

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519.651

МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕМЕННОГО ШАГА ДЛЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЭМПИРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Мингалиев З.З.* , Новикова С.В.* , Моисеев Г.В.**

*Казанский национальный исследовательский технический университет имени
А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань

**Финансовый университет при Правительстве РФ, г. Москва

Поступила в редакцию 15.07.2022, после переработки 15.08.2022.

В работе предложен численный метод адаптивного подбора переменного шага для аппроксимации нелинейной одномерной функции, аналитическое выражение которой не задано, кусочно-линейной функцией. Показано, что в условиях миниатюризации вычислительных устройств, подбор шага (сетки) аппроксимации является важной задачей в плане минимизации необходимого количества вычислений. Разработанный алгоритм включает вычисление длин последовательных интервалов, покрывающих в итоге всю область определения функции, с заранее заданной точностью аппроксимации. В качестве меры точности использован коэффициент детерминации. Приведены численные эксперименты, проведено сравнение предложенного метода с методом с постоянным шагом, обеспечивающим ту же точность, выраженную также в значении коэффициента детерминации. Проведенный вычислительный эксперимент доказал преимущество разработанного метода по вычислительным затратам при той же точности.

Ключевые слова: кусочно-линейная аппроксимация, переменный шаг, шаг сетки аппроксимации, численные методы.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 35–48.
<https://doi.org/10.26456/vtprm644>

Введение

В природе не существует идеального процесса, который можно однозначно представить какой-либо аналитической функцией: линейной, экспоненциальной, степенной или любой другой. Динамика фазовых характеристик реальных процессов может быть лишь приближена с некоторой степенью точности к аналитически заданной функции для дальнейшего анализа либо прогнозирования. Способ

© Мингалиев З.З., Новикова С.В., Моисеев Г.В., 2022

представления реального процесса в виде функции заданного вида известен как механизм аппроксимации [1].

В настоящее время с развитием миниатюрных роботизированных систем, широко применяемых как в технике, так и в медицине, сельском хозяйстве, бытовых приборах и др., вопрос экономии вычислительных ресурсов встает особенно остро. Для работы маломощных миниатюрных цифровых устройств, которые в режиме реального времени осуществляют вычисление определенных числовых параметров, требуется разрабатывать такие алгоритмы и методы, которые требуют для вычислений минимальное количество арифметических операций, так как на каждую операцию затрачивается определенный временной промежуток. Увеличение количества затрачиваемых операций приводит к уменьшению быстродействия вычислительных возможностей аппаратных средств, что является критически важным для самоуправляемых мобильных устройств [2].

В связи с этим для практического применения аппроксимирующих математических моделей в составе управляющих устройств реального времени, где вычисление будущего состояния системы производится на основе функции аппроксимации, особое значение имеют линейные модели из-за простоты реализации и скорости вычислений. Если же динамика реального процесса является существенно нелинейной, применяются методы кусочно-линейной аппроксимации [3].

Основной проблемой метода кусочно-линейной аппроксимации является обоснование выбора шага аппроксимации. То есть если реальная эмпирическая функция задана на некотором интервале $X \in [a_1, a_n]$, то возникает нетривиальная задача определения границ непересекающихся интервалов $[x_u, x_v]$, в совокупности покрывающих интервал $[a_1, a_n]$, внутри которых функция может быть заменена линейным многочленом без значительной потери точности.

1. Существующие подходы к выбору шага для кусочно-линейной аппроксимации

В настоящее время в работах, посвященных кусочно-линейной аппроксимации нелинейных функций, в основном используется метод с постоянным шагом [4-5]. Согласно данному подходу, шаг h разбиения интервала $[0, T]$ на подинтервалы задается заранее, причем его значение выбирается не больше заданного порога допустимой погрешности $h \leq \varepsilon$. Замена нелинейного участка эмпирической кривой линейным уравнением внутри равновеликих подинтервалов $[x_k, x_{k+1}]$, $x_{k+1} = x_k + h$, предполагает заранее избыточное количество подинтервалов, так как шаг соответствует самому «криволинейному» участку. Очевидно, что если эмпирическая функция имеет относительно прямые, близкие к линейным, участки, то количество подинтервалов, а, следовательно, и вычислений, может быть сокращено за счет увеличения размера подинтервалов, соответствующих квазилинейным участкам аппроксимируемой функции. Подход использования переменного шага практически не представлен в литературе, описываемые способы выбора шага переменной длины в основном являются чисто эмпирическими, основанными на заранее известном виде аппроксимируемой кривой, или иной априорной информации о реальном процессе [6].

