УДК 519.2

О СРАВНЕНИИ НЕОБХОДИМЫХ РЕЗЕРВОВ ОРГАНИЗАЦИЙ, ПОДВЕРЖЕННЫХ РИСКУ, С ПОМОЩЬЮ ПОНЯТИЯ ДЕФЕКТ[1]

Бенинг В.Е.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 12.07.2022, после переработки 27.07.2022.

В работе рассмотрено асимптотическое поведение резерва организации, подверженной риску в случае, когда число факторов, приводящих к убытку, случайно. Помимо новых результатов работа содержит обзор последних результатов автора, касающихся асимптотического поведения резервов страховых компаний. Проведено асимптотическое сравнение деятельности таких организаций в терминах необходимого добавочного числа таких факторов. Рассмотрены два примера, иллюстрирующие полученные результаты. Первый пример касается сумм независимых случайных величин, а во втором рассматривается трёхточечное симметричное распределение и распределение Пуассона.

Ключевые слова: резерв страховой компании, выборка случайного размера, асимптотические разложения, трехточечное симметричное распределение, распределение Пуассона, асимптотический дефицит.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 5–26.
https://doi.org/10.26456/vtpmk643

1. Введение

Всюду ниже под организацией, подверженной риску, будем понимать страховую компанию (фирму), а под факторами риска ее клиентов, страхующих свои потери. Хотя, например, под такой организацией можно рассматривать лечебное учреждение, а под факторами риска - ее больных (в случайном числе, например, в условиях пандемии). Итак, рассмотрим простейшую модель страхования, в которой в течение разных отчётных периодов одинаковой длины (скажем, месяцев или лет) происходит разное число страховых событий (страховых выплат или заключений страховых контрактов). Подобного рода ситуации возникают, например, в медицине, когда число пациентов с тем или иным заболеванием варьируется от

[1]Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

года к году, в технике, когда при испытании на надежность (скажем, при определении наработки на отказ) разных партий приборов, число отказавших приборов в разных партиях будет разным и заранее неопределённым. В таких ситуациях число клиентов, которые доступны страховой компании и заранее не известны, разумно считать случайной величиной. В силу указанных обстоятельств вполне естественным становится изучение асимптотического поведения деятельности страховой компании в случае, когда число клиентов случайно. На естественность такого подхода, в частности, обратили внимание авторы работ [1–5].

В работе изучается асимптотическое поведение необходимого резерва страховой компании в случае, когда число клиентов страховой фирмы случайно. Приведен обзор последних результатов, касающихся этой проблематики (см. работы [11–15]). Получены асимптотические разложения (а.р.) необходимого резерва страховой компании. Проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых компаний в терминах необходимого добавочного числа клиентов (асимптотический дефект). Рассмотрены два примера, иллюстрирующие полученные результаты. Первый пример касается сумм независимых случайных величин, а во втором рассматривается трёхточечное симметричное распределение.

1.1 Асимптотический дефект и его свойства

Рассмотрим две статистические процедуры Π_n^* и Π_n с мерами качества π_n^* и π_n соответственно. Здесь n – число наблюдений $X_1, \ldots, X_n$, на которых основаны эти процедуры. При этом предполагается, что статистическая процедура Π_n^* является в некотором смысле «оптимальной», а процедура Π_n – конкурирующей. Например, в задаче статистического оценивания в качестве меры качества обычно выступает среднеквадратичное отклонение оценки от оцениваемой функции, тогда $\pi_n^* \leq \pi_n$, а в задаче проверки статистических гипотез в качестве меры качества критериев рассматривают их мощность и тогда $\pi_n^* \geq \pi_n$.

Обозначим через $m(n)$ необходимое число наблюдений, которое требуется процедуре $\Pi_{m(n)}$, основанной на наблюдениях $X_1, \ldots, X_{m(n)}$, для достижения такого же качества, что и «лучшей» процедуре Π_n^*, основанной на n наблюдениях $X_1, \ldots, X_n$. Ниже рассматривается асимптотический подход, означающий, что $n \to \infty$. Под асимптотической относительной эффективностью (АОЭ) процедуры $\Pi_{m(n)}$ по отношению к процедуре Π_n^* понимается предел (в случае его существования и независимости от последовательности $m(n)$) вида (см., например, [9])

$$e \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{n}{m(n)}.$$

Например, предположим, что $e = 1/3$, тогда при больших значениях числа наблюдений n величина $m(n)$ приближённо равна $3n$, поэтому процедуре $\Pi_{m(n)}$ для достижения такого же качества, что и процедуре Π_n^*, требует примерно в три раза больше наблюдений.

Вместо отношения необходимого числа наблюдений, естественно, можно было бы рассматривать разность вида $m(n) - n$, которая тоже имеет наглядный смысл необходимого дополнительного числа наблюдений, требующихся процедуре $\Pi_{m(n)}$ для достижения того же качества, что и процедуре Π_n^*. Однако, исторически сложилось так, что многие авторы сначала исследовали асимптотические свойства отношения $n/m(n)$ (возможно, в силу относительной простоты его поведения).

Впервые общее асимптотическое исследование поведения разности $m(n) - n$ было предпринято в 1970 году Ходжесом и Леманом (см. работу [7]). Они назвали разность $m(n) - n$ дефектом (deficiency) конкурирующей процедуры $\Pi_{m(n)}$ относительно процедуры Π_n^* и предложили обозначение

$$d_n = m(n) - n. \tag{1.1}$$

Если предел $\lim_{n\to\infty} d_n$ существует, то он называется *асимптотическим дефектом* процедуры $\Pi_{m(n)}$ относительно процедуры Π_n^* и обозначается символом d. Часто d называют просто дефектом $\Pi_{m(n)}$ относительно Π_n^*. Заметим, что если АОЭ $e \neq 1$, то $d = \infty$ и этот случай малоинтересен. В работе [7] также было отмечено, что существуют статистические задачи, в которых типичным образом возникает случай $e = 1$ (см., например, книгу [10] и работы [11, 12]), то есть в этом случае понятие АОЭ не даёт ответа на вопрос какая процедура лучше и понятие дефекта проясняет эту ситуацию, поскольку в этом случае асимптотический дефект может, в принципе, быть любым.

Предположим, например, что $d = 7$. Тогда для больших значений n величина $m(n)$ равна приближённо $n + 7$. Чтобы получить ту же величину критерия качества процедуре $\Pi_{m(n)}$ требуется примерно на семь наблюдений больше, чем процедуре Π_n^*.

Таким образом дефект процедуры $\Pi_{m(n)}$ относительно процедуры Π_n^* показывает сколько добавочных наблюдений примерно требуется, если мы настаиваем на использовании процедуры $\Pi_{m(n)}$ вместо процедуры Π_n^*, и поэтому создаёт естественный базис для их асимптотического сравнения в случае $e = 1$. Исследование асимптотического поведения дефекта d_n технически более сложно, чем нахождение предела e. Часто оно требует построения асимптотических разложений (а.р.) для соответствующих функций, характеризующих качество оценок (см., например, книги [8-10]).

Напомним, что статистические процедуры Π_n^* и Π_n имеют меры качества π_n^* и π_n соответственно, тогда по определению величины $d_n = m(n) - n$, для каждого n должно выполняться равенство

$$\pi_n^* = \pi_{m(n)}. \tag{1.2}$$

При решении уравнения (1.2) целочисленную величину $m(n)$ следует рассматривать как переменную, принимающую произвольные действительные значения. Для этого можно определить функцию $\pi_{m(n)}$ для нецелых значений $m(n)$ по формуле

$$\pi_{m(n)} = \big(1 - m(n) + [m(n)]\big)\, \pi_{[m(n)]} + \big(m(n) - [m(n)]\big)\, \pi_{[m(n)]+1}$$

(см. работу [7]).

