ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 517.521.7, 517.443

О СУММИРОВАНИИ ПО АБЕЛЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ В R^N

Архипов С.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 15.05.2022, после переработки 22.06.2022.

В статье рассматриваются однородные функции, имеющие вид $\theta(\tau)|t|^{\alpha}$, где порядок однородности $\alpha > -n$, а $\theta(\tau)$ – функция на единичной сфере $S^{n-1} = \{t \in R^n, \ |t| = 1\}$. При вычислении преобразования Лапласа этих функций с носителем в остром конусе необходимо получить их явное представление. Это достигается суммированием интегралов по Абелю, а также применением Фурье-анализа на сфере, позволяющих свести вычисления к преобразованиям гипергеометрических функций, необходимых для вычисления пределов при $\varepsilon \to 0$. В статье представлены формулы преобразования Лапласа однородных функций для различных функциональных пространств на единичной сфере.

Ключевые слова: многомерное преобразование Лапласа, однородные функции, суммирование интегралов по Абелю, сферические гармоники, ряд Фурье-Лапласа.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 2. С. 27–44.
https://doi.org/10.26456/vtpmk635

Введение

Пусть Γ – выпуклый острый телесный конус в R^n, имеющий вершину в начале координат. Сопряженный к Γ конус, являющийся также острым, определим как $\Gamma^* = \{x : (x,t) \geq 0, t \in \Gamma\}$. Кроме того, $C = int\Gamma^*$, $\gamma = pr\Gamma$ – проекция конуса Γ на единичную сферу S^{n-1}.

В статье рассматриваются однородные функции, определенные в конусе Γ, и вычисляется их преобразование Лапласа

$$L\left\{\theta(\tau)|t|^{\alpha}\right\} = \int_{\Gamma} \exp\left(-(x,t)\right)\theta(\tau)|t|^{\alpha}\,dt, x \in C. \tag{1}$$

Необходимо отметить работы Владимирова В.С., Дрожжинова Ю.Н. и Завьялова Б.И. (см. например, [2] и литературу в ней), посвященные тауберовым теоремам, в которых преобразование Лапласа рассматривается в достаточно общей ситуации, связанной с обобщенными функциями. Ниже преобразование Лапласа будет вычислено для обычных однородных функций, в которых $\theta(\tau)$ принадлежит различным функциональным пространствам на сфере. Для получения его явного вида используется Фурье-анализ на единичной сфере (см. [7, 9, 12]). Приведем некоторые положения сферического дифференцирования, которые потребуются в дальнейшем.

Определение 1. *Сужение однородного гармонического многочлена $P_l(x)$ порядка $l, x \in R^n$ на единичную сферу S^{n-1}:*

$$|x|^{-l} P_l(x) = Y_l(\xi), \xi = x/|x| \in S^{n-1}, \ l = 0, 1, 2, \dots$$

будем называть сферической гармоникой порядка l.

Лемма 1. *([9], с.30).*

Пусть имеем произвольные сферические гармоники $Y_l(\xi)$ и $Y_k(\xi)$ разного порядка $k, l = 0, 1, 2, \dots, k \neq l$. Тогда справедливо следующее равенство

$$\int_{S^{n-1}} Y_l(\xi) Y_k(\xi) d\xi = 0.$$

Обозначим через

$$L_2\left(S^{n-1}\right) = \left\{\theta(\xi) : \left(\int_{S^{n-1}} |\theta(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} < \infty\right\}$$

гильбертово пространство суммируемых с квадратом функций на сфере со скалярным произведением

$$\int_{S^{n-1}} \theta_1(\xi) \theta_2(\xi) d\xi.$$

Зафиксируем в $L_2\left(S^{n-1}\right)$ ортонормированный базис из сферических гармоник порядка $l : Y_{lj}(\xi), l = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, d(l)$, где $d(l)$ – размерность пространства сферических гармоник порядка l

$$d(l) = \frac{(n + 2l - 2)\Gamma(n + l - 2)}{\Gamma(l + 1)\Gamma(n - 1)}.$$

Лемма 2. *([9], с.31).*

Функции $\{Y_{lj}(\xi)\}$ образуют полную ортонормированную систему функций на сфере S^{n-1}.

Таким образом, каждую функцию из $L_2\left(S^{n-1}\right)$ можно представить с помощью сходящегося в среднем квадратичном ряда Фурье-Лапласа

$$\theta(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(l)} \theta_{lj} Y_{lj}(\xi).$$

Коэффициенты разложения определяются по формулам

$$\theta_{lj} = \int_{S^{n-1}} \theta(\xi)\, Y_{lj}(\xi)\, d\xi.$$

Введем функциональные пространства дробной гладкости для функций из $L_2\left(S^{n-1}\right)$. Основой для их описания служит оператор Лапласа. Для его записи будем использовать сферические координаты:

$\xi_1 = \cos\varphi_1,$

$\xi_2 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2,$

$\xi_3 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3,$

...

$\xi_{n-2} = \sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-3} \cos\varphi_{n-2},$

$\xi_{n-1} = \sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1},$

$\xi_n = \sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1},$

причем $0 \le \varphi_j \le \pi, j = 1, \ldots, n-2, 0 \le \varphi_{n-1} < 2\pi$.