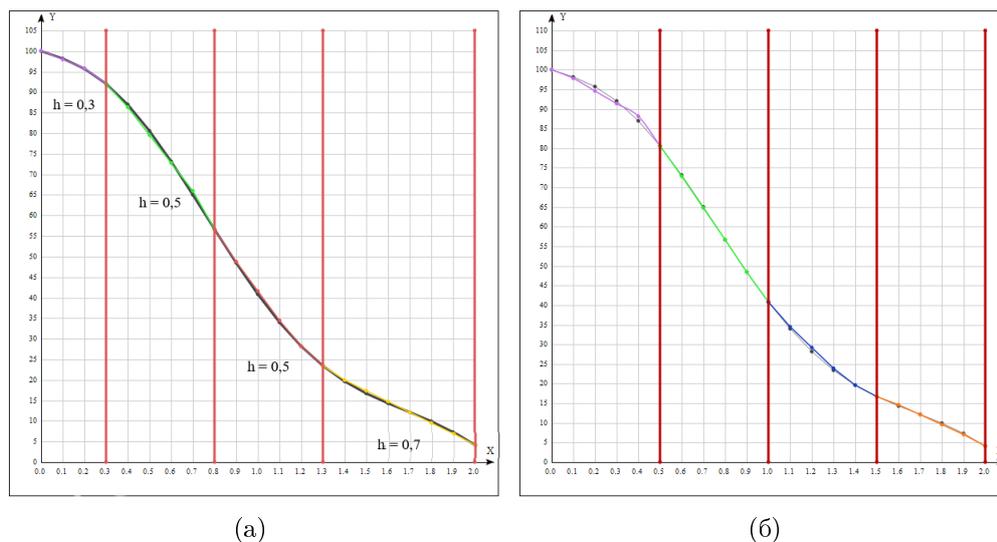


Рис. 1: Кусочно-линейная аппроксимация с (а) переменным шагом и (б) постоянным шагом $h = 0.5$

2. Постановка задачи динамического расчета шага переменной длины

Рассмотрим эмпирическую нелинейную одномерную функцию $y = f(x)$, заданную таблично на интервале $[a_1, a_n]$ в виде пары векторов-столбцов координат входных значений $X^n = (x_1, x_2 \dots x_n)^T$ и соответствующих координат выходных значений $Y^n = (y_1, y \dots y_n)^T$. Здесь $x_1 = a_1, x_n = a_n, n$ – количество опорных точек-узлов таблично заданной функции. Пары «вход-выход» образуют матрицу T размерности $(n \times 2)$ следующего вида:

$$T = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \dots & \dots \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = [X^n | Y^n].$$

Введем понятие *сегмента*.

Сегмент – это подматрица матрицы T , включающая в себя последовательные строки матрицы T с некоего номера u до номера v . Сегменты не пересекаются между собой. В совокупности сегменты образуют матрицу T .

Обозначим сегмент следующий образом:

$$S^m(u, v) = \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ \dots & \dots \\ x_v & y_v \end{pmatrix},$$

$$S^m \cap S^l = \emptyset, \quad \bigcup_{m=1}^Q S^m = T.$$

Здесь: Q – количество сегментов, m – порядковый номер сегмента, u – индекс начального элемента сегмента, v – индекс конечного элемента сегмента.

Необходимо декомпозировать исходную матрицу T на сегменты таким образом, чтобы при замене участка нелинейной функции внутри сегмента линейным отрезком результирующая кусочно-линейная функция аппроксимировала исходную нелинейную функцию с заданной точностью. При этом в качестве размера шага аппроксимации h^m принимается длина соответствующего сегмента $h^m = d[S^m(u, v)]$.