Типичным образом функции π_n^* и π_n неизвестны точно и используются их аппроксимации. Предположим, что справедливы асимптотические разложения вида

$$\pi_n^* = \frac{a}{n^r} + \frac{b}{n^{r+s}} + o\big(n^{-r-s}\big), \tag{1.3}$$

$$\pi_n = \frac{a}{n^r} + \frac{c}{n^{r+s}} + o\big(n^{-r-s}\big), \tag{1.4}$$

где $a,\ b$ и c – некоторые постоянные не зависящие от n, а $r > 0,\ s > 0$ – некоторые константы, определяющие порядок убывания по n этих критериев качества. Первый член в этих асимптотических разложениях одинаков и это отражает тот факт, что АОЭ этих процедур равна единице. Из соотношений (1.1) – (1.4) легко получить, что (см. работу [7] или книгу [9])

$$d_n = \frac{c - b}{r\ a}\, n^{1-s} + o\big(n^{1-s}\big). \tag{1.5}$$

Таким образом асимптотический дефект имеет вид

$$d = \begin{cases} \pm\infty, & 0 < s < 1, \\ \dfrac{c - b}{r\ a}, & s = 1, \\ 0, & s > 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Случай, когда выполняется равенство $s = 1$, представляется наиболее интересным, поскольку в этом случае асимптотический дефект конечен. Ходжес и Леман в работе [7] привели ряд простых примеров, показывающих естественность возникновения этого случая в математической статистике (см., также книгу [10] и работы [11, 12]).

В работе приняты следующие обозначения: $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ – соответственно ф.р. и плотность стандартного нормального закона.

В разделе 2 приведены результаты в случае неслучайного числа клиентов, в разделе 3 проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых компаний в этом случае, в разделе 4 рассмотрена ситуация, когда число клиентов страховой фирмы случайно, в разделе 5 рассмотрен пример.

2. Асимптотическое поведение необходимого резерва страховой организации в случае большого неслучайного числа клиентов

Рассмотрим страховую компанию, занимающуюся страхованием $n \in \mathbb{N}$ клиентов, риски которых описываются случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$ (не обязательно независимыми и одинаково распределенными). Обозначим через

$$S_n = S_n(X_1, \cdots, X_n)$$

потери страховой компании при страховании этих n клиентов. В частном случае эти потери могут иметь вид суммы отдельных исков клиентов

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{2.1}$$

Назовём α-резервом (асимптотической α - квантилью статистики S_n, $\alpha \in (0,1)$ - малое число) соответствующим потерям S_n величину $c^*_\alpha(n)$, удовлетворяющую асимптотическому равенству

$$\mathsf{P}\big(S_n \geq c^*_\alpha(n)\big) = \alpha + o(n^{-1}), \quad n \to \infty. \tag{2.2}$$

Если интерпретировать статистику S_n как суммарные страховые требования страховой компании, то α-резерв $c^*_\alpha(n)$ может рассматриваться как резервный капитал страховой компании, который ей при большом числе клиентов n (асимптотически) с большой вероятностью $1 - \alpha$ желательно не превышать.

Применяя формулу Тейлора, несложно получить следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть для функции распределения статистики S_n равномерно по $x \in \mathbb{R}$ справедливо а.р. вида*

$$\mathsf{P}\big(S_n < x\big) = G^*(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\, g^*_1(x) + \frac{1}{n}\, g^*_2(x) + o(n^{-1}),$$

где $G^*(x),\ g^*_1(x),\ g^*_2(x)$ – достаточно гладкие функции, тогда для α-резерва $c^*_\alpha(n)$ справедливо а.р.

$$c^*_\alpha(n) = c^*_\alpha - \frac{g^*_1(c^*_\alpha)}{\sqrt{n}\ G^{*\prime}(c^*_\alpha)} -$$

$$- \frac{1}{n}\left(\frac{G^{*\prime\prime}(c^*_\alpha) g^{*2}_1(c^*_\alpha)}{2(G^{*\prime}(c^*_\alpha))^3} + \frac{G^{*\prime}(c^*_\alpha) g^*_2(c^*_\alpha) - g^*_1(c^*_\alpha) g^{*\prime}_1(c^*_\alpha)}{(G^{*\prime}(c^*_\alpha))^2}\right) + o(n^{-1}),$$

где c^*_α удовлетворяет уравнению $G^*(c^*_\alpha) = 1 - \alpha$.

Рассмотрим применение этой леммы в случае, когда страховая компания страхует однотипных и независимых клиентов, а потери представлены нормированной суммой (2.1).

Итак, пусть $X_1, X_2, \ldots$ независимые одинаково распределённые с.в. такие, что

$$\mathsf{E}\, X_1 = 0,\ \ \mathsf{E}\, X_1^2 = 1,\ \ \mathsf{E}\, |X_1|^{k+\delta} < \infty,\ \ k \geq 3,\ k \in \mathbb{N},\ \delta > 0 \tag{2.3}$$

и для каждого n потери страховой компании имеют вид нормированной суммы

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\,(X_1 + \cdots + X_n). \tag{2.4}$$

Предположим, что с.в. X_1 удовлетворяет условию Крамера (C)

$$\limsup_{|t|\to\infty} |\mathsf{E}\ \exp\{itX_1\}| < 1. \tag{2.5}$$

При выполнении условий (2.3) и (2.5) из Теоремы 6.3.2 книги [6] (см. также [8]) следует выполнение неравенства

$$\sup_x \Big|\mathsf{P}\big(S_n < x\big) - \Phi(x) - \sum_{i=1}^{k-2} n^{-i/2}\, Q_i(x)\Big| \leq \frac{C_{k,\delta}}{n^{(k-2+\delta)/2}},\ C_{k,\delta} > 0,\quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

где полиномы $Q_1(x), \ldots, Q_{k-2}(x)$ определены в книге [6], например,

$$Q_1(x) = -(x^2 - 1)\,\phi(x)\,\frac{\mathsf{E}\, X_1^3}{6},$$

$$Q_2(x) = -(x^3 - 3x)\,\phi(x)\,\frac{\mathsf{E}\, X_1^4 - 3}{24} - (x^5 - 10x^3 + 15x)\,\phi(x)\,\frac{(\mathsf{E}\, X_1^3)^2}{72}. \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.6), (2.7) и Леммы 2.1 непосредственно следует а.р. для α-резерва.

Лемма 2.2. *Пусть для $k = 4$, $\delta > 0$ выполнены условия (2.3) - (2.5), тогда для α-резерва $c^*_\alpha(n)$ справедливо а.р.*

$$c^*_\alpha(n) = u_\alpha + \frac{\mathsf{E}\, X_1^3}{6\sqrt{n}}\,(u_\alpha^2 - 1) +$$

$$+ \frac{1}{12n}\Big(\frac{\mathsf{E}^2\, X_1^3}{3}\,(5u_\alpha - 2u_\alpha^3) + \frac{\mathsf{E}\, X_1^4 - 3}{2}\,(u_\alpha^3 - 3u_\alpha)\Big) + o(n^{-1}),$$

где u_α удовлетворяет уравнению $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$.

3. Сравнение необходимых резервов страховых компаний при неслучайном числе клиентов

В этом разделе будет проведено асимптотическое сравнение необходимых резервов двух страховых компаний в терминах необходимого добавочного числа клиентов (асимптотический дефект).

