УДК 519.226

РАНЖИРОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ОБ ОТКЛОНЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТ НОРМАЛЬНОГО[1]

Скрынников А.А.
Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем,
г. Москва

Поступила в редакцию 06.05.2022, после переработки 26.05.2022.

В работе предложен новый подход, который позволяет провести сравнительный анализ критериев проверки отклонения от нормального закона. Использование в качестве альтернативных гипотез серии распределений, последовательно сходящихся к нормальному закону, позволило ввести интервальную шкалу, по которой можно определить не только какой из сравниваемых критериев лучше, но и насколько лучше.

Ключевые слова: статистические гипотезы, критериев проверки отклонения от нормального закона.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 2. С. 45–59.
https://doi.org/10.26456/vtpmk636

Введение

Среди всех типов распределений нормальное распределение играет важнейшую роль в теории вероятностей и математической статистике. Нормальный закон распределения наиболее часто встречается при решении практических задач. Теоретическое обоснование нормального закона как предельного закона даёт центральная предельная теорема: при суммировании большого числа независимых (слабо зависимых) случайных величин закон распределения суммы неограниченно приближается к нормальному [2].

Ряд статистических процедур, таких как проверка параметрических гипотез о числовых характеристиках случайных величин, дисперсионный анализ и др., базируются на предположении о том, что выборка извлечена из нормально распределённой генеральной совокупности; при сглаживании данных методом наименьших квадратов считается, что ошибки подчиняются нормальному закону распределения и пр.

Проблеме проверки статистических гипотез об отклонении распределения от нормального посвящено большое количество публикаций. Предложено большое

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00708).

число критериев (тестов), изучаются их свойства, проводятся сравнительные исследования критериев при различных условиях.

При проверке гипотезы о виде распределения выдвигается «нулевая» гипотеза о том, что функция распределения случайной величины X совпадает с некоторой известной функцией $F_0(x, \theta)$:

$$H_0 : F(x) = F_0(x, \theta), \tag{1}$$

где θ – параметр закона распределения (скалярный или векторный) [6].

Задача проверки гипотезы (1) называется задачей проверки согласия. Любой критерий для (1) называется критерием согласия [4].

При проверке согласия обычно конкурирующая гипотеза не высказывается в явном виде – под конкурирующей гипотезой подразумевается то, что данные наблюдений противоречат высказанной гипотезе [9].

Однако при решении задачи проверки согласия возникает необходимость выбора того или иного критерия согласия, желательно знать, какой из критериев лучше в тех или иных условиях.

Сравнение критериев согласия проводится по их мощности. Мощность – это вероятность отклонения нулевой гипотезы H_0, когда верна альтернативная гипотеза H_1. Мощность теста рассматривается по отношению к конкретной альтернативной гипотезе.

Альтернативная гипотеза задаётся в виде:

$$H_1 : F(x) = F_1(x, \theta).$$

При проверке статистических гипотез об отклонении распределения от нормального в качестве альтернативных (конкурирующих) гипотез H_1 принимаются законы распределения, плотность которых достаточно близка к плотности распределения нормального закона. Например, в работах [6–8] в качестве конкурирующих гипотез рассматриваются обобщённое нормальное распределение, распределение Лапласа, логистическое распределение. В работе [17] – бета-распределение, χ^2, логистическое, логнормальное, Стьюдента, нецентральное χ^2–распределение и др. Параметры альтернативных распределений подбираются так, чтобы распределение не сильно бы отличалось от нормального. Альтернативные распределения могут быть разбиты на группы: симметричные, несимметричные, модифицированные нормальные [11, 18].

Особенностью получаемых результатов при сравнительной оценке мощности критериев проверки отклонения распределения от нормального закона является то, что ранжирование критериев в порядке предпочтения в сильной степени зависит от характера альтернативного распределения. Однако исследователь, которому важен ответ на вопрос: можно ли считать рассматриваемую выборку принадлежащей к нормально распределённой генеральной совокупности, не должен при выборе критерия задаваться вопросом об альтернативном распределении.

Целесообразным является не только ранжирование критериев проверки отклонения распределения от нормального закона по мощности безотносительно к виду альтернативного распределения, но и введение количественной меры степени отклонения, что позволило бы перейти от ранжирования критериев к их количественному сравнению.

Для решения такой задачи предлагается задать упорядоченный набор альтернативных гипотез – последовательность распределений, сходящихся к нормальному. В качестве такой последовательности можно рассматривать нормированную сумму независимых одинаково распределённых случайных величин. Закон распределения такой случайной величины в соответствие с центральной предельной теоремой неограниченно приближается к нормальному закону.