Лапласиан в R^n, рассмотренный в сферических координатах, допускает следующее представление

$$\Delta \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \Delta_\rho - \frac{1}{\rho^2}\Delta_\xi,$$

в котором $\Delta_\rho = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}$ – радиальная часть Δ, а

$$\Delta_\xi = -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{q_j(\sin\varphi_j)^{n-j-1}} \frac{\partial}{\partial\varphi_j}\left(\sin^{n-j-1}(\varphi_j)\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right),$$

$$q_1 = 1, q_j = \prod_{k=1}^{j-1} (\sin\varphi_k)^2, \quad \text{при } j > 1$$

– сферический оператор Лапласа или так называемый оператор Бельтрами-Лапласа.

Лемма 3. *([6], с.144) Сферические гармоники $Y_l(\xi)$ являются собственными функциями оператора Δ_ξ, причем*

$$\Delta_\xi Y_l(\xi) = l(l+n-2)\, Y_l(\xi), l = 0, 1, 2, \ldots$$

Определение 2. *Оператор T, определенный равенством*

$$T\theta = \sum_{l,j} t_l \theta_{lj} Y_{lj}(\xi),$$

будем называть мультипликаторным, а его спектр $\{t_l\}$ – мультипликатором по сферическим гармоникам ([13], p. 510).

Рассмотрим мультипликаторный оператор $(E + \Delta_\xi)^{r/2}$ с мультипликатором $\left\{(1 + l(l+n-2))^{r/2}\right\}$, где E – единичный оператор.

Определение 3. *([8], с. 24) Если $0 < r < \infty$, то в пространство $L_2^r\left(S^{n-1}\right)$ будем включать те функции $\theta(\xi)$, определенные на сфере, для которых*

$$\left(E+\Delta_\xi\right)^{r/2}\theta(\xi)\in L_2\left(S^{n-1}\right).$$

Ниже в формулировках теорем присутствуют функции $\theta(\tau)$, заданные на γ. Будем использовать для них продолжение четным образом на $-\gamma$. Тогда их разложение в ряд Фурье-Лапласа будет иметь вид:

$$\theta(\tau)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{d(2l)}\theta_{2l,j}Y_{2l,j}(\tau). \tag{2}$$

Коэффициенты разложения (2) вычисляются по формулам

$$\theta_{2l,j}=\int_{S_+^{n-1}(\xi)}\theta(\tau)\,I(\gamma)\,Y_{2l,j}(\tau)\,d\tau,$$

где $S_+^{n-1}(\xi)=\left\{\tau\in S^{n-1}:(\xi,\tau)>0\right\}$, а $I(\gamma)$ – индикатор множества γ.

1. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $\theta(\tau)\in C^\infty\left(S^{n-1}\right)$ – пространству бесконечно дифференцируемых функций с носителем на множестве γ. Тогда при $\alpha>-n$ и $\alpha+n\neq 1,3,5,\ldots$*

$$\int_\Gamma \exp\left(-(x,t)\right)\theta(\tau)\,|t|^\alpha\,dt= \tag{3}$$

$$=\frac{2^{\alpha+n-1}\pi^{n/2}}{|x|^{\alpha+n}\,cos\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)}\sum_{l,j}(-1)^l\frac{\Gamma\left(l+\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\Gamma\left(l-\frac{\alpha}{2}\right)}\theta_{2l,j}Y_{2l,j}(\xi),\xi\in prC.$$

Замечание 1. Отметим, что при чётных $\alpha>0$ суммирование ряда по l начинается с $\alpha/2+1$.

Замечание 2. В статье [1], посвященной аналогичным вопросам, в формулировке и доказательстве теоремы 1 допущены ошибки набора текста.

Поскольку преобразование Лапласа представляется с помощью рядов Фурье-Лапласа с мультипликаторами, то порядок однородной функции связан с гладкостью функции $\theta(\tau)$ на сфере.

Теорема 2. *Пусть функция $\theta(\tau)\in L_2^r\left(S^{n-1}\right)$, $supp\left(\theta(\tau)\right)=\gamma$, чьи производные до порядка r существуют и принадлежат пространству $L_2\left(S^{n-1}\right)$ суммируемых с квадратом функций. Тогда (3) справедливо при $r\geq\alpha+n/2$ и $\alpha\geq -n/2$, а также при $\alpha+n\neq 1,3,5,\ldots$*

2. Вспомогательные утверждения

В следующей лемме осуществляется двойное преобразование гипергеометрических функций, позволяющее при суммировании интегралов по Абелю перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$.

Лемма 4. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}{}_2F_1(a,b;c;z)=$$

$$=\left(\frac{1}{z}\right)^a\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(b-c+1)}\times$$
$$\times{}_2F_1\left(a,a-c+1;a-b+1;\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{z}\right)^b\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a-c+1)}\times$$
$$\times{}_2F_1\left(b,b-c+1;b-a+1;\frac{1}{z}\right)+$$
$$+(1-z)^{c-a-b}\cdot\left\{\left(\frac{1}{z}\right)^{c-a}\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a-b+1)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(1-b)}\times\right.$$
$$\times{}_2F_1\left(c-a,1-a;b-a+1;\frac{1}{z}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{z}\right)^{c-b}\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a-b+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(1-a)}\times$$
$$\left.\times{}_2F_1\left(c-b,1-b;a-b+1;\frac{1}{z}\right)\right\}. \quad (4)$$

Доказательство: Для преобразования применим формулу (9.131.2) из [3] :