Рассмотрим теперь другую страховую компанию, суммарный ущерб которой имеет вид $T_n = T_n(Y_1, \cdots, Y_n)$, и зависит от n потерь $Y_1, \ldots, Y_n$, представляющих собой с.в.(с произвольным совместным распределением), описывающих страховые требования n клиентов этой страховой фирмы. Назовём α-резервом ($\alpha \in (0,1)$) соответствующим нормированному ущербу $\sqrt{n}\, T_n$ величину $c_\alpha(n)$, удовлетворяющую асимптотическому равенству

$$\mathsf{P}\big(\sqrt{n}\, T_n \geq c_\alpha(n)\big) = \alpha + o(n^{-1}), \quad n \to \infty. \tag{3.1}$$

Если интерпретировать величину $\sqrt{n}\, T_n$ как суммарные страховые требования, предъявляемые страховой компании n клиентами, то α-резерв $c_\alpha(n)$ может рассматриваться как резервный капитал страховой компании, который ей с большой вероятностью $1 - \alpha$ желательно не превышать.

Из Леммы 2.1 непосредственно следует

Лемма 3.1. *Пусть для функции распределения нормированных потерь $\sqrt{n}\, T_n$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$ справедливо а.р. вида*

$$\mathsf{P}\big(\sqrt{n}\, T_n < x\big) = G(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\, g_1(x) + \frac{1}{n}\, g_2(x) + o(n^{-1}),$$

где $G(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ – достаточно гладкие функции, тогда для асимптотической α-резерва $c_\alpha(n)$ справедливо а.р.

$$c_\alpha(n) = c_\alpha - \frac{g_1(c_\alpha)}{\sqrt{n}\, G^{(1)}(c_\alpha)} -$$

$$- \frac{1}{n}\Big(\frac{G^{(2)}(c_\alpha) g_1^2(c_\alpha)}{2(G^{(1)}(c_\alpha))^3} + \frac{G^{(1)}(c_\alpha) g_2(c_\alpha) - g_1(c_\alpha) g_1^{(1)}(c_\alpha)}{(G^{(1)}(c_\alpha))^2}\Big) + o(n^{-1}),$$

где c_α удовлетворяет уравнению $G(c_\alpha) = 1 - \alpha$.

Следствие 3.1. *Пусть $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$, тогда в условиях Леммы 3.1 равномерно по $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\big(\sqrt{n}\, T_n \ < \ x \ + \ \delta_n\big) \ =$$

$$= \ \mathsf{P}\big(\sqrt{n}\, T_n \ < \ x\big) + \delta_n\, G^{(1)}(x) + \frac{\delta_n^2}{2}\, G^{(2)}(x) + \frac{\delta_n}{\sqrt{n}}\, g_1^{(1)}(x) + o\Big(\max\big(\delta_n^2,\ \frac{\delta_n}{\sqrt{n}},\ n^{-1}\big)\Big).$$

Рассмотрим теперь еще одну страховую компанию, страхующую клиентов, потери которой описываются случайной величиной вида $U_n \ = \ U_n(Z_1, \cdots, Z_n)$, основанную на n страховых требований клиентов $Z_1, \ldots, Z_n$ (с произвольным совместным распределением), с α-резервом $\bar{c}_\alpha(n)$

$$\mathsf{P}\big(\sqrt{n}\, U_n \ \ge \ \bar{c}_\alpha(n)\big) \ = \ \alpha \ + \ o(n^{-1}), \quad n \ \to \ \infty. \tag{3.2}$$

Предположим, что а.р. для ф.р. нормированных потерь $\sqrt{n}\, U_n$ имеет вид

$$\mathsf{P}\big(\sqrt{n}\, U_n \ < \ x\big) \ = \ G(x) \ + \ \frac{1}{\sqrt{n}}\, g_1(x) \ + \ \frac{1}{n}\, \bar{g}_2(x) \ + \ o(n^{-1}), \tag{3.3}$$

где $G(x)$, $g_1(x)$, $\bar{g}_2(x)$ – достаточно гладкие функции, то есть это а.р. отличается от а.р. для ф.р. нормированных потерь $\sqrt{n}\ T_n$ только членом порядка $1/n$ (см. Лемму 3.1). Определим последовательность натуральных чисел $\{m(n) \ = \ n \ + \ d \ + \ o(1),\ \ d \ \in \ \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \ldots\}$ равенством (d – асимптотический дефект)

$$\mathsf{P}\big(\sqrt{n}\, U_{m(n)} \ \ge \ c_\alpha(m(n))\big) \ = \ \alpha \ + \ o(n^{-1}), \quad n \ \to \ \infty, \tag{3.4}$$

то есть это «добавочное число клиентов» необходимое для того, чтобы потери $\sqrt{n}\ U_n$ превзошли α – резерв $c_\alpha(n)$ потерь $\sqrt{n}\ T_n$ (в смысле определений (3.1) и (3.4)).

Теорема 3.2. ([15]) *Пусть выполнены условия Леммы 3.1 и условие (3.3). Тогда добавочное число клиентов d имеет вид*

$$d \ = \ \frac{2\big(g_2(c_\alpha) \ - \ \bar{g}_2(c_\alpha)\big)}{G^{(1)}(c_\alpha)\ c_\alpha} \ + \ o(1).$$

Приведём пример применения Теоремы 3.2.

Пусть $Y_1, Y_2, \ldots$ – случайные страховые требования независимых однотипных клиентов (независимые одинаково распределённые с.в.) такие, что

$$\mathsf{E}\, Y_1 \ = \ 0, \ \ \mathsf{E}\, Y_1^2 \ = \ 1, \ \mathsf{E}\, |Y_1|^{4+\delta} \ < \ \infty, \quad \delta \ > \ 0. \tag{3.8}$$

Для каждого n пусть

$$T_n \ = \ \frac{1}{n}\ (Y_1 \ + \ \cdots \ + \ Y_n). \tag{3.9}$$

Предположим, что с.в. Y_1 удовлетворяет условию Крамера (C)

$$\limsup_{|t|\to\infty}\ |\mathsf{E}\ \exp\{itY_1\}| \ < \ 1. \tag{3.10}$$

Пусть теперь $Z_1,\ Z_2,\ \ldots$ случайные требования другой страховой компании (независимые одинаково распределённые с.в.) такие, что

$$\mathsf{E}\, Z_1 \;=\; 0,\;\; \mathsf{E}\, Z_1^2 \;=\; 1,\; \mathsf{E}\, |Z_1|^{4+\delta} \;<\; \infty,\;\; \delta \;>\; 0. \tag{3.11}$$

Для каждого n пусть потери этой страховой компании описываются функцией вида

$$U_n \;=\; \frac{1}{n}\,(Z_1 \;+\; \cdots \;+\; Z_n). \tag{3.12}$$

Предположим, что

$$\mathsf{E}\, Y_1^3 \;=\; \mathsf{E}\, Z_1^3, \tag{3.13}$$

(например, условие (3.13) выполнено, если распределения с.в. Z_1 и Y_1 симметричны) и с.в. Z_1 удовлетворяет условию Крамера (C)

$$\limsup_{|t|\to\infty}\; |\mathsf{E}\; \exp\{itZ_1\}| \;<\; 1. \tag{3.14}$$

Теперь из Леммы 2.2 и Теоремы 3.2 непосредственно получается следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия (3.8) - (3.14). Тогда «добавочное число клиентов» d имеет вид*

$$d \;=\; \frac{\big(\mathsf{E}\; X_1^4 \;-\; \mathsf{E}\; Y_1^4\big)\;\big(3 \;-u_\alpha^2\big)}{12} \;+\; o(1).$$

3.1 Мера качества – вероятность неразорения

В этом разделе рассмотрим указанные выше страховые компании с потерями $T_n \;=\; T_n(Y_1,\cdots,Y_n)$ и $U_n \;=\; U_n(Z_1,\cdots,Z_n)$ соответственно, при этом предположим, что для заданных чисел $S_1 \;\le\; S_2$ страховые компании заинтересованы, чтобы их потери не выходили за пределы полуинтервала $[S_1,\ S_2)$. В качестве меры качества деятельности страховых компаний рассмотрим вероятности «неразорения» вида

$$\pi_n^* \;=\; \mathsf{P}\big(S_1 \le\; T_n \;<\; S_2\big), \quad \pi_n \;=\; \mathsf{P}\big(S_1 \;\le\; U_n \;<\; S_2\big). \tag{3.15}$$

Если интерпретировать T_n и U_n как суммарные страховые требования, предъявляемые страховым компаниям за определенный период, то величины π_n^* и π_n можно рассматриваться как вероятности того, что страховые требования клиентов страховых компаний, будут находиться внутри полуотрезка $[S_1,\ S_2)$.