1. Постановка задачи

Необходимо провести сравнительный анализ критериев проверки отклонения от нормального закона с использованием в качестве альтернативных гипотез серию распределений, последовательно сходящихся к нормальному закону. В качестве такой последовательности могут служить законы распределения $G_1(x)$, $G_2(x), \ldots, G_k(x), \ldots$, получаемые в результате суммирования независимых одинаково распределённых случайных величин. k-й член такой последовательности $G_k(x)$ соответствует закону распределения случайной величины X_k, получаемой в результате суммирования k слагаемых:

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i, \tag{2}$$

где $Y_1, \ldots, Y_k$ – непрерывные независимые одинаково распределённые случайные величины.

Выборка из генеральной совокупности, подчиняющейся закону распределения $G_k(x)$, имеет вид $(X_{k1},\ X_{k2},\ \ldots, X_{kn})$, где n – объём выборки.

Рассмотрим произвольный критерий отклонения распределения от нормального; без потери общности будем считать, что критическая область – правосторонняя. Нулевая гипотеза имеет вид

$$H_0 : F(x) = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартной нормально распределённой случайной величины; m_x, σ_x – математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределённой случайной величины X.

Для каждого критерия существует своя статистика Z – функция случайных аргументов $Z = Z(X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kn})$ – статистика, имеющая плотность распределения $f(z|H_0)$ при условии, что гипотеза H_0 верна. При известном законе распределения $f(z|H_0)$ статистики Z, соответствующей рассматриваемому критерию, граница $\hat{z}$, разделяющая область допустимых значений (ОДЗ) и критическую область (КРО) статистики Z, может быть найдена из выражения

$$\int_{\hat{z}}^{\infty} f(z|H_0)dz = \alpha,$$

где уровень значимости α соответствует вероятности ошибки первого рода – ошибочно отклонить гипотезу H_0, когда она верна.

Вероятность ошибки второго рода β (отклонить верную альтернативную гипотезу) определяется при чётко сформулированной альтернативной гипотезе. В качестве альтернативной гипотезы H_k, $k = 1, 2 \ldots$, рассмотрим гипотезу вида

$$H_k : F(x) = G_k(x).$$

Тогда

$$\beta = \int_{-\infty}^{\hat{z}} f(z|H_k)dz,$$

где $f(z|H_k)$ – плотность распределения статистики Z при условии, что верна альтернативная гипотеза H_k.

Очевидно, что с увеличением числа слагаемых k в (2) закон распределения $G_k(x)$ случайной величины X_k будет сходиться к нормальному закону, следствием чего будет рост вероятности ошибки второго рода β (см. Рис. 1).

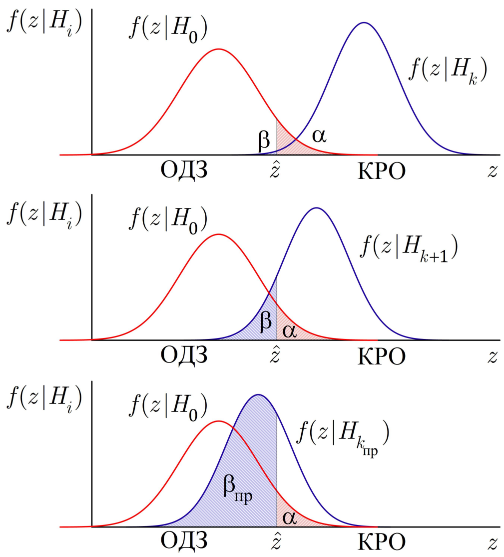

Рис. 1: Рост вероятности ошибки второго рода β при увеличении числа слагаемых k

Примем некоторое предельно допустимое значение $\beta_{пр}$ вероятности ошибки второго рода, когда вероятность отклонения верной альтернативной гипотезы бутет неприемлемо велика. Тогда найдётся такое значение $k = k_{пр}$, которое удовлетворяет условию $k_{пр} = \inf\{k : \beta \geq \beta_{пр}\}$.

Можно считать, что при сравнении нескольких критериев наилучшим будет тот, который при последовательном увеличении k будет дольше всех способен распознать верную гипотезу H_k (т.е. критерий, имеющий максимальное значение $k_{пр}$). Тогда по шкале значений k можно упорядочить сравниваемые критерии. Введение числовой шкалы позволит не только упорядочить приоритетный ряд используемых при проверке критериев, но и судить, насколько один критерий лучше другого.

Таким образом, для решения задачи сравнительного анализа критериев проверки отклонения распределения от нормального закона необходимо обосновать последовательность распределений G_k, исследовать поведение ошибок второго рода (или мощности) с увеличением значения k и определить для каждого из исследуемых критериев соответствующее ему значение $k_{\text{пр}}$.

2. Последовательность альтернативных распределений

Наиболее иллюстративным примером применения центральной предельной теоремы является датчик нормально распределённых случайных величин, реализуемый в ряде библиотек программ. Считается, что нормированная сумма всего лишь 12 равномерно распределённых случайных величин достаточно хорошо задаёт стандартное нормальное распределение.