3. Метод динамического определения сегментов переменной длины для кусочно-линейной аппроксимации с заданной точностью

Для решения поставленной задачи был разработан численный метод определения на матрице T сегментов максимально возможной длины при условии, что внутри сегмента линейный многочлен аппроксимирует исходную функцию с заданной точностью ε . В качестве критерия точности используется коэффициент детерминации R^2 , вычисляемый для линейной регрессионной функции внутри сегмента. В ходе исполнения алгоритма производится два цикла вычислений: внешний цикл отвечает за сокращение исходного интервала поиска $[a_1; a_n]$ по мере того, как будут выделяться последовательные сегменты аппроксимации; внутренний цикл отвечает за выделение границ очередного сегмента внутри интервала поиска.

Алгоритм:

Шаг 0. Установить начальные значения: номер определяемого сегмента $m = 1$, индекс первого элемента определяемого сегмента $u = 1$. Задать параметр точности ε .

Начало внешнего цикла

Шаг 1. $v = n$

Начало внутреннего цикла

Шаг 2. Для сегмента $S^m(u, v)$ построить линейную регрессионную функцию $\hat{y} = A + Bx$ с коэффициентами, определяемыми согласно методу наименьших квадратов:

$$A = \frac{\sum_{i=u}^v y_i \sum_{i=u}^v x_i^2 - \sum_{i=u}^v x_i \sum_{i=u}^v x_i y_i}{(v - u + 1) \sum_{i=u}^v x_i^2 - \left(\sum_{i=u}^v x_i \right)^2},$$

$$B = \frac{(v - u + 1) \sum_{i=u}^v x_i y_i - \sum_{i=u}^v x_i \sum_{i=u}^v y_i}{(v - u + 1) \sum_{i=u}^v x_i^2 - \left(\sum_{i=u}^v x_i \right)^2}.$$

Шаг 3. Вычислить значения регрессионной функции в узлах сетки сегмента $S^m(u, v)$:

$$\hat{y}_i = A + Bx_i, \quad i = \overline{u, v}.$$

Шаг 4. Вычисляется коэффициент детерминации для сегмента $S^m(u, v)$:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=u}^v (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=u}^v (y_i - \bar{y})^2}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=u}^v y_i}{(v - u + 1)}.$$

Шаг 5. Если $R^2 < \varepsilon$ то $v = v - 1$. Возврат к шагу 2.

Иначе переход к шагу 6.

Конец внутреннего цикла.

Шаг 6. Если $v < n$, то $m = m + 1$, $u = v + 1$, возврат к **Шагу 1**. Иначе $Q = m$, завершить формирование сегментов.

Конец внешнего цикла

Разработанный алгоритм позволяет определить подинтервалы для последующего построения внутри каждого линейного аппроксимирующего участка. Для проведения численных экспериментов метод был представлен в виде структурной схемы (Рис. 3).

4. Вычислительные эксперименты

В качестве примера в статье рассматривается кусочно-линейная аппроксимация нелинейной функции, отражающей динамику концентрации в плазме крови экзогенного инсулина пациентом с абсолютной инсулиновой недостаточностью (сахарный диабет 1 типа).

Концентрация инсулина, или «активный инсулин» является основополагающим параметром при вычислении потребных доз препарата при интенсивной персонализированной инсулинотерапии. Персонализированный алгоритм терапии, в свою очередь, реализуется на носимых малогабаритных устройствах с небольшими вычислительными мощностями. В частности, перспективные разработки «интеллектуальной инсулиновой помпы» со встроенным нейросетевым алгоритмом прогноза гликемии и динамическим расчетом доз, потребовали создания методов расчета активного инсулина на основе нетребовательных к вычислительным ресурсам алгоритмов [7].

Препараты инсулина классифицируются в зависимости от скорости абсорбции и продолжительности действия [8]. Различают следующие группы препаратов инсулина (Табл. 1.):

Таблица 1: Классификация инсулинов по длительности действия

Вид инсулина	Продолжительность действия
Инсулины короткого действия	6-8 часов
Инсулины ультракороткого действия	4-6 часов
Инсулины длительного действия	12-16 часов
Инсулины сверхдлительного действия	20-42 часа