Непосредственно из определения величины π_n^* получается следующий результат.

Лемма 3.4. *Пусть для некоторых чисел $r > 0$ и $s > 0$ для функции распределения T_n равномерно по $x \;\in\; \mathbb{R}$ справедливо а.р. вида*

$$\mathsf{P}\big(T_n \;<\; x\big) \;=\; H(x) \;+\; \frac{1}{n^r}\; h_1(x) \;+\; \frac{1}{n^{r+s}}\; h_2(x) \;+\; o(n^{-r-s}),$$

где $H(x),\ h_1(x),\ h_2(x)$ *– некоторые измеримые функции, тогда для величины* π_n^* *справедливо а.р.*

$$\pi_n^* \;=\; H(S_2) - \; H(S_1) \;+$$
$$+\;\frac{1}{n^r}\;\big(h_1(S_2)\;-\;h_1(S_1)\big)\;+\;\frac{1}{n^{r+s}}\;\big(h_2(S_2)\;-\;h_2(S_1)\big)\;+\;o(n^{-r-s}).$$

Следствие 3.4. *Пусть* $\delta_n\ \downarrow\ 0,\quad n\ \to\ \infty,$ *и*

$$S_2\;=\;S_1\;+\;\delta_n,$$

тогда в условиях Леммы 3.4 при достаточно гладких функциях $H(x),\ h_1(x),\ h_2(x)$*, справедливо а.р.*

$$\delta_n^{-1}\;\pi_n^*\;=\;H'(S_1)\;+\;\frac{1}{2}\;\delta_n\;H''(S_1)\;+\;\frac{1}{6}\;\delta_n^2\;H'''(S_1)\;+\;o(\delta_n^2)\;+$$
$$+\;\frac{1}{n^r}\;h_1'(S_1)\;+\;\frac{1}{2n^r}\;h_1''(S_1)\;\delta_n\;+\;o(\delta_n\;n^{-r})\;+$$
$$+\;\frac{1}{n^{r+s}}\;h_2'(S_1)\;+\;o(n^{-r-s}\delta_n^{-1}).$$

Аналогично предыдущему, из определения величины π_n получается следующий результат.

Лемма 3.5. *Пусть для функции распределения статистики* U_n *равномерно по* $x\;\in\;\mathbb{R}$ *справедливо а.р. вида*

$$\mathsf{P}\big(U_n\;<\;x\big)\;=\;H(x)\;+\;\frac{1}{n^r}\;h_1(x)\;+\;\frac{1}{n^{r+s}}\;\bar h_2(x)\;+\;o(n^{-r-s}),$$

где $H(x),\ h_1(x),\ \bar h_2(x)$ *– некоторые измеримые функции, тогда для величины* π_n *справедливо а.р.*

$$\pi_n \;=\; H(S_2) - \; H(S_1) \;+$$
$$+\;\frac{1}{n^r}\;\big(h_1(S_2)\;-\;h_1(S_1)\big)\;+\;\frac{1}{n^{r+s}}\;\big(\bar h_2(S_2)\;-\;\bar h_2(S_1)\big)\;+\;o(n^{-r-s}).$$

Заметим, что в этой лемме предполагается, что а.р. для ф.р. U_n отличается от а.р. для ф.р. T_n только членами порядка n^{-r-s}.

Следствие 3.5. *Пусть* $\delta_n\ \downarrow\ 0,\quad n\ \to\ \infty,$ *и*

$$S_2\;=\;S_1\;+\;\delta_n,$$

тогда в условиях Леммы 3.5 при достаточно гладких функциях $H(x),\ h_1(x),\ \bar h_2(x)$*, справедливо а.р.*

$$\delta_n^{-1}\;\pi_n\;=\;H'(S_1)\;+\;\frac{1}{2}\;\delta_n\;H''(S_1)\;+\;\frac{1}{6}\;\delta_n^2\;H'''(S_1)\;+\;o(\delta_n^2)\;+$$

$$+ \frac{1}{n^r}\, h_1'(S_1) \;+\; \frac{1}{2n^r}\, h_1''(S_1)\, \delta_n \;+\; o(\delta_n\, n^{-r}) \;+$$
$$+ \frac{1}{n^{r+s}}\, \bar{h}_2'(S_1) \;+\; o(n^{-r-s}\delta_n^{-1}).$$

Из этих лемм и формулы (1.6) непосредственно следует формула для асимптотического дефекта страховых компаний с мерами качеств (3.15).

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия Лемм 3.4 и 3.5 с $s = 1$. Тогда дефект d_n страховой компании с мерой качества π_n относительно страховой компании с мерой качества π_n^* имеет вид*

$$d_n \;=\; \frac{\bar{h}_2(S_2) \;-\; h_2(S_2) \;+\; h_2(S_1) \;-\; \bar{h}_2(S_1)}{r\; (h_1(S_2) \;-\; h_1(S_1))} \;+\; o(1).$$

Следствие 3.6. *Если $\delta_n \downarrow 0, \;\; n \to \infty$, $S_2 = S_1 + \delta_n$, то формальный переход к пределу в последнем выражении, дает формулу*

$$d_n \;=\; \frac{\bar{h}_2'(S_1) \;-\; h_2'(S_1)}{r\; h_1'(S_1)} \;+\; o(1).$$

Приведём пример применения Теоремы 3.6.

Пусть $Y_1, Y_2, \ldots$ независимые одинаково распределённые с.в. удовлетворяющие условиям (2.3), (2.4) и

$$T_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}}\, (Y_1 \;+\; \cdots \;+\; Y_n). \tag{3.15}$$

Учитывая неравенство (2.6) и Лемму 3.4, получаем следующее утверждение.

Лемма 3.7. *Пусть выполнены условия (2.3) и (2.4) с $k = 3$, тогда справедливо а.р.*

$$\mathsf{P}\big(T_n \;<\; x\big) \;=\; \Phi(x) \;+\; \frac{1}{\sqrt{n}}\, Q_1(x) \;+\; \frac{1}{n}\, Q_2(x) \;+\; o(n^{-1}),$$

и для величины π_n^* справедливо а.р.

$$\pi_n^* \;=\; \Phi(S_2) \;-\; \Phi(S_1) \;+$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{n}}\, \big(Q_1(S_2) \;-\; Q_1(S_1)\big) \;+\; \frac{1}{n}\, \big(Q_2(S_2) \;-\; Q_2(S_1)\big) \;+\; o(n^{-1}).$$

