall \bar{y})(\Psi(a,b,\bar{y}) \leftrightarrow \Psi(c,d,\bar{y}))$, и $\bar{z} \in Q_j$, так как выполнено $\Psi(a,b,\bar{z})$. Следовательно, будет выполнена формула $\mathrm{PFP}_{Q(\bar{x})}(\varphi)(\bar{z})$ по определению PFP-оператора. □

Зададим следующую вспомогательную формулу η, которая будет выполнена для тех пар (a, b), которые принадлежат некоторой бесконечной дискретной цепи:

$$\eta(a,b) \equiv (\forall e)(\forall f)(\,\mathrm{leq}(a,b,e,f) \to \\ (\exists e')(\exists f')(\mathrm{leq}(e,f,e',f') \wedge \neg\,\mathrm{leq}(e',f',e,f))).$$

Докажем утверждение о корректности этой формулы.

Лемма 5. *Формула $\eta(a,b)$ выполнена тогда и только тогда, когда пара элементов (a,b) принадлежит неограниченной цепи множеств пар в предпорядке* leq.

Доказательство. Докажем утверждение в прямую сторону. Пусть выполнена формула η для некоторой пары элементов (a,b). Тогда для любой пары элементов (e,f) большей или равной пары (a,b) будет существовать пара (e',f') строго большая (e,f). Допустим, что пара (a,b) не принадлежит бесконечной цепи в предпорядке leq, то есть она принадлежит некоторой конечной цепи. Тогда в такой цепи есть наибольшая пара элементов. Для такой пары не найдётся следующего. Получаем противоречие с существованием (e',f'). Следовательно, пара (a,b) принадлежит бесконечной цепи множеств пар в предпорядке leq.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть пара элементов (a,b) принадлежит бесконечной цепи множеств пар в предпорядке leq. Так как в такой цепи нет максимального, то для любой пары элементов найдётся строго больший, то есть будет выполнена формула $\eta(a,b)$. □

Докажем теперь теоремы, позволяющие промоделировать операторы $\mathrm{PFP}^{\forall}$ и $\mathrm{PFP}^{\exists}$. Сначала рассмотрим случай $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператора.

Теорема 2. *Формула $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(\bar{x})}(\varphi)(\bar{z})$ выполнена тогда и только тогда, когда выполнена формула $M^{\forall}(\bar{z})$, заданная следующим образом:*

$$M^{\forall}(\bar{z}) \equiv (\exists a)(\exists b)\big(\eta(a,b) \wedge (\forall c)(\forall d)(\mathrm{leq}(a,b,c,d) \to \Psi(c,d,\bar{z}))\big).$$

Доказательство. Докажем теорему в прямую сторону. Пусь выполнена формула $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(\bar{x})}(\varphi)(\bar{z})$. Из определения $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператора следует, что для некоторого натурального числа j будет выполнено $Q_{j'}(\bar{z})$ для всех $j' \geq j$. Выберем минимальный из таких j. Тогда в качестве пары элементов (a,b) можно выбрать j-й элемент предпорядка leq, который принадлежит некоторой бесконечной дискретной цепи. Такая цепь существует согласно утверждению 2. Следовательно выполнена подформула $\eta(a,b)$.

Допустим, что существует натуральное число k такое, что $k > 0$ и $Q_k = \varnothing$. Тогда по утверждению 4 для всех $k' \geq k$ будет выполнено $\neg P(u,v,\bar{z})$, где пара элементов (u,v) является k'-й в нестрогом предпорядке leq. Получаем противоречие с тем, что выполнена подформула $(\forall c)(\forall d)(\mathrm{leq}(a,b,c,d) \to \Psi(c,d,\bar{z}))$. Следовательно, на всех шагах построения IFP-оператора будет выполнено утверждение 3. Тогда для любых пар (c,d) таких, что истинно $(a,b) \leq (c,d)$, будет выполнена формула $\Psi(c,d,\bar{z})$. Получаем, что для выбранных элементов a,b, выполнены оба элемента конъюнкции. Следовательно, выполнена вся формула $M^{\forall}(\bar{z})$.