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}{}_2F_1(a,b;c;z)=$$
$$=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{}_2F_1(a,b;a+b-c+1;1-z)+\right.$$
$$\left.+\frac{(1-z)^{c-a-b}\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}{}_2F_1(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z)\right]=$$
$$=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{}_2F_1(a,b;a+b-c+1;1-z)+$$
$$+(1-z)^{c-a-b}\Gamma(a+b-c)\,{}_2F_1(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z)=$$

заменим гипергеометрические функции в последнем равенстве с помощью соотношения (9.132.1) из [3]:

$$
= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \times
$$
$$
\times \left[\left(\frac{1}{z}\right)^{a} \frac{\Gamma(a+b-c+1)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\,\Gamma(b-c+1)} {}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{z}\right) + \right.
$$
$$
\left. + \left(\frac{1}{z}\right)^{b} \frac{\Gamma(a+b-c+1)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)} {}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{z}\right) \right] +
$$
$$
+ (1-z)^{c-a-b}\,\Gamma(a+b-c) \left\{ \left(\frac{1}{z}\right)^{c-a} \frac{\Gamma(c-a-b+1)\,\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\,\Gamma(1-b)} \times \right.
$$
$$
\times {}_2F_1\left(c-a, 1-a; b-a+1; \frac{1}{z}\right) +
$$
$$
\left. + \left(\frac{1}{z}\right)^{c-b} \frac{\Gamma(c-a-b+1)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(1-a)} {}_2F_1\left(c-b, 1-b; a-b+1; \frac{1}{z}\right) \right\}.
$$

После преобразований получим правую часть (4).

В дальнейшем при вычислении интегралов возникает необходимость устранения особенности в нуле. В книге [4], п.1.2 для этого применяют интегрирование по двойным петлям, позволяющее построить аналитическое продолжение по параметрам. Ниже будем использовать следующие формулы с интегралами по двойным петлям, устраняющие ограничения на параметры

$$
\int_{(0)}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \beta > 0, \alpha \neq 0, -1, -2, \ldots \tag{5}
$$

Путь интегрирования показан на рисунке 2 в [4], а аналитическое продолжение бета-функции дается формулой (9a) из [4].

Кроме того, расширим действие формулы 5.2.3(2) из [5]. Применяя также интегрирование по двойной петле, охватывающее точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ в комплексной плоскости, будем иметь:

$$
{}_3F_2(\beta, \alpha_1, \alpha_2; \beta+\sigma, \gamma_1; z) = \frac{\Gamma(\sigma+\beta)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\sigma)} \times
$$
$$
\times \int_{(0)}^{1} t^{\beta-1}(1-t)^{\sigma-1}\, {}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \gamma_1; zt)\,dt, \tag{6}
$$

справедливую для всех значений β и $\sigma > 0$, для которых функции от них имеют смысл.

3. Доказательств теорем

Доказательство теоремы 1.

Запишем формулу преобразования Лапласа однородной функции порядка α:

$$
L\{\theta(\tau)\,|t|^{\alpha}\} = \int_{\Gamma} e^{-(x,t)}\theta(\tau)\,|t|^{\alpha}\,dt, x \in C.
$$

В дальнейшем для получения конечного результата применим суммирование интегралов по Абелю. Будем использовать утверждение о том, что если функция $f(t) \in L^1(R^n)$, то (см. [12], с.12):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R^n} f(t)\, e^{-\varepsilon |t|} dt = \int_{R^n} f(t)\, dt, \varepsilon > 0.$$

Для обеспечения сходимости интеграла в (1) будем рассматривать какой-либо открытый подконус C' конуса C, т.е. для $\xi \in prC'$ имеем после перехода к полярным координатам в интеграле:

$$L\{\theta(\tau)|t|^\alpha\} = \int_\gamma \int_0^\infty e^{-(\xi,\tau)|x||t|} \theta(\tau)|t|^{\alpha+n-1} d|t|\, d\tau =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\gamma \int_0^\infty e^{-(\xi,\tau)|x||t|} e^{-\varepsilon|t|} \theta(\tau)|t|^{\alpha+n-1} d|t|\, d\tau.$$

Сделаем замену переменной $r = |x|\,|t|$ и применим во внутреннем интеграле формулу (3.381.4) [3]. Тогда

$$L\{\theta(\tau)|t|^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{|x|^{\alpha+n}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\gamma \frac{\theta(\tau)}{((\xi,\tau)+\varepsilon)^{\alpha+n}} d\tau = \tag{7}$$

$$= \frac{1}{|x|^{\alpha+n}} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\varepsilon^{\alpha+n}} \int_\gamma \frac{\theta(\tau)}{((\xi,\tau)/\varepsilon+1)^{\alpha+n}} d\tau.$$

Вычислим отдельно выражение под знаком предела в (7), обозначив его через I. Применим биномиальное разложение в ряд, справедливое при $|x| < 1$:

$$(1+x)^{-\nu} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)\Gamma(k+1)} x^k.$$

Предполагая сначала, что $\varepsilon > 1$, будем иметь

$$I = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\varepsilon^{\alpha+n}} \int_\gamma \frac{\theta(\tau)}{((\xi,\tau)/\varepsilon+1)^{\alpha+n}} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{\alpha+n}} \int_\gamma \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+n+k)}{\Gamma(k+1)} ((\xi,\tau)/\varepsilon)^k \theta(\tau)\, d\tau.$$

Поменяем местами знаки суммирования и интегрирования, что возможно в силу абсолютной и равномерной сходимости ряда по k. Тогда

$$I = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+n+k)}{\varepsilon^k \Gamma(k+1)} \int_\gamma (\xi,\tau)^k \theta(\tau)\, d\tau.$$