Следствие 3.7. *Пусть $\delta_n \downarrow 0, \;\; n \to \infty$, и $S_2 = S_1 + \delta_n$, тогда в условиях Леммы 3.7, справедливо а.р.*

$$\delta_n^{-1}\, \pi_n^* \;=\; \phi(S_1) \;+\; \frac{1}{2}\, \delta_n\, \phi'(S_1) \;+\; \frac{1}{6}\, \delta_n^2\, \phi''(S_1) \;+\; o(\delta_n^2) \;+$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{n}}\, Q_1'(S_1) \;+\; \frac{1}{2\sqrt{n}}\, Q_1''(S_1)\, \delta_n \;+\; o(\delta_n\, n^{-1/2}) \;+$$

$$+ \ \frac{1}{n}\ Q_2'(S_1) \ + \ o(n^{-1}\delta_n^{-1}).$$

Пусть теперь $Z_1, Z_2, \ldots$ независимые одинаково распределённые с.в. также удовлетворяющие условиям (2.3), (2.4) и

$$S_n \ = \ \frac{1}{\sqrt{n}}\ (Z_1 \ + \ \cdots \ + \ Z_n). \tag{3.16}$$

Теперь из Леммы 3.5 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.8. *Пусть выполнены условия (2.3) и (2.4) с $k \ = \ 3$, тогда справедливо а.р.*

$$\mathsf{P}\big(U_n \ < \ x\big) \ = \ \Phi(x) \ + \ \frac{1}{\sqrt{n}}\ \bar{Q}_1(x) \ + \ \frac{1}{n}\ \bar{Q}_2(x) \ + \ o(n^{-1}),$$

где

$$\bar{Q}_1(x) \ = \ -(x^2 \ - \ 1)\ \phi(x)\ \frac{\mathsf{E}\ Z_1^3}{6},$$

$$\bar{Q}_2(x) \ = \ -(x^3 \ - \ 3x)\ \phi(x)\ \frac{\mathsf{E}\ Z_1^4 \ - \ 3}{24} \ - \ (x^5 \ - \ 10x^3 \ + \ 15x)\ \phi(x)\ \frac{(\mathsf{E}\ Z_1^3)^2}{72}$$

и для величины π_n справедливо а.р.

$$\pi_n \ = \ \Phi(S_2) \ - \ \Phi(S_1) \ +$$

$$+ \ \frac{1}{\sqrt{n}}\ \big(\bar{Q}_1(S_2) \ - \ \bar{Q}_1(S_1)\big) \ + \ \frac{1}{n}\ \big(\bar{Q}_2(S_2) \ - \ \bar{Q}_2(S_1)\big) \ + \ o(n^{-1}).$$

Следствие 3.6. *Пусть $\delta_n \ \downarrow \ 0, \ \ n \ \to \ \infty$, и $S_2 \ = \ S_1 \ + \ \delta_n$, тогда в условиях Леммы 3.6, справедливо а.р.*

$$\delta_n^{-1}\ \pi_n \ = \ \phi(S_1) \ + \ \frac{1}{2}\ \delta_n\ \phi'(S_1) \ + \ \frac{1}{6}\ \delta_n^2\ \phi''(S_1) \ + \ o(\delta_n^2) \ +$$

$$+ \ \frac{1}{\sqrt{n}}\ \bar{Q}_1'(S_1) \ + \ \frac{1}{2\sqrt{n}}\ \bar{Q}_1''(S_1)\ \delta_n \ + \ o(\delta_n\ n^{-1/2}) \ +$$

$$+ \ \frac{1}{n}\ \bar{Q}_2'(S_1) \ + \ o(n^{-1}\delta_n^{-1}).$$

Из Теоремы 3.6, Лемм 3.7, 3.8 и формулы (1.5) непосредственно следует

Теорема 3.7. *Пусть выполнены условия Лемм 3.7, 3.8 и*

$$\mathsf{E}\ Y_1^3 \ = \ \mathsf{E}\ Z_1^3,$$

(например, это условие выполнено, если распределения с.в. Z_1 и Y_1 симметричны, т.е. $\mathsf{E}\ Y_1^3 \ = \ \mathsf{E}\ Z_1^3 \ = \ 0$). Тогда дефект d_n страховой компании с мерой качества π_n относительно страховой компании с мерой качества π_n^* имеет вид

$$d_n \ = \ 2\ \frac{\bar{Q}_2(S_2) \ - \ Q_2(S_2) \ + \ Q_2(S_1) \ - \ \bar{Q}_2(S_1)}{Q_1(S_2) \ - \ Q_1(S_1)}\ n^{1/2} \ + \ o(n^{1/2}).$$

Приведем примеры, когда асимптотический дефект конечен.

Следствие 3.7. *Пусть* $\delta_n = \frac{1}{n}$ *и* $S_2 = S_1 + \frac{1}{n}$, $\mathsf{E}\, Z_1^3 = \mathsf{E}\, Y_1^3 = 0$, *тогда в условиях Лемм 3.7 и 3.8 справедливы а.р.*

$$\pi_n^* = \frac{\phi(S_1)}{n} + \frac{\phi'(S_1) + 2Q_2'(S_1)}{n^2} + o(n^{-2}),$$

$$\pi_n = \frac{\phi(S_1)}{n} + \frac{\phi'(S_1) + 2\bar{Q}_2'(S_1)}{n^2} + o(n^{-2}).$$

При этом рассматриваемый дефект имеет вид

$$d_n = \frac{2(\bar{Q}_2'(S_1) - Q_2'(S_1))}{\phi(S_1)} + o(1) =$$

$$= \frac{1}{12}\,(S_1^4 - 6S_1^2 + 3)\Big(\mathsf{E}\, Z_1^4 - \mathsf{E}\, Y_1^4\Big) + o(1).$$

4. Случайное число клиентов

Рассмотрим случайные величины $N_1,\ N_2,\ \ldots$ и $X_1,\ X_2,\ \ldots$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathsf{P})$. В рассматриваемом случае страхования с.в. $X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_n$ интерпретируются как страховые требования клиентов, n – неслучайное число клиентов страховой фирмы, а с.в. N_n – случайное число клиентов страховой компании, зависящее от натурального параметра $n \in \mathbb{N}$. Например, если с.в. N_n имеет геометрическое распределение вида

$$\mathsf{P}(N_n = k) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

то

$$\mathsf{E}\, N_n = n \tag{4.1}$$

и значит среднее число клиентов, обратившихся в страховую компанию равно n. Условие (4.1) далее будет предполагаться всегда выполненным.

Предположим, что для каждого $n \geq 1$ с.в. N_n принимает только натуральные значения (то есть, $N_n \in \mathbb{N}$) и не зависит от последовательности с.в. $X_1,\ X_2,\ \ldots$.

Для каждого $n \geq 1$, как и выше, обозначим через $S_n = S_n(X_1, \cdots, X_n)$ обобщенные потери страховой компании, то есть действительную измеримую функцию, зависящую от страховых требований $X_1,\ \ldots,\ X_n$. Для каждого $n \geq 1$ определим потери страховой компании, обслуживающей случайное число клиентов N_n, через S_{N_n}

$$S_{N_n}(\omega) \equiv S_{N_n(\omega)}(X_1(\omega), \cdots, X_{N_n(\omega)}(\omega)),\quad \omega \in \Omega.$$

Следующее условие описывает асимптотическое разложение для функции распределения потерь S_n в случае неслучайного числа клиентов.

Условие А. *Существуют числа* $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, $\alpha_{in} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k$, $\beta_n > 0$, $C_k > 0$, *дифференцируемая ф.р.* $G(x)$ *и измеримые функции* $g_j(x)$, $j = 1, \ldots, k$ *такие, что*

$$\beta_n \to 0, \quad \max_{1 \leq i \leq k} |\alpha_{in}| \to 0, \quad n \to \infty,$$

$$\sup_x \Big| \mathsf{P}\big(S_n < x\big) - G(x) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_{in}\, g_i(x) \Big| \leq C_k\, \beta_n \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 4.1. *Пусть потери* $S_n = S_n(X_1, \cdots, X_n)$ *удовлетворяют Условию А. Тогда*

$$\sup_x \big| \mathsf{P}\big(S_{N_n} < x\big) - G(x) - \sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}\, \alpha_{iN_n}\, g_i(x)\big| \leq C_k\, \mathsf{E}\, \beta_{N_n}.$$

Доказательство непосредственно следует из формулы полной вероятности.