Для того, чтобы вводимая шкала не была бы грубой, в качестве последовательности распределений целесообразно выбрать по возможности медленно сходящееся к нормальному с ростом k распределение.

Другим требованием при выборе альтернативных распределений является возможность аналитического вычисления значения функции распределения $G_k(x)$ при любом k.

Таким требованиям отвечают, например, распределение Эрланга и хи-квадрат распределение.

Если $Y_1, \ldots, Y_k$ – независимые экспоненциальные одинаково распределённые случайные величины с параметром λ, то сумма (2) подчиняется распределению Эрланга с параметрами k и $\theta = 1/\lambda$.

Параметры k и θ являются параметрами формы и масштаба соответственно. Функция распределения случайной величины X_k, подчиняющейся закону Эрланга, имеет вид:

$$G_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k)}\, \gamma\left(k, \frac{x}{\theta}\right),$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция; $\gamma(\cdot)$ – неполная гамма-функция.

Числовые характеристики определяются следующим образом:

$$M[X_k] = k\theta, \quad D[X_k] = k\theta^2. \tag{3}$$

Зная числовые характеристики, можно легко построить функцию распределения нормированной случайной величины

$$V_k = \frac{X_k - M[X_k]}{\sqrt{D[X_k]}}.$$

На Рис. 2 приведены зависимости $G_k(v)$ при различных значениях k.

Если $Y_1, \ldots, Y_k$ – независимые одинаково распределённые по закону хи-квадрат случайные величины с одной степенью свободы, то сумма (2) подчиняется распределению хи-квадрат с k степенями свободы.

Функция распределения случайной величины, подчиняющейся закону распределения хи-квадрат, имеет вид:

$$G_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2)}\, \gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{x}{\theta}\right);$$

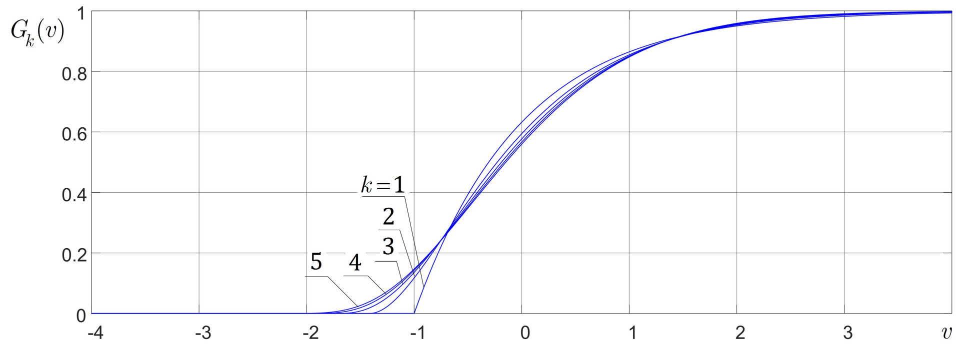

Рис. 2: Функции распределения нормированной случайной величины V_k, подчиняющейся закону Эрланга

распределение хи-квадрат задаётся единственным параметром k.

Математическое ожидание и дисперсия определяются следующим образом:

$$M[X_k] = k, \quad D[X_k] = 2k. \tag{4}$$

Функции распределения нормированной (хи-квадрат распределённой) случайной величины V_k при различных k приведены на Рис. 3.

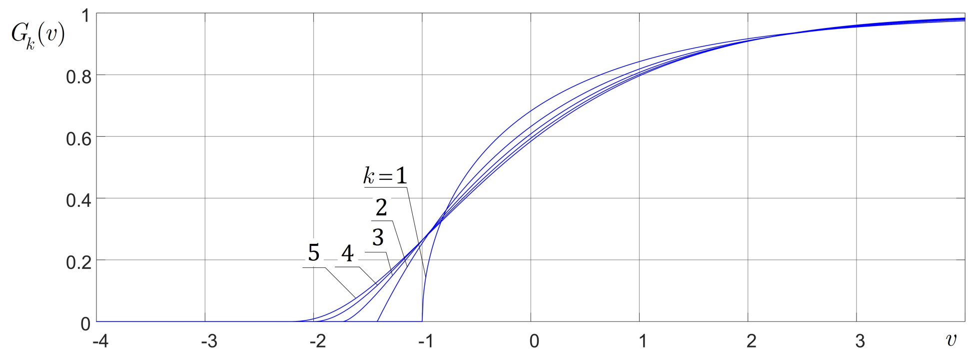

Рис. 3: Функции распределения нормированной случайной величины V_k, подчиняющейся закону хи-квадрат

Функции распределения $F(x)$ и $G_k(x)$ – непрерывные функции. Расстояние между непрерывными функциями определяется как максимум абсолютной разности ординат по всей области их определения:

$$\rho(F(x), G_k(x)) = \max_{x \in (-\infty, \infty)} |F(x) - G_k(x)|;$$

это расстояние может быть найдено с использованием функции распределения $\Phi(\cdot)$ стандартной нормально распределённой случайной величины и функции распределения нормированной случайной величины, распределённой по закону Эрланга или хи-квадрат:

$$\rho(\Phi(v), G_k(v)) = \max_{v \in (-\infty, \infty)} |\Phi(v) - G_k(v)|.$$

Графическая иллюстрация расстояния между двумя функциями распределения нормированных случайных величин приведена на Рис. 4.