Докажем в обратную сторону. Пусть выполнена формула $M^{\forall}(\bar{z})$. Следовательно, для некоторой бесконечной последовательности элементов из предпорядка leq начинающейся с пары (a,b) набор будет принадлежать отношению P. Пусть пара

(a, b) является j-м элементом в leq. Допустим, что существует $k > 0$ такой, что $Q_k = \varnothing$. Тогда по утверждению 4 будет выполнено $P_k \setminus P_{k-1} = \varnothing$. Следовательно, для всех шагов больших или равных k не будет выполнена формула $\Psi(c, d, \bar{z})$, где пара (c, d) соответствует номеру шага. Противоречие. Следовательно, по утверждению 3 будет выполнено $Q_{j'}(\bar{z})$ для всех $j' \geq j$. Тогда по определению $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператора будет выполнена формула $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(\bar{x})}(\varphi)(\bar{z})$. □

Теперь рассмотрим случай $\mathrm{PFP}^{\exists}$-оператора.

Теорема 3. *Формула* $\mathrm{PFP}^{\exists}_{Q(\bar{x})}(\varphi)(\bar{z})$ *выполнена тогда и только тогда, когда выполнена формула* $M^{\exists}(\bar{z})$*, заданная следующим образом:*

$$M^{\exists}(\bar{z}) \equiv M^{\exists}_1(\bar{z}) \vee M^{\exists}_2(\bar{z}),$$

где

$$M^{\exists}_1(\bar{z}) \equiv (\exists a)(\exists b)\big(\neg a = b \wedge \mathrm{leq}(a, a, a, b) \wedge \neg(\exists \bar{x})\Psi(a, b, \bar{x})\big) \wedge (\exists a)(\exists b)\Psi(a, b, \bar{z}),$$

$$M^{\exists}_2(\bar{z}) \equiv (\forall a)(\forall b)\big(\eta(a, b) \to (\exists c)(\exists d)(\mathrm{leq}(a, b, c, d) \wedge \Psi(c, d, \bar{z}))\big).$$

Доказательство. Докажем теорему в прямую сторону. Пусть выполнена формула $\mathrm{PFP}^{\exists}_{Q(\bar{x})}(\varphi)(\bar{z})$. Из определения $\mathrm{PFP}^{\exists}$-оператора следует, что для бесконечного количества шагов будет выполнено $Q_j(\bar{z})$. Следовательно, для любого сколь угодно большого числа j' найдётся j такое, что $j \geq j'$ и $Q_j(\bar{z})$. Рассмотрим два случая.

Первый случай, не существует шага с номером k такого, что $k > 0$ и $Q_k = \varnothing$. Следовательно, на всех шагах построения IFP-оператора будет выполнено утверждение 3. Тогда по определению $\mathrm{PFP}^{\exists}$-оператора для любой пары элементов (a, b), принадлежащей бесконечной дискретной цепи, будет существовать большая пара (c, d) в этой цепи, для которой выполнено $\Psi(c, d, \bar{z})$. Получаем, что будет выполнена подформула $(\exists c)(\exists d)(\mathrm{leq}(a, b, c, d) \wedge \Psi(c, d, \bar{z}))$. Следовательно, выполнена формула $M^{\exists}_2(\bar{z})$, то есть выполнена вся формула $M^{\exists}(\bar{z})$.