Приведем пример применения этой леммы.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – страховые требования однотипных независимых клиентов (независимые одинаково распределённые с.в.), удовлетворяющие условиям (2.3), (2.5) и потери имеют вид нормированной суммы

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\,(X_1 + \cdots + X_n). \tag{4.3}$$

Учитывая неравенство (2.6) и Лемму 4.1, получаем следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия (2.3), (2.5) и (4.3), тогда*

$$\sup_x \big| \mathsf{P}\big(S_{N_n} < x\big) - \Phi(x) - \sum_{i=1}^{k-2} \mathsf{E}\, N_n^{-i/2}\, Q_i(x)\big| \leq C_{k,\delta}\, \mathsf{E}\, N_n^{-(k-2+\delta)/2}.$$

Из соотношения (2.6) и Леммы 4.2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть для* $k = 4$, $\delta > 0$ *выполнены условия (2.3), (2.5), (4.3) и*

$$\mathsf{E}\, N_n = n, \quad \mathsf{E}\, N_n^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{a}{n} + o(n^{-1}), \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\mathsf{E}\, N_n^{-1} = \frac{b}{n} + o(n^{-1}), \quad \mathsf{E}\, N_n^{-(2+\delta)/2} = o(n^{-1}), \quad b \in \mathbb{R},$$

тогда

$$\sup_x \big| \mathsf{P}\big(S_n < x\big) - \Phi(x) - \frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}} - \frac{Q_2(x)}{n}\big| = o(n^{-1})$$

и

$$\sup_x \big| \mathsf{P}\big(S_{N_n} < x\big) - \Phi(x) - \frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}} - \frac{bQ_2(x) + aQ_1(x)}{n}\big| = o(n^{-1}).$$

Ниже эти результаты будут применены для аппроксимации α-резерва и нахождения асимптотического дефекта.

Напомним что асимптотическим α-резервом ($\alpha \in (0,1)$) соответствующим потерям S_n, называется величина $c^*_\alpha(n)$, удовлетворяющую асимптотическому равенству

$$\mathsf{P}\big(S_n \geq c^*_\alpha(n)\big) = \alpha + o(n^{-1}), \quad n \to \infty, \tag{4.4}$$

соответственно α-резервом случайных потерь G_{N_n} назовём величину $\tilde{c}_\alpha(n)$ такую, что

$$\mathsf{P}\big(S_{N_n} \geq \tilde{c}_\alpha(n)\big) = \alpha + o(n^{-1}), \quad n \to \infty. \tag{4.5}$$

Из Лемм 3.1 и 4.3 непосредственно следут а.р. для асимптотических α-резервов.

Лемма 4.4. *Пусть для $k = 4$, $\delta > 0$ выполнены условия (2.3), (2.5), (4.3) и условия Леммы 4.3, тогда для асимптотических α-резервов $c^*_\alpha(n)$ и $\tilde{c}_\alpha(n)$ справедливы а.р.*

$$c^*_\alpha(n) = u_\alpha + \frac{\mathsf{E}\, X_1^3}{6\sqrt{n}}\,(u_\alpha^2 - 1) + \\ + \frac{1}{12n}\Big(\frac{\mathsf{E}^2\, X_1^3}{3}\,(5u_\alpha - 2u_\alpha^3) + \frac{\mathsf{E}\, X_1^4 - 3}{2}\,(u_\alpha^3 - 3u_\alpha)\Big) + o(n^{-1}),$$

$$\tilde{c}_\alpha(n) = u_\alpha + \frac{\mathsf{E}\, X_1^3}{6\sqrt{n}}\,(u_\alpha^2 - 1) + \\ + \frac{1}{12n}\Big(\frac{\mathsf{E}^2\, X_1^3}{3}\,(5u_\alpha - 2u_\alpha^3) + \\ \frac{b(\mathsf{E}\, X_1^4 - 3)}{2}\,(u_\alpha^3 - 3u_\alpha) + 2a\,\mathsf{E}\, X_1^3\,(u_\alpha^2 - 1)\Big) + o(n^{-1}),$$

где u_α удовлетворяет уравнению $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Определим теперь последовательность натуральных чисел $\{m(n) = n + d^* + o(1),\ d^* \geq 0,\quad n = 1,2,\ldots\}$ равенством (d^* – добавочное число клиентов или асимптотический дефект)

$$\mathsf{P}\Big(S_{N_{m(n)}} \geq \sqrt{m(n)/n}\; c^*_\alpha(m(n))\Big) = \alpha + o(n^{-1}), \quad n \to \infty, \tag{4.6}$$

то есть это необходимое (добавочное) число клиентов для того, чтобы случайные потери S_{N_n} превзошли нормированный α – резерв $c^*_\alpha(n)$ потерь S_n (в смысле определений (4.4), (4.5) и (4.6)).

Аналогично Теореме 3.1 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4.5. ([14]) *Пусть выполнены следующие условия*

$$\mathsf{E}\, N_n = n, \quad \mathsf{E}\, N_n^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{a}{n} + o(n^{-1}), \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\mathsf{E}\ N_n^{-1} \ = \ \frac{b}{n} \ + \ o(n^{-1}), \quad \mathsf{E}\ N_n^{-(2+\delta)/2} \ = \ o(n^{-1}), \quad b \ \in \ \mathbb{R}$$

и

$$\sup_x \Big| \ \mathsf{P}\big(S_n \ < \ x\big) \ - \ G(x) \ - \ \frac{g_1(x)}{\sqrt{n}} \ - \ \frac{g_2(x)}{n} \Big| \ \le \ \frac{C}{n^{(2+\delta)/2}}, \quad \delta \ > \ 0,$$

тогда добавочное число клиентов d^* (см. (4.6)), соответствующее случайным потерям S_{N_n} относительно потерь S_n имеет вид

$$d^* \ = \ \frac{2\big(g_2(c_\alpha)\ (1 \ - \ b) - \ a \ g_1(c_\alpha)\big)}{G^{(1)}(c_\alpha)\ c_\alpha} \ + \ o(1),$$

где c_α удовлетворяет уравнению $G(c_\alpha) \ = \ 1 \ - \ \alpha$.

Из этой Теоремы непосредственно получается следующее утверждение.

Лемма 4.6. *Пусть выполнены условия (2.3) – (2.5) с $k = 4$ и $\delta > 0$. Тогда добавочное число клиентов d^* имеет вид (см. (4.6))*

$$d^* \ = \ \frac{2\big((1 \ - \ b)\ Q_2(u_\alpha) \ - \ a \ Q_1(u_\alpha)\big)}{\phi(u_\alpha)\ u_\alpha} \ + \ o(1),$$

если

$$\mathsf{E}\ X_1^3 \ = \ 0,$$

то

$$d^* \ = \ \frac{(1 \ - \ b)\ (3 \ - \ u_\alpha^2)\ (\mathsf{E}\ X_1^4 \ - \ 3)}{12} \ + \ o(1).$$

5. Случай трёхточечного симметричного распределения и распределения Пуассона

Применим Лемму 4.6 для получения а.р. асимптотического α-резерва в случае, если число клиентов N_n имеет трёхточечное симметричное распределения.