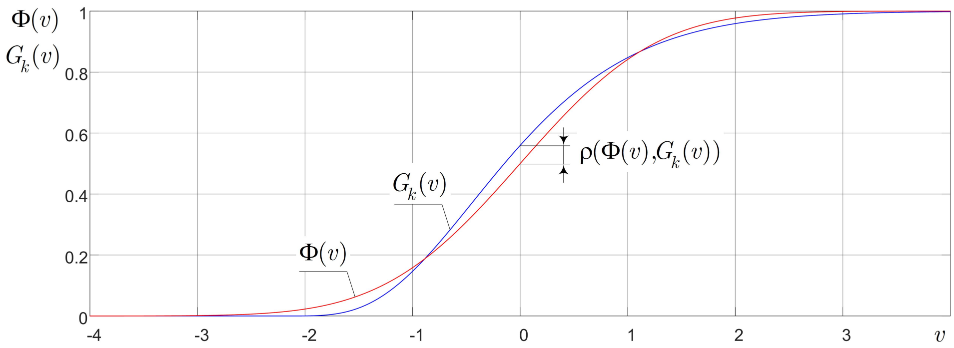

Рис. 4: Расстояние между двумя функциями распределения нормированных случайных величин

С использованием данного подхода была исследована сходимость законов распределения Эрланга и хи-квадрат к нормальному закону с увеличением значения k. Как видно из Рис. 5, скорость сходимости к нормальному хи-квадрат распределения ниже скорости сходимости гамма-распределения.

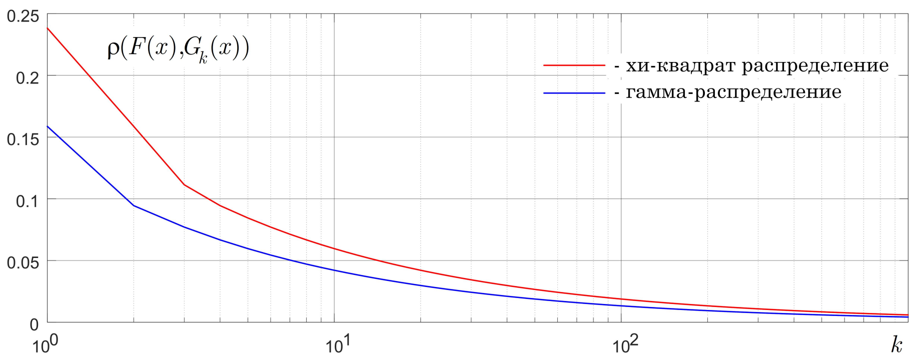

Рис. 5: Скорость сходимости к нормальному хи-квадрат и гамма- распределений

Таким образом, в качестве последовательности конкурирующих распределений целесообразно выбрать хи-квадрат распределение.

3. Методика статистического моделирования

При проведении статистического моделирования генерируется выборка объёмом n случайной величины X_k, подчиняющейся распределению хи-квадрат с числом степеней свободы k. Эта выборка подвергается проверке с помощью выбранного критерия при заданном уровне значимости α, по результатам которой принимается решение в пользу гипотезы H_0 (генеральная совокупность имеет нормальное распределение) или в пользу альтернативной гипотезы H_1 (генеральная совокупность имеет распределение хи-квадрат с числом степеней свободы k). По результатам серии реализаций определяется вероятность ошибки второго рода.

С увеличением числа степеней свободы k растёт вероятность ошибки второго рода. Моделирование проводится до тех пор, пока вероятность ошибки β не достигнет предельного значения $\beta_{\text{пр}}$. По результатам моделирования фиксируется значение $k_{\text{пр}}$.

Моделирование проводится для различных объёмов выборки n и значений уровня значимости α.

Генерирование случайных чисел легко реализуется исходя из определения хи-квадрат распределения. Однако в пакетах стандартных программ часто используется алгоритм, основанный на том, что случайная величина X_k, имеющая хи-квадрат распределение с k степенями свободы, и случайная величина $Y(1, k/2)$, имеющая гамма-распределение с параметром масштаба, равным единице, и параметром формы, равным $k/2$, связаны соотношением $X_k \sim 2Y(1, k/2)$ [1].