Второй случай, существует шаг с номером k такой, что $k > 0$ и $Q_k = \varnothing$. Выберем наименьший из таких k. Тогда будет выполнена подформула $(\exists a)(\exists b)(\neg a = b \wedge \mathrm{leq}(a, a, a, b) \wedge \neg(\exists \bar{x})\Psi(a, b, \bar{x}))$. Кроме того, это означает, что существует цикл $Q_0 = Q_k$. По определению $\mathrm{PFP}^{\exists}$-оператора его результату будут принадлежать все наборы, которые принадлежат хотя бы одному Q_i при $0 \leq i \leq k$. То есть существует j такое, что $0 < j < k$ и $Q_j(\bar{z})$. Пусть пара элементов (a, b) является j-й в предпорядке leq. Тогда по утверждению 3 выполнена подформула $(\exists a)(\exists b)\Psi(a, b, \bar{z})$. Следовательно, выполнена формула $M^{\exists}_1(\bar{z})$, то есть выполнена вся формула $M^{\exists}(\bar{z})$.

Докажем в обратную сторону. Пусть выполнена формула $M^{\exists}(\bar{z})$. Тогда возможны два случая: когда выполнена подформула $M^{\exists}_1(\bar{z})$ и когда выполнена подформула $M^{\exists}_2(\bar{z})$.

Рассмотрим первый случай. Пусть выполнена подформула $M^{\exists}_1(\bar{z})$. Выполненность подформулы

$$(\exists a)(\exists b)(\neg a = b \wedge \mathrm{leq}(a, a, a, b) \wedge \neg(\exists \bar{x})\Psi(a, b, \bar{x}))$$

соответствует тому, что существует шаг с номером $k > 0$ такой, что $P_k \setminus P_{k-1} = \varnothing$. Выберем наименьший из таких k. Допустим, что существует k' такой, что выполнено $0 < k' < k$ и $Q_{k'} = \varnothing$. Выберем наименьший из таких k'. Тогда по утверждению 4 будет выполнено $P_{k'} \setminus P_{k'-1} = \varnothing$. Получаем противоречие с тем, что k минимальный. Следовательно, при построении $\mathrm{PFP}^{\exists}$-оператора есть зацикливание $Q_0 = Q_k$.

Истинность подформулы $(\exists a)(\exists b)\Psi(a, b, \bar{z})$ означает, что выполнено $\bar{z} \in Q_j$, если пара (a, b) является j-й в предпорядке leq. При этом $0 < j < k$, так как на всех остальных шагах выполнено $\neg P(a, b, \bar{x})$ по утверждению 4. Получаем, что $\mathrm{PFP}^{\exists}$-оператор зацикливается и набор $\bar{z}$ будет повторяться бесконечное количество раз. Следовательно, выполнена формула $\mathrm{PFP}^{\exists}_{Q(\bar{x})}(\varphi)(\bar{z})$.

Рассмотрим второй случай. Пусть выполнена подформула $M_2^{\exists}(\bar{z})$. Для любой пары элементов (a, b), которая принадлежит некоторой бесконечной цепи, найдётся пара элементов (c, d), большая в предпорядке leq, что для неё выполнена формула $\Psi(c, d, \bar{z})$.

Допустим, что существует $k > 0$ такой, что выполнено $Q_k = \varnothing$. Выберем наименьший из таких k. Тогда по утверждению 4 для всех $i \geq k$ будет выполнено $\neg P_i(u, v, \bar{x})$ для любых $\bar{x}$, где (u, v) является i-й парой в предпорядке leq. Получаем противоречие с тем, что для любой пары элементов (a, b), принадлежащей бесконечной цепи, выполнена формула $(\exists c)(\exists d)(\mathrm{leq}(a, b, c, d) \wedge \Psi(c, d, \bar{z}))$.