Пусть случайное число клиентов N_n имеет симметричное распределение вида

$$N_n \ : \ \begin{matrix} n \ - \ h_n, & n, & n \ + \ h_n \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, \end{matrix} \tag{5.1}$$

где последовательность натуральных чисел $h_n \ < \ n$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{n} \ = \ 0. \tag{5.2}$$

Лемма 5.1.([15]) *Пусть случайное число клиентов N_n имеет распределение (5.1) и выполнено условие (5.2), тогда справедливы равенства*

$$\mathsf{E}\ N_n \ = \ n,$$

$$\mathsf{E}\ N_n^{-1/2} \ = \ \frac{1}{\sqrt{n}} \ - \frac{1}{4\sqrt{n}} \ \Big(\frac{h_n}{n}\Big)^2 \ + \ O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \ \Big(\frac{h_n}{n}\Big)^3\Big),$$

$$\mathsf{E}\ N_n^{-1} \ = \ \frac{1}{n} \ + \frac{2}{3n}\ \Big(\frac{h_n}{n}\Big)^2 \ + \ O\Big(\frac{1}{n}\ \Big(\frac{h_n}{n}\Big)^4\Big),$$
$$\mathsf{E}\ N_n^{-3/2} \ = \ \frac{1}{n^{3/2}} \ + \ O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\ \Big(\frac{h_n}{n}\Big)^2\Big), \quad n \ \to \ \infty.$$

Теперь из этих лемм непосредственно вытекает следующая Теорема.

Теорема 5.2. ([13]) *Пусть выполнены условия Леммы 4.4 и с.в. N_n имеет распределение (5.1), тогда для асимптотического α-резерва $\tilde{c}_\alpha(n)$, соответствующего случайным потерям S_{N_n}, справедливо а.р. вида*

$$\tilde{c}_\alpha(n) \ = \ c^*_\alpha(n) \ - \ \frac{\mathsf{E}\ X_1^3(u_\alpha^2 \ - \ 1)}{24\sqrt{n}}\Big(\frac{h_n}{n}\Big)^2 \ + \ o(n^{-1}), \quad n \ \to \ \infty.$$

Замечание 5.2. *Пусть выполнены условия Теоремы 5.1 и*

$$h_n \ = \ \gamma\ n^\beta \ + \ o(n^\beta), \ \ \gamma \ \geq \ 0, \quad 0 \ \leq \ \beta \ < \ 1,$$

тогда

$$n^{5/2-2\beta}\big(c^*_\alpha(n) \ - \ \tilde{c}_\alpha(n)\big) \ \to \ \frac{\gamma^2}{24}\ \mathsf{E}\ X_1^3\ (\ u_\alpha^2 \ - \ 1), \quad n \ \to \ \infty.$$

Применим Лемму 4.2 и Теорему 4.5 для получения добавочного числа клиентов и а.р. асимптотического α-резерва в случае, если число клиентов N_n имеет трёхточечное симметричное распределения (5.1).

Применяя Лемму 4.1, непосредственно получаем следующее утверждение.

Лемма 5.3. *Пусть выполнены условия (2.3) – (2.5) с $k \ = \ 4$ и $0 \ < \ \delta \ \leq \ 1$ и условия (5.1) и (5.2). Тогда*

$$\sup_x \Big|\ \mathsf{P}\big(S_{N_n} \ < \ x\big) \ - \ \Phi(x) \ - \ \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1 \ - \ \frac{h_n^2}{4n^2}\Big)\ Q_1(x) \ -$$
$$- \ \frac{1}{n}\Big(1 \ + \ \frac{2h_n^2}{3n^2}\Big)\ Q_2(x)\Big| \ = \ O\Big(\frac{1}{n^{(2+\delta)/2}}\ \Big(\frac{h_n}{n}\Big)^{(4+2\delta)/3}\Big).$$

Следствие 5.3. *Пусть выполнены условия Леммы 5.3 и $h_n \ = \ n^{3/4}$. Тогда равномерно по $x \ \in \ \mathbb{R}$*

$$\mathsf{P}\big(S_{N_n} \ < \ x\big) \ = \ \Phi(x) \ + \ \frac{1}{\sqrt{n}}\ Q_1(x) \ + \ \frac{1}{n}\Big(Q_2(x) \ - \ \frac{1}{4}Q_1(x)\Big) \ = \ o(n^{-1}).$$

Теперь из этих лемм непосредственно вытекает следующая Теорема.

Теорема 5.4. ([14]) *Пусть выполнены условия Следствия 5.3, тогда для асимптотических α-резервов $c^*_\alpha(n)$ и $\tilde{c}_\alpha(n)$ потерь S_n и S_{N_n} справедливы а.р.*

$$c^*_\alpha(n) \ = \ u_\alpha \ + \ \frac{\mathsf{E}\ X_1^3}{6\sqrt{n}}\ (u_\alpha^2 \ - \ 1) \ +$$

$$+ \frac{1}{12n}\left(\frac{\mathsf{E}^2\, X_1^3}{3}\,(5u_\alpha - 2u_\alpha^3) + \frac{\mathsf{E}\, X_1^4 - 3}{2}\,(u_\alpha^3 - 3u_\alpha)\right) + o(n^{-1}),$$

$$\tilde{c}_\alpha(n) = u_\alpha + \frac{\mathsf{E}\, X_1^3}{6\sqrt{n}}\,(u_\alpha^2 - 1) +$$

$$+ \frac{1}{12n}\left(\frac{\mathsf{E}^2\, X_1^3}{3}\,(5u_\alpha - 2u_\alpha^3) + \frac{\mathsf{E}\, X_1^4 - 3}{2}\,(u_\alpha^3 - 3u_\alpha) - \frac{1}{2}\,\mathsf{E}\, X_1^3\,(u_\alpha^2 - 1)\right) + o(n^{-1}),$$

где u_α удовлетворяет уравнению $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$. Соответствующее добавочное число клиентов d^* равно

$$d^* = \frac{Q_1(u_\alpha)}{2\phi(u_\alpha)\, u_\alpha} + o(1) = \frac{(1 - u_\alpha^2)\,\mathsf{E}\, X_1^3}{12\, u_\alpha} + o(1).$$

Пусть теперь M_n пуассоновская случайная величина с параметром $n - 1$, $n \geq 2$, то есть

$$\mathsf{P}\big(M_n = k\big) = e^{1-n}\,\frac{(n-1)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Определим случайный индекс (случайное число клиентов) N_n по формуле

$$N_n = M_n + 1,$$

тогда

$$\mathsf{E}\, N_n = n$$

и

$$\mathsf{E}\, N_n^{-1} = e^{1-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-1)^k}{(k+1)!} = \frac{1 - e^{1-n}}{n-1}.$$

Из этой формулы непосредственно следует, что

$$\mathsf{E}\, N_n^{-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\big(n^{-2}\big). \tag{5.3}$$

Аналогично получаем соотношения

$$\mathsf{E}\, N_n^{-2} = e^{1-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-1)^k}{(k+1)^2 k!} = \frac{e^{1-n}}{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n-1)^k}{k\; k!} =$$

$$= \frac{e^{1-n}}{n-1}\int_0^{n-1}\frac{e^x - 1}{x}\,d\,x.$$

$$\mathsf{E}\, N_n^{-2} = \frac{1}{n^2} + O\big(n^{-3}\big),$$
$$\mathsf{E}\, N_n^{-3} = O\big(n^{-3}\big),$$
$$\mathsf{E}\, N_n^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} + O\big(n^{-3/2}\big), \quad n \to \infty. \tag{5.4}$$

Теперь из соотношений (5.3), (5.4) и Лемм 4.3 - 4.6 непосредственно получаются следующие утверждения

Лемма 5.5. *Пусть для $k = 4$, $\delta > 0$ выполнены условия (2.3), (2.5), (4.3) и случайный индекс N_n имеет вид*

$$N_n = M_n + 1,$$

где M_n пуассоновская случайная величина с параметром $n - 1$, $n \geq 2$. Тогда

$$\sup_x \Big| \mathsf{P}\big(S_{N_n} < x\big) - \Phi(x) - \frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}} - \frac{Q_2(x)}{n} \Big| = o(n^{-1}).$$