Рассмотрим в качестве примера поведение статистики критерия Жарка-Бера. Для нормально распределённой случайной величины коэффициент асимметрии равен нулю, а коэффициент эксцесса равен трём. Критерий Жарка-Бера основан на сопоставлении выборочных значений коэффициентов асимметрии и эксцесса с теоретическими значениями. Вычисляется статистика

$$Z_{JB} = \frac{n}{6}\left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right),$$

где S, K – выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса, соответственно.

Если данные получены из нормального распределения, статистика Z_{JB} асимптотически распределена по закону хи-квадрат с двумя степенями свободы.

Поведение функции распределения $F(Z_{JB}|H_k)$ статистики Z_{JB} проиллюстрировано на Рис. 6. Расчёты проведены для $n = 50$. При расчётах использовалась функция jbtest пакета MATLAB.

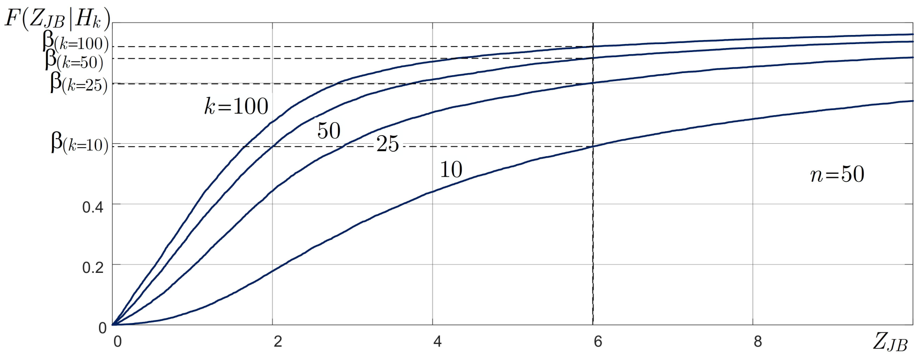

Рис. 6: Поведение функции распределения $F(Z_{JB}|H_k)$ статистики Z_{JB}

Критическое значение статистики $\hat{Z}_{JB}$, соответствующее уровню значимости $\alpha = 0.05$, равно $\chi^2_{2;0.95} = 5.99$. По результатам расчётов легко определить величину вероятности ошибки второго рода β:

$$\beta = P(Z_{JB} < \hat{Z}_{JB}) = F(\hat{Z}_{JB}|H_k).$$

Так, $\beta = 0.590$ при $k = 10$; $\beta = 0.801$ при $k = 25$; $\beta = 0.883$ при $k = 50$; $\beta = 0.921$ при $k = 100$.

Таким образом, предложенный подход позволяет рассчитать вероятность ошибки β при заданном значении k, а, следовательно, и найти в интересах решения поставленной задачи такое значение $k_{\text{пр}}$, при котором $\beta > \beta_{\text{пр}}$.

4. Результаты статистического моделирования

Помимо критерия Жарка-Бера в работе для проверки отклонения критерия распределения от нормального использовались следующие критерии: Шапиро-Уилка, Андерсона-Дарлинга, Лиллиефорса.

Критерий W Шапиро-Уилка [16] основан на отношении оптимальной линейной несмещённой оценки дисперсии к оценке, найденной методом максимального правдоподобия [5]. Статистика критерия Шапиро-Уилка имеет вид:

$$Z_{SW} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^2},$$

где a_i – заданные коэффициенты; $X_{(i)}$ – порядковые статистики; m_x^* – оценка математического ожидания.

В стандарте [3] значения коэффициентов приведены для объёма выборки от 8 до 50. В работах [14, 15] приведены аппроксимации коэффициентов a_i, позволяющие применять критерий Шапиро-Уилка и при больших объёмах выборки. Расчёты проводились с использованием подпрограммы [12].

Критерий Андерсона-Дарлинга [10] относится к семейству критериев, основанных на сравнении эмпирической и теоретической функций распределения. Статистика критерия Андерсона-Дарлинга при проверке гипотезы отклонения распределения от нормального имеет вид:

$$Z_{AD} = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[\ln \Phi(Y_{(i)}) + \ln(1 - \Phi(Y_{(n+1-i)}))\right],$$

где $Y_{(i)}$ – нормированная случайная величина:

$$Y_{(i)} = \frac{X_{(i)} - m_x^*}{\sigma_x^*}.$$

Критерий Лиллиефорса [13] представляет собой модификацию критерий Колмогорова для проверки сложной гипотезы о согласии наблюдаемой выборки с нормальным законом, когда по этой же выборке оцениваются оба параметра закона.

Результаты расчётов вероятности ошибки β в зависимости от значения k при различных объёмах выборки n при уровне значимости $\alpha = 0.05$ приведены на Рис. 7–10.