Подставим разложение (2) для $\theta(\tau)$ в ряд Фурье-Лапласа по сферическим гармоникам в подынтегральное выражение. После этого вынесем знак суммы за знак интеграла (обоснование ниже):

$$I = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+n+k)}{\varepsilon^k \Gamma(k+1)} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} \int_{S_+^{n-1}(\xi)} (\xi,\tau)^k Y_{2l,j}(\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (1.19) из [10]

$$\int_{S^{n-1}} |(\xi,\tau)|^k\, Y_{2l,j}(\tau)\, d\tau = 2\int_{S_+^{n-1}(\xi)} (\xi,\tau)^k\, Y_{2l,j}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{2^{1-k}\pi^{n/2}\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{2l+n+k}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{k-2l}{2}\right)} Y_{2l,j}(\xi),$$

если $k-2l \neq -2,-4,\ldots$, в противном случае интеграл равен нулю. Применяя последнюю формулу в (8), получим

$$I = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi)\, \frac{2^{-k}\pi^{n/2}\Gamma(\alpha+n+k)}{\varepsilon^k \Gamma\left(\frac{2l+n+k}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{k-2l}{2}\right)}. \tag{9}$$

Вычислим отдельно ряды в (9) по четным и нечетным k, обозначив их соответственно $I_{\text{чет}}$ и $I_{\text{нечет}}$. Тогда

$$I_{\text{чет}} = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi)\, \frac{2^{-2k}\pi^{n/2}\Gamma(\alpha+n+2k)}{\varepsilon^{2k} \Gamma\left(\frac{2l+n+2k}{2}\right)\Gamma(1+k-l)}.$$

Отметим, что если $k-l=-1,-2,-3,\ldots$, то $1/\Gamma(1+k-l)=0$. Введем новый индекс суммирования: $K=k-l$. Перепишем сумму ряда по k и поменяем местами знаки суммирования:

$$I_{\text{чет}} = \frac{\pi^{n/2}}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \sum_{K=0}^{\infty} \frac{2^{-(2K+2l)}\Gamma\left(2(K+l+(\alpha+n)/2)\right)}{\varepsilon^{2K+2l}\Gamma\left(\frac{4l+2K+n}{2}\right)\Gamma(K+1)}.$$

Преобразуем гамма-функцию в числителе по формуле двойного аргумента:

$$I_{\text{чет}} = \frac{\pi^{(n-1)/2}2^{\alpha+n-1}}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{l,j} (1/\varepsilon)^{2l}\, \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \times$$

$$\times \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left((K+l+(\alpha+n)/2)\right)\Gamma\left((K+l+(\alpha+n+1)/2)\right)}{\varepsilon^{2K}\Gamma\left(K+2l+\frac{n}{2}\right)\Gamma(K+1)}.$$

В полученном равенстве ряд по K при $\varepsilon>1$ является гипергеометрическим. Используя его обозначение , получаем

$$I_{\text{чет}} = \frac{\pi^{(n-1)/2}2^{\alpha+n-1}}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{l,j} \frac{1}{\varepsilon^{2l}} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(l+(\alpha+n)/2?\right)\Gamma\left(l+(\alpha+n+1)/2\right)}{\Gamma\left(2l+\frac{n}{2}\right)} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(l+\frac{\alpha+n}{2}, l+\frac{\alpha+n+1}{2}; 2l+\frac{n}{2}; \frac{1}{\varepsilon^2}\right). \tag{10}$$

Для применения формулы из леммы 4 введем обозначения для аргументов гипергеометрической функции

$$a = l + \frac{\alpha + n}{2}, b = l + \frac{\alpha + n + 1}{2}, c = 2l + \frac{n}{2}. \tag{11}$$

Тогда (10) можно переписать в виде:

$$I_{\text{чет}} = \frac{\pi^{(n-1)/2} 2^{\alpha+n-1}}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{l,j} \frac{1}{\varepsilon^{2l}} \theta_{2l,j} Y_{2l,j} (\xi) \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} {}_2F_1 \left(a, b; c; \frac{1}{\varepsilon^2} \right).$$

Используя (4) из леммы 4, получим

$$\begin{gathered}
I_{\text{чет}} = \frac{\pi^{(n-1)/2} 2^{\alpha+n-1}}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{l,j} \frac{1}{\varepsilon^{2l}} \theta_{2l,j} Y_{2l,j} (\xi) \times \\
\times \left(\left(\varepsilon^2\right)^a \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(b-c+1)} {}_2F_1 \left(a, a-c+1; a-b+1; \varepsilon^2\right) + \right. \\
+ \left(\varepsilon^2\right)^b \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a-c+1)} {}_2F_1 \left(b, b-c+1; b-a+1; \varepsilon^2\right) + \\
+ \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)^{c-a-b} \left\{ \left(\varepsilon^2\right)^{c-a} \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a-b+1)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(1-b)} \times \right. \\
\times {}_2F_1 \left(c-a, 1-a; b-a+1; \varepsilon^2\right) + \\
\left. \left. + \left(\varepsilon^2\right)^{c-b} \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a-b+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(1-a)} {}_2F_1 \left(c-b, 1-b; a-b+1; \varepsilon^2\right) \right\} \right).
\end{gathered}$$