Лемма 5.6. *Пусть выполнены условия Леммы 5.5, тогда для асимптотических α-резервов $c^*_\alpha(n)$ и $\tilde{c}_\alpha(n)$ справедливы а.р.*

$$c^*_\alpha(n) = \tilde{c}_\alpha(n) = u_\alpha + \frac{\mathsf{E}\, X_1^3}{6\sqrt{n}}\,(u_\alpha^2 - 1) +$$

$$+ \frac{1}{12n}\Big(\frac{\mathsf{E}^2\, X_1^3}{3}\,(5u_\alpha - 2u_\alpha^3) + \frac{\mathsf{E}\, X_1^4 - 3}{2}\,(u_\alpha^3 - 3u_\alpha)\Big) + o(n^{-1}),$$

где u_α удовлетворяет уравнению $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Лемма 5.7. *Пусть выполнены условия Леммы 5.5,тогда добавочное число клиентов d^* (см. (4.6)) равно нулю, то есть $d^* = 0$.*

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрено асимптотическое поведение резерва страховой компании (организации, подверженной риску) в простейшей модели страхования в случае, когда число факторов, приводящих к убытку (число клиентов), как случайно так и детерминировано. Проведено асимптотическое сравнение деятельности таких организаций в терминах необходимого добавочного числа таких факторов (клиентов). Приведены явные формулы для асимптотического дефекта. Рассмотрены два конкретных примера, иллюстрирующие полученные результаты. Первый пример касается сумм независимых случайных величин, которые описывают суммарные потери страховой компании, а во втором примере рассматривается трёхточечное симметричное распределение и распределение Пуассона, характеризующие случайное число клиентов.

Список литературы

[1] Гнеденко Б.В. Об оценке неизвестных параметров распределения при случайном числе независимых наблюдений // Труды Тбилисского Математического института. 1989. Т. 92. С. 146–150.

[2] Гнеденко Б.В., Фахим Х. Об одной теореме переноса // Доклады Академии наук СССР. 1969. Т. 187. С. 15–17.

[3] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Об использовании распределения Стьюдента в задачах теории вероятностей и математической статистики // Теория вероятностей и ее применения. 2004. Т. 49, № 3. С. 417–435. https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159

[4] Bening V.E., Korolev V.Yu. Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance. Utrecht: VSP, 2002. 434 p.

[5] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Некоторые статистические задачи, связанные с распределением Лапласа // Информатика и ее применения. 2008. Т. 2, № 2. С. 19–34.

[6] Petrov V.V. Limit Theorems of Probability Theory: Sequences of Independent Random Variables. Oxford: Clarendon Press, 1985. 437 p.

[7] Hodges J.L., Lehmann E.L. Deficiency // The Annals of Mathematical Statistics. 1970. Vol. 41, № 5. Pp. 783–801.

[8] Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1976. 648 с.

[9] Lehmann E.L., Casella G. Theory of Point Estimation. Berlin: Springer, 1998. 589 p.

[10] Bening V.E. Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses: Efficient Statistics, Optimality, Power Loss, and Deficiency. Utrecht: VSP, 2000. 277 p.

[11] Bening V.E. Transfer theorems concerning asymptotic expansions for the distribution functions of statistics based on samples with random sizes // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. 2018. Vol. 28, № 2. Pp. 187–200.

[12] Bening V.E. On the asymptotic deficiency of some statistical estimators based on samples with random sizes // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. 2018. Vol. 21, № 2. Pp. 185–193.

[13] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении квантилей распределений статистик, основанных на выборках случайного объема // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 5–12. https://doi.org/10.26456/vtpmk175

[14] Бенинг В.Е. О поведении асимптотического дефекта квантилей распределений статистик, основанных на выборках случайного объема // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 42–57. https://doi.org/10.26456/vtpmk509

[15] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении резерва страховой компании // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 35–48. https://doi.org/10.26456/vtpmk594

Образец цитирования

Бенинг В.Е. О сравнении необходимых резервов организаций, подверженных риску, с помощью понятия дефект // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 5–26. https://doi.org/10.26456/vtpmk643

Сведения об авторах

1. **Бенинг Владимир Евгеньевич**
профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.
E-mail: bening@yandex.ru

ON THE ORGANIZATIONS' RISK RESERVES COMPARISON BASED ON THE DEFICIENCY CONCEPT

Bening Vladimir Evgenyevich
Professor in the Department of Mathematical Statistics,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: bening@yandex.ru

Received 12.07.2022, revised 27.07.2022.

The paper considers the asymptotic behavior of the reserve of an organization exposed to risk in the case when the number of factors leading to a loss is random. In addition to the new results, the paper contains an overview of the author's recent results concerning the asymptotic behavior of insurance company reserves. An asymptotic comparison of the activities of such organizations is carried out in terms of the necessary additional number of such factors. Two examples illustrating the obtained results are considered. The first example concerns sums of independent random variables, and the second one deals with a three-point symmetric distribution and a Poisson distribution.

Keywords: reserve of insurance company, sample of random size, asymptotic expansions, three-point symmetric distributionl, Poisson distribution, asymptotic deficiency.

Citation

Bening V.E., "On the organizations' risk reserves comparison based on the deficiency concept", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 3, 5–26 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk643

References

[1] Gnedenko B.V., "On the estimation of unknown distribution parameters for a random number of independent observations", *Trudy Tbilisskogo Matematicheskogo instituta [Proceedings of the Tbilisi Mathematical Institute]*, **92** (1989), 146–150 (in Russian).

[2] Gnedenko B.V., Fakhim Kh., "On a transfer theorem", *Doklady Mathematics*, **187** (1969), 15–17 (in Russian).

[3] Bening V.E., Korolev V.Y., "On an application of the Student distribution in the theory of probability and mathematical statistics", *Theory of Probability and its Applications*, **49**:3 (2005), 377–391, https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159.

[4] Bening V.E., Korolev V.Yu., *Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance*, VSP, Utrecht, 2002, 434 pp.

[5] Bening V.E., Korolev V.Yu., "Some statistical problems related to the Laplace distribution", *Informatics and Applications*, **2**:2 (2008), 19–34 (in Russian).

[6] Petrov V.V., *Limit Theorems of Probability Theory: Sequences of Independent Random Variables*, Clarendon Press, Oxford, 1985, 437 pp.

[7] Hodges J.L., Lehmann E.L., "Deficiency", *The Annals of Mathematical Statistics*, **41**:5 (1970), 783–801.

[8] Kramer G., *Matematicheskie metody statistiki [Mathematical methods of statistics]*, Mir Publ., Moscow, 1976 (in Russian), 648 pp.

[9] Lehmann E.L., Casella G., *Theory of Point Estimation*, Springer, Berlin, 1998, 589 pp.

[10] Bening V.E., *Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses: Efficient Statistics, Optimality, Power Loss, and Deficiency*, VSP, Utrecht, 2000, 277 pp.

[11] Bening V.E., "Transfer theorems concerning asymptotic expansions for the distribution functions of statistics based on samples with random sizes", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **28**:2 (2018), 187–200.

[12] Bening V.E., "On the asymptotic deficiency of some statistical estimators based on samples with random sizes", *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, **21**:2 (2018), 185–193.

[13] Bening V.E., "On asymptotic behavior of quantiles of the distributions of statistics based on the samples with random sizes", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 5–12 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk175.

[14] Bening V.E., "On asymptotic behavior of quantiles deficiencies of the distributions of statistics based on the samples with random sizes", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2018, № 3, 42–57 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk509.

[15] Bening V.E., "On the asymptotic behavior of insurance company reserve", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 35–48 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk594.