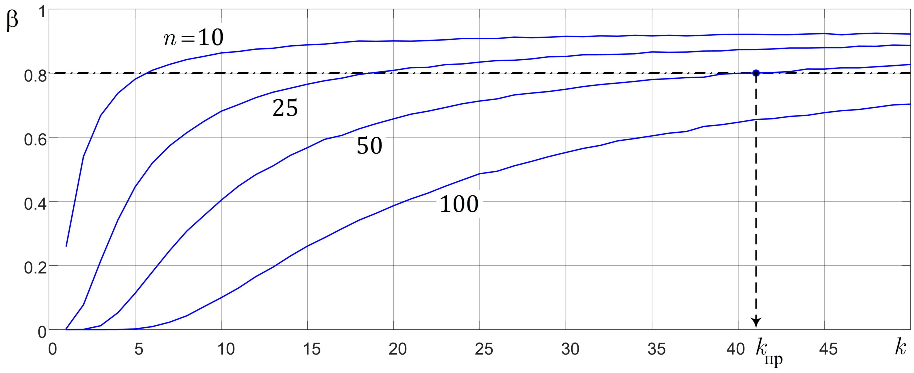

Рис. 7: Зависимость $\beta(k)$ при использовании критерия Шапиро-Уилка

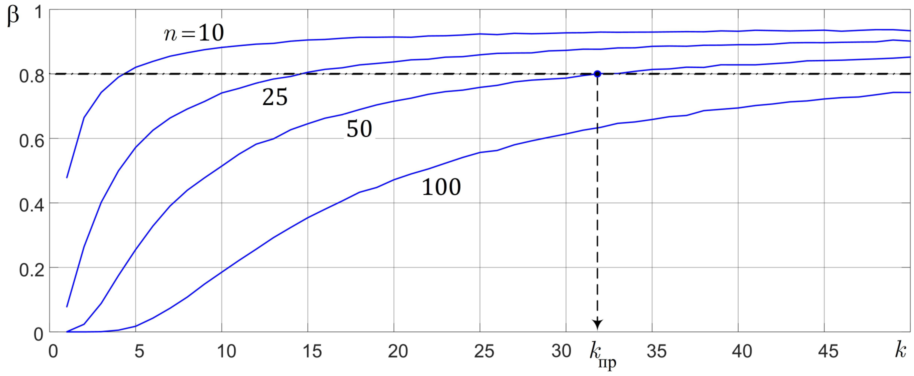

Рис. 8: Зависимость $\beta(k)$ при использовании критерия Жарка-Бера

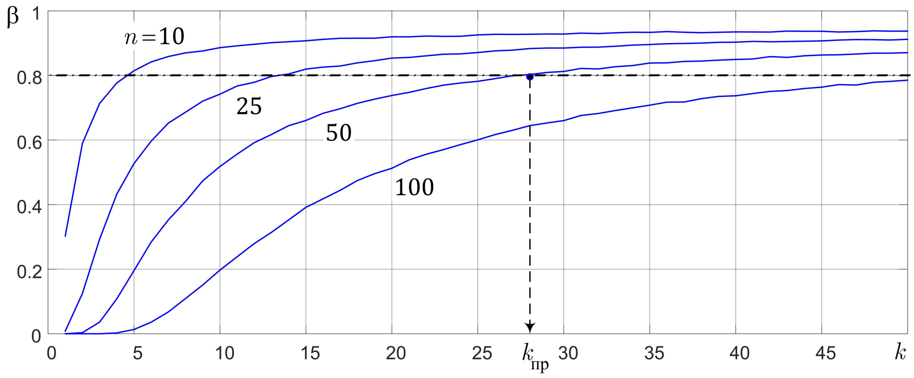

Рис. 9: Зависимость $\beta(k)$ при использовании критерия Андерсона-Дарлинга

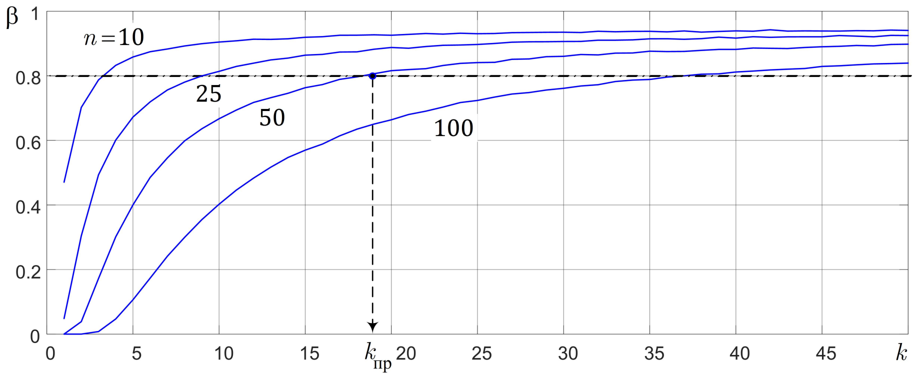

Рис. 10: Зависимость $\beta(k)$ при использовании критерия Лиллиефорса

Как видно из результатов расчётов зависимости $\beta(k|n)$ индивидуальны для каждого из рассматриваемых критериев.