Для конкретного пациента выбор искусственного инсулина различен, однако

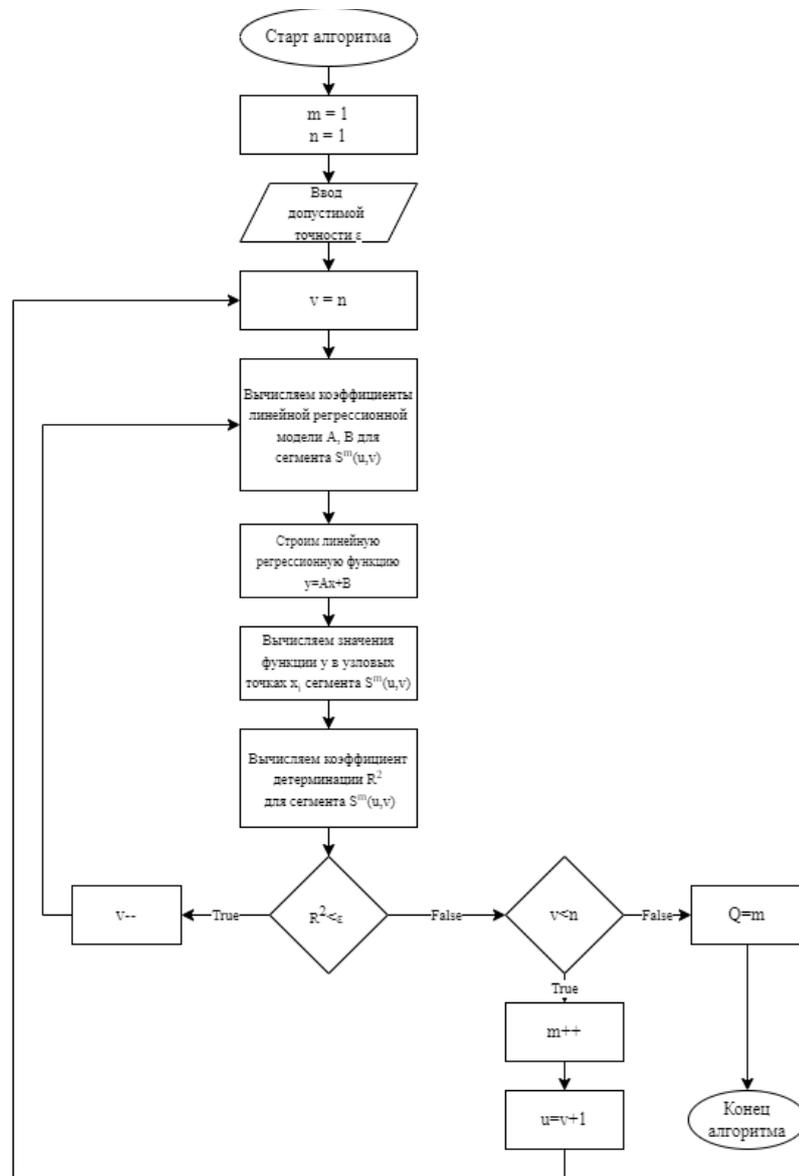


Рис. 2: Структурная схема алгоритма

общий усредненный вид кривой концентрации постоянен и прилагается к инструкции по конкретному препарату (или группе препаратов) в графическом виде [9-10]. В данной работе рассматриваются препараты ультракороткого действия, так как именно они используются в инсулиновых помпах при интенсивной инсулинотерапии. Продолжительность действия принята в 6 часов. Кривая активности инсулина представлена на Рис. 3.