Вычислим степени ε, подставив для упрощений выражения (11):

$$\begin{gathered}
I_{\text{чет}} = \pi^{(n-1)/2} 2^{\alpha+n-1} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j} (\xi) \times \\
\times \left(\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(b-c+1)} {}_2F_1 \left(a, a-c+1; a-b+1; \varepsilon^2\right) + \right. \\
+ \varepsilon \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a-c+1)} {}_2F_1 \left(b, b-c+1; b-a+1; \varepsilon^2\right) + \\
+ \left(\varepsilon^2 - 1\right)^{c-a-b} \left\{ \varepsilon \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a-b+1)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(1-b)} \times \right. \\
\times {}_2F_1 \left(c-a, 1-a; b-a+1; \varepsilon^2\right) + \\
\left. \left. + \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a-b+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(1-a)} {}_2F_1 \left(c-b, 1-b; a-b+1; \varepsilon^2\right) \right\} \right).
\end{gathered}$$

После преобразований получили справедливое при всех $\varepsilon \geq 0$ выражение для $I_{\text{чет}}$. Поэтому можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\text{чет}} = \pi^{(n-1)/2} 2^{\alpha+n-1} \times$$
$$\times \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \left(\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a-b)\Gamma(1-(c-a-b))\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(1-(c-b))} + \right.$$
$$\left. + (-1)^{c-a-b} \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(1-(a+b-c))\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(1-a)} \right).$$

Упростим полученное выражение, применив формулу 8.334.3 [3]:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\text{чет}} = \pi^{(n-1)/2} 2^{\alpha+n-1} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)} \left(\frac{\sin\pi(c-b)}{\sin\pi(c-a-b)} + \right.$$
$$\left. + (-1)^{c-a-b} \frac{\sin\pi a}{\sin\pi(a+b-c)} \right).$$

Подставив выражения (11) для параметров, будем иметь

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\text{чет}} = \pi^{(n-1)/2} 2^{\alpha+n-1} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \frac{\Gamma\left(l+\frac{\alpha+n}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(l-\frac{\alpha}{2}\right)} \times$$
$$\times \left(\frac{\sin\pi\left(l-\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sin\pi\left(-\alpha-\frac{n+1}{2}\right)} + (-1)^{-\alpha-\frac{n+1}{2}} \frac{\sin\pi\left(l+\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\sin\pi\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\right)} \right) =$$
$$= \pi^{n/2} 2^{\alpha+n-1} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \frac{(-1)^l\,\Gamma\left(l+\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\Gamma\left(l-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\pi\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\right)} \left(\sin\pi\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + (-1)^{-\alpha-\frac{n+1}{2}} \sin\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right) \right).$$

После применения формулы Эйлера получим итоговый предел для $I_{\text{чет}}$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\text{чет}} = \pi^{n/2} 2^{\alpha+n-1} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \frac{(-1)^l\,\Gamma\left(l+\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\Gamma\left(l-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\pi\left(\alpha+\frac{n}{2}\right)} \left(\cos\frac{\pi\alpha}{2} - \right.$$
$$\left. - \sin\pi\left(\alpha+\frac{n}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right) - i\cos\pi\left(\alpha+\frac{n}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right) \right).$$

Теперь перейдем к вычислению суммы ряда (9) по нечетным k :

$$I_{\text{нечет}} = -\frac{\pi^{(n-1)/2}}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \frac{2^{-2k-1}\Gamma(2k+\alpha+n+1)}{\varepsilon^{2k+1}\Gamma\left(k+l+\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(k-l+\frac{3}{2}\right)}.$$

Применим формулу для гамма-функции двойного аргумента

$$I_{\text{нечет}} = -\frac{\pi^{(n-1)/2}}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \frac{2^{\alpha+n-1} \Gamma\left(k+\frac{\alpha+n+1}{2}\right) \Gamma\left(k+\frac{\alpha+n}{2}+1\right)}{\varepsilon^{2k+1} \Gamma\left(k+l+\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(k-l+\frac{3}{2}\right)}.$$

Для сведения к формуле гипергеометрической функции добавим в числитель и знаменатель множители $\Gamma(k+1)$ и поменяем местами знаки суммирования (обоснование ниже):

$$I_{\text{нечет}} = -\frac{2^{\alpha+n-1}\pi^{(n-1)/2}}{\varepsilon^{\alpha+n+1}} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k+\frac{\alpha+n+1}{2}\right) \Gamma\left(k+\frac{\alpha+n}{2}+1\right) \Gamma(k+1)}{\varepsilon^{2k} \Gamma\left(k+l+\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(k-l+\frac{3}{2}\right) \Gamma(k+1)}.$$

При $\varepsilon > 1$ ряд по k является обобщенным гипергеометрическим. Он равномерно и абсолютно сходится, когда модуль аргумента меньше единицы. Используя обозначение гипергеометрического ряда, получаем

$$I_{\text{нечет}} = -\frac{2^{\alpha+n-1}\pi^{(n-1)/2}}{\varepsilon^{\alpha+n+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(l+\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}-l\right)} \times \\ \times \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi)\, {}_3F_2\left(\frac{\alpha+n+1}{2}, \frac{\alpha+n}{2}+1, 1; l+\frac{n+1}{2}, \frac{3}{2}-l; \frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Запишем обобщенный ряд с помощью интеграла по двойной петле (6):

$$I_{\text{нечет}} = -\frac{2^{\alpha+n-1}\pi^{(n-1)/2}}{\varepsilon^{\alpha+n+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(l+\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}-l\right)} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \times \\ \times \int_{(0)}^{1} (1-t)^{l+\frac{n+1}{2}-1}\, {}_2F_1\left(\frac{\alpha+n+1}{2}, \frac{\alpha+n}{2}+1; \frac{3}{2}-l; \frac{t}{\varepsilon^2}\right) dt.$$