Рост вероятности ошибки второго рода с увеличением значения k в значительной степени определяются объёмом выборки n – с увеличением объёма выборки темпы роста падают; при малых объёмах выборки рост $\beta(k)$ очень резкий, при больших – пологий. Достаточно чётко проявляется разница в темпе роста зависимости $\beta(k)$ при объёмах выборки $n = 50$.

Предлагается в качестве интервальной шкалы, с использованием которой можно определить не только какой из критериев лучше, но и на сколько, шкалу значений $k_{\text{пр}} = \inf\{k : \beta \geq \beta_{\text{пр}}\}$, вычисляемых при условии $\alpha = 0.05$, $n = 50$ и $\beta_{\text{пр}} = 0.8$.

Рисунки 7–10 иллюстрируют порядок определения нахождения значения $k_{\text{пр}}$. На Рис. 11 приведены результаты сравнительной оценки рассмотренных критериев проверки отклонения распределения от нормального закона.

Наилучшим критерием с большим отрывом является критерий Шапиро-Уилка ($k_{\text{пр}} = 41$), затем – критерии Жарка-Бера ($k_{\text{пр}} = 32$) и Андерсона-Дарлинга ($k_{\text{пр}} = 28$); замыкает список рассмотренных критериев – критерий Лиллиефорса ($k_{\text{пр}} = 19$).

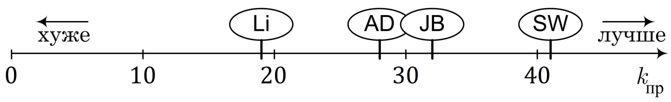

Рис. 11: Результаты сравнительной оценки рассмотренных критериев проверки отклонения распределения от нормального закона

Заключение

В работе рассмотрена задача упорядочивания статистических критериев проверки гипотез об отклонении распределения от нормального. В качестве альтернативных гипотез предложено использовать серию распределений, последовательно сходящихся к нормальному закону. Этому требованию отвечает распределение хи-квадрат, сходящееся к нормальному с ростом числа степеней свободы k.

Для сравнения различных критериев проверки отклонения распределения от нормального предложено использовать шкалу значений числа степеней свободы, при которых ошибка второго рода превышает установленное предельное значение при заданных уровне значимости и объёме выборки.

В качестве примера проведено сравнение четырёх критериев проверки отклонения распределения от нормального; показано, что наилучшим среди рассмотренных с большим отрывом является критерий Шапиро-Уилка, затем – критерии Жарка-Бера и Андерсона-Дарлинга, замыкает список – критерий Лиллиефорса.

Список литературы

[1] Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 295 с.

[2] Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.

[3] Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения. М.: Изд-во стандартов, 2002. 30 с.

[4] Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 900 с.

[5] Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: Физматлит, 2006. 816 с.

[6] Лемешко Б.Ю. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению. Новосибирск: НГТУ, 2014. 192 с.

[7] Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона // Метрология. 2005. № 2. С. 3–23.

[8] Лемешко Б.Ю., Рогожников А.П. Исследование особенностей и мощности некоторых критериев нормальности // Метрология. 2009. № 4. С. 3–24.

[9] Монсик В.Б., Скрынников А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Статистическая проверка гипотез. М.: МГТУ ГА, 2005. 64 с.

[10] Anderson T.W., Darling D.A. Asymptotic theory of certain "goodness-of-fit"criteria based on stochastic processes // Annals of Mathematical Statistics. 1952. Vol. 23. Pp. 193–212.

[11] Arnastauskaite J., Ruzgas T., Brazenas M. An exhaustive power comparison of normality tests // Mathematics. 2021. № 9. ID 788. https://doi.org/10.3390/math9070788

[12] BenSai da A. Shapiro-Wilk and Shapiro-Francia normality tests [Electronic resource] // MATLAB Central File Exchange. URL: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/13964-shapiro-wilk-and-shapiro-francia-normality-tests.

[13] Lilliefors H. On the Kolmogorov–Smirnov test for normality with mean and variance unknown // Journal of the American Statistical Association. 1967. Vol. 62, № 318. Pp. 399–402.

[14] Royston P. An Extension of Shapiro and Wilk's W Test for Normality to Large Samples // Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics). 1982a. Vol. 31, № 2. Pp. 115–124.

[15] Royston P. Approximating the Shapiro-Wilk W-test for non-normality // Statistics and Computing. 1992. Vol. 2. Pp. 117–119.

[16] Shapiro S.S., Wilk M.B. An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples) // Biometrika. 1965. Vol. 52, № 3/4. Pp. 591–611. https://doi.org/10.2307/2333709

[17] Shapiro S.S., Wilk M.B., Chen H.J. A Comparative Study of Various Tests for Normality // Journal of the American Statistical Association. 1968. Vol. 63, № 324. Pp. 1343–1372. https://doi.org/10.1080/01621459.1968.10480932

[18] Thode H.C. Testing For Normality. Boca Raton: CRC Press, 2002. 368 p.