Тогда из утверждения 3 и отсутствия ненулевого пустого Q_i следует, что для любого числа j существует $j' \geq j$ такое, что $Q_{j'}(\bar{z})$. Следовательно, по определению $\mathrm{PFP}^{\exists}$-оператора будет выполнена формула $\mathrm{PFP}^{\exists}_{Q(\bar{x})}(\varphi)(\bar{z})$. $\square$

Заключение

Мы продемонстрировали, что операторы частичной фиксированной точки трёх рассматриваемых семантик (PFP, $\mathrm{PFP}^{\forall}$ и $\mathrm{PFP}^{\exists}$) можно промоделировать при помощи IFP-операторов в алгебраической система, которая содержит отношение строгого частичного порядка $<$. Приведём некоторые вопросы по данной тематике, которые могут представлять интерес для исследования в будущих работах:

– В формулах, построенных в теоремах, используются вложенные операторы инфляционной фиксированной точки. Можно ли обойтись единственным невложенным оператором? [6]

– Можно ли выполнить преобразования без увеличения размерности операторов? В частности, можно ли это сделать для унарных операторов? [2]

Список литературы

[1] Aho A.V., Ullman J.D. Universality of data retrieval languages // Proc. of 6th Symp. on Principles of Programming Languages. 1979. Pp. 110–120.

[2] Dudakov S.M. On Safety of Unary and Nonunary IFP Operators // Automatic Control and Computer Sciences. 2019. Vol. 53, № 7. Pp. 683–688.

[3] Gurevich Y., Shelah S. Fixed-point extensions of first-order logic // Annals of Pure and Applied Logic. 1986. № 32. Pp. 265–280.

[4] Libkin L. Elements of Finite Model Theory. Berlin: Springer, 2004. 314 p.

[5] Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир, 2020. 488 с.

[6] Дудаков С.М. О безопасности рекурсивных запросов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2012. № 4 (27). С. 71–80.

[7] Дудаков С.М., Тайцлин М.А. Трансляционные результаты для языков запросов в теории баз данных // Успехи математических наук. 2006. Т. 61, № 2 (368). С. 2–65.

[8] Секорин В.С. Об эквивалентности двух семантик PFP-оператора // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 3. С. 41–49. https://doi.org/10.26456/vtpmk598

Образец цитирования

Секорин В.С. Моделирование оператора частичной фиксированной точки // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 2. С. 14–26. https://doi.org/10.26456/vtpmk634

Сведения об авторах

1. **Секорин Всеслав Станиславович**
аспирант кафедры информатики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г.Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, ПМиК.
E-mail: vssekorin@gmail.com

MODELING OF THE PARTIAL FIXED POINT OPERATOR

Sekorin Vseslav Stanislavovich
PhD student at Computer Science department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33, Zhelyabova str.
E-mail: vssekorin@gmail.com

Received 20.05.2022, revised 30.05.2022.

We consider various semantics of partial fixed point (PFP) operator for infinite structures. We consider infinite structures those contains partial order with chains of arbitrary length. We establish that considerable semantics can be modeled by inflationary fixed point operator.

Keywords: partial fixed point, inflationary fixed point, infinite structure, semantic.

Citation

Sekorin V.S., "Modeling of the partial fixed point operator", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 2, 14–26 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk634

References

[1] Aho A.V., Ullman J.D., "Universality of data retrieval languages", *Proc. of 6th Symp. on Principles of Programming Languages*, 1979, 110–120.

[2] Dudakov S.M., "On Safety of Unary and Nonunary IFP Operators", *Automatic Control and Computer Sciences*, **53**:7 (2019), 683–688.

[3] Gurevich Y., Shelah S., "Fixed-point extensions of first-order logic", *Annals of Pure and Applied Logic*, 1986, № 32, 265–280.

[4] Libkin L., *Elements of Finite Model Theory*, Springer, Berlin, 2004, 314 pp.

[5] Goldblatt R., *Toposy. Kategornyj analiz logiki [Topos. Categorical analysis of logic]*, Mir Publ., Moscow, 2020 (in Russian), 488 pp.

[6] Dudakov S.M., "On safety of recursive queries", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2012, № 4 (27), 71–80 (in Russian).

[7] Dudakov S.M., Taitslin M.A., "Collapse results for query languages in database theory", *Russian Mathematical Surveys*, **61**:2 (2006), 195–253.

[8] Sekorin V.S., "On equivalence of two PFP-operator semantics", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 3, 41–49 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk598.