Для применения формулы (4) из леммы 4 введем следующие обозначения аргументов гипергеометрической функции

$$a = \frac{\alpha+n+1}{2}, b = \frac{\alpha+n}{2}+1, c = \frac{3}{2}-l. \tag{12}$$

Тогда последнее равенство можно переписать в виде:

$$I_{\text{нечет}} = -\frac{2^{\alpha+n-1}\pi^{(n-1)/2}}{\varepsilon^{\alpha+n+1}} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma\left(l+\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(c)} \times \\ \times \int_{(0)}^{1} (1-t)^{l+\frac{n+1}{2}-1}\, {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{t}{\varepsilon^2}\right) dt.$$

Как и выше, будем использовать для преобразований соотношение (4) из леммы 4:

$$I_{\text{нечет}} = -\frac{2^{\alpha+n-1}\pi^{(n-1)/2}}{\varepsilon^{\alpha+n+1}} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \frac{1}{\Gamma\left(l+\frac{n-1}{2}\right)} \times$$
$$\times \int_{(0)}^{1} (1-t)^{l+\frac{n+1}{2}-1} \left\{ \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(b-c+1)} \times \right.$$
$$\times \left(\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^a {}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; \frac{\varepsilon^2}{t}\right) +$$
$$+ \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a-c+1)} \times$$
$$\times \left(\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^b {}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; \frac{\varepsilon^2}{t}\right) +$$
$$+ \left(1-\frac{t}{\varepsilon^2}\right)^{c-a-b} \left[\left(\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^{c-a} \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a-b+1)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(1-b)} \times \right.$$
$$\times {}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; \frac{\varepsilon^2}{t}\right) +$$
$$+ \left(\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^{c-b} \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a-b+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-b)\Gamma(1-a)} \times$$
$$\left.\left.\times {}_2F_1\left(c-b, 1-b; a-b+1; \frac{\varepsilon^2}{t}\right)\right]\right\} dt.$$

Подставляя обозначения (12), получим степени выражений с ε :

$$I_{\text{нечет}} = -\frac{2^{\alpha+n-1}\pi^{(n-1)/2}}{\varepsilon^{\alpha+n+1}} \sum_{l,j} \theta_{2l,j} Y_{2l,j}(\xi) \frac{1}{\Gamma\left(l+\frac{n-1}{2}\right)} \times$$
$$\times \int_{(0)}^{1} (1-t)^{l+\frac{n+1}{2}-1} \left\{ \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(b-c+1)} \times \right.$$
$$\times \left(\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^a {}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; \frac{\varepsilon^2}{t}\right) +$$
$$+ \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a-c+1)} \times$$
$$\times \left(\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^b {}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; \frac{\varepsilon^2}{t}\right) +$$
$$+ \left(1-\frac{t}{\varepsilon^2}\right)^{c-a-b} \left[\left(\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^{c-a} \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a-b+1)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(1-b)} \times \right.$$
$$\times {}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; \frac{\varepsilon^2}{t}\right) +$$

$$+\left(\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^{c-b}\frac{\Gamma(a+b-c)\,\Gamma(c-a-b+1)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-b)\,\Gamma(1-a)}\times$$
$$\times{}_2F_1\left(c-b,1-b;a-b+1;\frac{\varepsilon^2}{t}\right)\Bigg]\Bigg\}\,dt.$$

Перейдем к пределу по $\varepsilon\to 0$, т.к. выражение в правой части $I_{\text{нечет}}$ определено для любого $\varepsilon\geq 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\text{нечет}}=-2^{\alpha+n-1}\pi^{(n-1)/2}\sum_{l,j}\theta_{2l,j}Y_{2l,j}(\xi)\,\frac{1}{\Gamma\left(l+\frac{n-1}{2}\right)}\times$$
$$\times\left(\int_{(0)}^{1}(1-t)^{l+\frac{n+1}{2}-1}\,t^{1-\frac{\alpha+n+1}{2}-1}dt\times\right.$$
$$\times\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a-b)\,\Gamma(a+b-c+1)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)\,\Gamma(b-c+1)}+$$
$$+(-1)^{c-a-b}\int_{(0)}^{1}(1-t)^{l+\frac{n+1}{2}-1}\,t^{1-\frac{\alpha+n+1}{2}-1}dt\times$$
$$\left.\times\frac{\Gamma(a+b-c)\,\Gamma(1-(a+b-c))\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-b)\,\Gamma(1-a)}\right).$$

Применим формулу (5) для вычисления интеграла по двойной петле:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\text{нечет}}=-2^{\alpha+n-1}\pi^{(n-1)/2}\sum_{l,j}\theta_{2l,j}Y_{2l,j}(\xi)\times$$
$$\times\frac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)}\left(\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)\,\Gamma(c-a-b)\,\Gamma(1-(c-a-b))}{\Gamma(c-b)\,\Gamma(1-(c-b))\,\Gamma\left(l+\frac{n-1}{2}+1-\frac{\alpha+n+1}{2}\right)}+\right.$$
$$\left.+(-1)^{c-a-b}\,\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha+n+1}{2}\right)\Gamma(a+b-c)\,\Gamma(1-(a+b-c))}{\Gamma\left(l+\frac{n-1}{2}+1-\frac{\alpha+n+1}{2}\right)\Gamma(1-a)}\right).$$