Образец цитирования

Скрынников А.А. Ранжирование критериев проверки статистических гипотез об отклонении распределения от нормального // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 2. С. 45–59. https://doi.org/10.26456/vtpmk636

Сведения об авторах

1. **Скрынников Андрей Александрович**
начальник сектора Государственного научно-исследовательского института авиационных систем.

Россия, 125319, г. Москва, ул. Викторенко, д. 7, ГосНИИАС.
E-mail: a1260@mail.ru

RANKING OF NORMALITY TESTS

Skrynnikov Andrey Alexandrovich
Head of Sector, State Research Institute of Aviation Systems
Russia, 125319, Moscow, 7 Viktorenko str., GosNIIAS.
E-mail: *a1260@mail.ru*

Received 06.05.2022, revised 26.05.2022.

The paper proposes a new approach that allows a comparative analysis of the normality tests. Using a series of distributions that consistently converge to the normal law as alternative hypotheses allowed us to introduce an interval scale by which it is possible to determine not only which of the compared criteria is better, but also how much better.

Keywords: statistical hypotheses, normality tests.

Citation

Skrynnikov A.A., “Ranking of normality tests”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 2, 45–59 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk636

References

[1] Vadzinskij R.N., *Spravochnik po veroyatnostnym raspredeleniyam [Handbook of Probability Distributions]*, Nauka Publ., SPb., 2001 (in Russian), 295 pp.

[2] Venttsel E.S., *Teoriya veroyatnostej [Probability theory]*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (in Russian), 576 pp.

[3] *Statistical methods. Checking the deviation of the probability distribution from the normal distribution*, Izd-vo standartov, Moscow, 2002 (in Russian), 30 pp.

[4] Kendall M., Styuart A., *Statisticheskie vyvody i svyazi [Statistical conclusions and connections]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (in Russian), 900 pp.

[5] Kobzar A.I., *Applied mathematical statistics. For engineers and scientists*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (in Russian), 816 pp.

[6] Lemeshko B.Yu., *Kriterii proverki otkloneniya raspredeleniya ot normalnogo zakona. Rukovodstvo po primeneniyu [Criteria for checking the deviation of the distribution from the normal law. Application Guide]*, NGTU, Novosibirsk, 2014 (in Russian), 192 pp.

[7] Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., “Sravnitelnyj analiz kriteriev proverki otkloneniya raspredeleniya ot normalnogo zakona”, *Metrologiya [Metrology]*, 2005, № 2, 3–23 (in Russian).

[8] Lemeshko B.Yu., Rogozhnikov A.P., “Issledovanie osobennostej i moshchnosti nekotorykh kriteriev normalnosti”, *Metrologiya [Metrology]*, 2009, № 4, 3–24 (in Russian).

[9] Monsik V.B., Skrynnikov A.A., *Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika. Statisticheskaya proverka gipotez [Probability theory and mathematical statistics. Statistical hypothesis testing]*, MGTU GA, Moscow, 2005 (in Russian), 64 pp.

[10] Anderson T.W., Darling D.A., “Asymptotic theory of certain ”goodness-of-fit” criteria based on stochastic processes”, *Annals of Mathematical Statistics*, **23** (1952), 193–212.

[11] Arnastauskaite J., Ruzgas T., Brazenas M., “An exhaustive power comparison of normality tests”, *Mathematics*, 2021, № 9, 788, https://doi.org/10.3390/math9070788.

[12] BenSai da A., *Shapiro-Wilk and Shapiro-Francia normality tests*, MATLAB Central File Exchange, https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/13964-shapiro-wilk-and-shapiro-francia-normality-tests.

[13] Lilliefors H., “On the Kolmogorov–Smirnov test for normality with mean and variance unknown”, *Journal of the American Statistical Association*, **62**:318 (1967), 399–402.

[14] Royston P., “An Extension of Shapiro and Wilk’s W Test for Normality to Large Samples”, *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, **31**:2 (1982a), 115–124.

[15] Royston P., “Approximating the Shapiro-Wilk W-test for non-normality”, *Statistics and Computing*, **2** (1992), 117–119.

[16] Shapiro S.S., Wilk M.B., “An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples)”, *Biometrika*, **52**:3/4 (1965), 591–611, https://doi.org/10.2307/2333709.

[17] Shapiro S.S., Wilk M.B., Chen H.J., “A Comparative Study of Various Tests for Normality”, *Journal of the American Statistical Association*, **63**:324 (1968), 1343–1372, https://doi.org/10.1080/01621459.1968.10480932.

[18] Thode H.C., *Testing For Normality*, CRC Press, Boca Raton, 2002, 368 pp.