Подставим выражения для параметров (12) и воспользуемся формулой (8.334.3) из [3] :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\text{нечет}}=-2^{\alpha+n-1}\pi^{n/2}\sum_{l,j}\theta_{2l,j}Y_{2l,j}(\xi)\times$$
$$\times\frac{1}{\Gamma\left(1-l-\frac{\alpha+n}{2}\right)}\left(\frac{\pi\sin\pi\left(\frac{1}{2}-l-\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\sin\pi\left(\frac{\alpha+n+1}{2}\right)\sin\pi(-l-\alpha-n)}+\right.$$
$$\left.+(-1)^{l}(-1)^{-(\alpha+n)}\,\frac{\pi}{\Gamma\left(l-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\pi(l+\alpha+n)}\right).$$

Ряд несложных преобразований приводит предел к виду:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\text{нечет}} = 2^{\alpha+n-1}\pi^{n/2}\sum_{l,j}(-1)^l\,\theta_{2l,j}Y_{2l,j}(\xi)\times$$
$$\times\frac{\Gamma\left(l+\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\Gamma\left(l-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)}\frac{1-(-1)^{-(\alpha+n)}}{2}.$$

Записав по формуле Эйлера степень мнимой единицы, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\text{нечет}} = 2^{\alpha+n-1}\pi^{n/2}\sum_{l,j}(-1)^l\,\theta_{2l,j}Y_{2l,j}(\xi)\times$$
$$\times\frac{\Gamma\left(l+\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\Gamma\left(l-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{1-\cos\pi(\alpha+n)+i\sin\pi(\alpha+n)}{2\cos\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)}.$$

После вычислений пределов $I_{\text{чет}}$ и $I_{\text{нечет}}$, запишем их сумму

$$L\left\{\theta(\tau)|t|^\alpha\right\} = \frac{1}{|x|^{\alpha+n}}\lim_{\varepsilon\to 0} I = \frac{1}{|x|^{\alpha+n}}\left(\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\text{чет}} + \lim_{\varepsilon\to 0} I_{\text{нечет}}\right) =$$
$$= \frac{2^{\alpha+n-1}\pi^{n/2}}{|x|^{\alpha+n}}\sum_{l,j}(-1)^l\,\theta_{2l,j}Y_{2l,j}(\xi)\frac{\Gamma\left(l+\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\Gamma\left(l-\frac{\alpha}{2}\right)}\times$$
$$\times\left(\frac{\cos\frac{\pi\alpha}{2}-\sin\pi\left(\alpha+\frac{n}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)-i\cos\pi\left(\alpha+\frac{n}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\cos\pi\left(\alpha+\frac{n}{2}\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\cos\pi(\alpha+n)+i\sin\pi(\alpha+n)}{2\cos\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)}\right).$$

Проведем преобразования с помощью тригонометрических формул:

$$L\left\{\theta(\tau)|t|^\alpha\right\} = \frac{2^{\alpha+n-1}\pi^{n/2}}{|x|^{\alpha+n}}\sum_{l,j}(-1)^l\,\theta_{2l,j}Y_{2l,j}(\xi)\frac{\Gamma\left(l+\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\Gamma\left(l-\frac{\alpha}{2}\right)}\times$$
$$\times\left(\frac{\cos\frac{\pi\alpha}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}-cos\pi\left(\frac{3\alpha}{2}+n\right)\right)}{\cos\pi\left(\alpha+\frac{n}{2}\right)}-i\sin\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin^2\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\cos\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)}+i\sin\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)\right) =$$
$$= \frac{2^{\alpha+n-1}\pi^{n/2}}{|x|^{\alpha+n}\cos\pi\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)}\sum_{l,j}(-1)^l\frac{\Gamma\left(l+\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\Gamma\left(l-\frac{\alpha}{2}\right)}\theta_{2l,j}Y_{2l,j}(\xi).$$

В последнем выражении получен мультипликаторный оператор, причем его спектр имеет порядок

$$m_l = \frac{\Gamma\left(l + \frac{\alpha+n}{2}\right)}{\Gamma\left(l - \frac{\alpha}{2}\right)} \sim l^{\alpha+n/2} \text{ при } l \to \infty.$$

Т.к. $\theta(\tau) \in \mathrm{C}^{\infty}\left(S^{n-1}\right)$, то по теореме 4.8 из [10] имеем

$$\theta_{2l,j} = O\left(l^{-k}\right), \forall k > 0.$$

В силу этого получим абсолютно и равномерно сходящийся ряд в (3). Это обосновывает перемены знаков суммирования и интегрирования и внесение предела под знак суммы в доказательстве теоремы.

Отметим, что полученное представление в ряд Фурье-Лапласа является сходящимся $\xi \in prC$, а также для любых $\xi \in S^{n-1}$, т.е. допускает продолжение на всю сферу.

Доказательство теоремы 2.

Все произведенные вычисления в теореме 1 остаются в силе. Исследуем на сходимость ряд Фурье-Лапласа в (3).

Необходимо обеспечить достаточный порядок гладкости полученной функции на сфере. Мультипликатор m_l соответствует операции сферического дифференцирования порядка $\alpha + n/2$. Для того, чтобы ряд был сходящимся в $L_2\left(S^{n-1}\right)$ необходимо потребовать, чтобы $\theta(\tau) \in L_2^r\left(S^{n-1}\right)$, где $r \geq \alpha + n/2$, а для неотрицательности порядка производной $\alpha + n/2 \geq 0$. (см., например, [6], с.144)

Замечание 3. Отметим, что сходимость в среднем является достаточным условием для перехода к пределу под знаками интегралов и суммы в доказательстве теоремы.

Заключение

Многомерные преобразования Лапласа являются одним из важных инструментов в математике. Основной задачей при этом является получение явного вида изображений. В статье получены формулы преобразования Лапласа от однородных функций, имеющих вид $\theta(\tau)|t|^{\alpha}$ и принадлежащих различным функциональным пространствам на единичной сфере.

Список литературы

[1] Архипов С.В. О суммировании по Абелю обратного преобразования Фурье однородных функций в R^n // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 98–107. https://doi.org/10.26456/vtpmk547

[2] Владимиров В.С., Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986. 304 с.

[3] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.

[4] Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М.: Из-во иностранной литературы, 1963. 467 с.

[5] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.

[6] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматлит, 1962. 254 с.

[7] Muller C. Spherical Harmonics. Series: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 17. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1966. 45 p.

[8] Пламеневский Б.А. Алгебры псевдодифференциальных операторов. М.: Наука, 1986. 256 с.

[9] Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов: Изд-во Ростов. ун-та, 1984. 208 с.

[10] Самко С.Г. Обобщённые риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы с однородными характеристиками, их символы и обращение // Труды Математического института им. В.А. Стеклова Академии наук СССР. 1980. Т. 156. С. 152–222.

[11] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[12] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.

[13] Rubin B. Introduction to Radon Transform: with elements of fractional calculations and harmonic analysis. Cambridge University Press, 2015. 576 p.

Образец цитирования

Архипов С.В. О суммировании по Абелю преобразования Лапласа однородных функций в R^n // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 2. С. 27–44. https://doi.org/10.26456/vtpmk635

Сведения об авторах

1. **Архипов Сергей Викторович**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

ON ABEL SUMMATION FOR LAPLACE TRANSFORM OF THE HOMOGENEOUS FUNCTIONS IN R^N

Arkhipov Sergey Viktorovich
Associate Professor at the Department of Mathematical Statistics and System Analysis, Tver State University
170100, Russia, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.

Received 15.05.2022, revised 22.06.2022.

The article discusses homogeneous functions of the form $\theta(\tau)\,|t|^{\alpha}$, which are determined by the order of homogeneity $\alpha > -n$, as well as by the function $\theta(\tau)$ on the unit sphere $S^{n-1} = \{t \in R^n, |t| = 1\}$. When calculating the Laplace transform of these functions supported in a sharp cone, it is necessary to obtain an explicit representation. This is achieved by summing integrals according to Abel, as well as by applying Fourier analysis on the sphere, which will allow to bring calculations to transformations of hypergeometric functions necessary to calculate the limits as $\varepsilon \to 0$. The article presents formulas for the Laplace transform of homogeneous functions for various function spaces on the unit sphere.

Keywords: Abel summation, multidimensional Laplace transform, homogeneous functions, spherical harmonics, Fourier-Laplace series.

Citation

Arkhipov S.V., "On Abel summation for Laplace transform of the homogeneous functions in R^n", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 2, 27–44 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk635

References

[1] Arkhipov S.V., "The Abel summation of the inverse Fourier transform of the homogeneous functions in R^n", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 4, 98–107 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk547.

[2] Vladimirov V.S., Drozzinov Yu.N., Zavialov B.I., *Tauberian Theorems for Generalized Functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988, 292 pp.

[3] Gradshtejn I.S., Ryzhik I.M., *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenij [Table of Integrals, Series, and Products]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 1963 (in Russian), 1100 pp.

[4] Kratzer A., Franz W., *Transtsendentnye funktsii [Transcendent functions]*, Iz-vo inostrannoj literatury, M., 1963 (in Russian), 467 pp.

[5] Luke Yu., *Spetsialnye matematicheskie funktsii i ikh approksimatsii [Mathematical functions and their approximations]*, Mir Publ., Moscow, 1980 (in Russian), 608 pp.

[6] Mikhlin S.G., *Mnogomernye singulyarnye integraly i integralnye uravneniya [Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 1962 (in Russian), 254 pp.

[7] Muller C., *Spherical Harmonics.* V. 17, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1966, 45 pp.

[8] Plamenevskij B.A., *Algebras of pseudodifferential operators*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 256 pp.

[9] Samko S.G., *Gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya [Hypersingular Integrals and Their Applications]*, Rostov University Press, Rostov, 1984 (in Russian), 208 pp.

[10] Samko S.G., "Obobshchyonnye rissovy potentsialy i gipersingulyarnye integraly s odnorodnymi kharakteristikami, ikh simvoly i obrashchenie", *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova Akademii nauk SSSR [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics]*, **156** (1980), 152–222 (in Russian).

[11] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I., *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya [Fractional integrals and derivatives: theory and applications]*, Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian), 688 pp.

[12] Stejn I., Vejs G., *Vvedenie v garmonicheskij analiz na evklidovykh prostranstvakh [Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces]*, Mir Publ., Moscow, 1974 (in Russian), 333 pp.

[13] Rubin B., *Introduction to Radon Transform: with elements of fractional calculations and harmonic analysis*, Cambridge University Press, 2015, 576 pp.