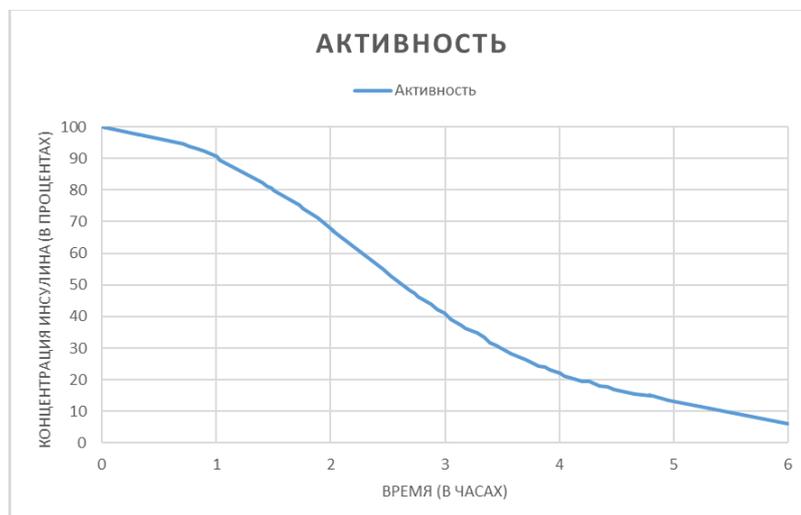


Рис. 3: Кривая активности инсулина ультракороткого действия

Для проведения вычислительных экспериментов кривая активности была формализована в виде кусочно-линейной аппроксимации с минимальным постоянным шагом в 6 минут (0.1 часа). Данное представление можно принять за базовую аппроксимацию с шагом $h = 0.1$. Фрагмент табличного представления полученной кривой с постоянным шагом $h = 0.1$ представлено в Таблице 2.

Таблица 2: Табличное представление базовой модели активности инсулина с минимальным постоянным шагом для препарата продолжительностью действия 6 часов

Время	Активность инсулина	k	b	$\hat{y} = kx + b$
0	100	-5,991893182	100	100
0,1	99,40081068	-6,003672386	100,0011779	99,40081068
0,2	98,80044344	-6,40604637	100,0816527	98,80044344
...
5,8	6,293765683	-10,66724731	68,1638001	6,293765683
5,9	5,227040952	-11,35840952	72,24165711	5,227040952
6	4,0912	-40,912	249,5632	4,0912

Здесь k , b – коэффициенты линейной модели, \hat{y} – значения, полученные при

подстановке узловых точек x_i в полученную аналитическую модель. Выполненный эксперимент хоть и показывает точные значения полученных данных при подстановке в аппроксимирующую функцию, но требует больших вычислительных затрат. В терминах разработанного алгоритма, базовый подход требует вычислений для 60-ти сегментов каждой пары соседних узловых точек: $S^1(1, 2)$, $S^2(2, 3)$... $S^{60}(59, 60)$.

4.1 План эксперимента

Для сравнения эффективности предложенного алгоритма с алгоритмом при постоянном шаге, будет построено две модели кусочно-линейной аппроксимации с одной и той же точностью для двух подходов. Точность определяется как значение коэффициента детерминации R^2 линейной модели на каждом выделенном в процессе работы алгоритмов сегменте. Точность всей модели принимается равной минимальному значению R^2 по всем сегментам. В качестве количественных критериев сравнения принято количество потребовавшихся для каждого подхода вычислений.

4.2 Эксперимент №1

Для тестирования разработанного метода кусочно-линейной аппроксимации рассмотрена кривая активности инсулина 6 часового действия (рис.3). Кусочно-линейная аппроксимация строится с допустимой точностью $\varepsilon = 0,996$. В результате вычислений было получено пять сегментов различной длины: $S^1(0, 6)$, $S^2(6, 10)$, $S^3(10, 40)$, $S^4(40, 46)$, $S^5(46, 60)$. Для каждого сегмента требование по точности построенной модели $R^2 \geq 0,996$ было удовлетворено. Результаты представлены в Табл.3.

Таблица 3: Результаты вычислительных экспериментов для метода с переменным шагом

m	u	v	A	B	R²
1	0	6	-6,66733	100,07368	0,99622
2	6	10	-12,19437	103,092275	0,99693
3	10	40	-24,69832	116,52314	0,99676
4	40	46	-10,68797	64,64614	0,99645
5	46	60	-7,94256	52,55584	0,99602

Количество произведенных операций для построения линейных моделей на множестве аппроксимирующих сегментов представлено в Таблице 4.

Таблица 4: Представление количества произведенных операций

Операция	Количество операций
Сравнение	144
Сложение	488

продолжение на следующей странице...

(продолжение Таблицы 4)

Операция	Количество операций
Вычитание	3
Умножение	189
Деление	1
ВСЕГО	825

4.3 Эксперимент №2

Для построения линейно-кусочной модели с постоянным шагом, обеспечивающую точность $R^2 \geq 0,996$, сначала была определена длина постоянного шага, то есть длина сегментов.

Для поиска подходящей длины сегментов используем «жадный» алгоритм [11]. На каждой итерации будем делить исходную матрицу T на k сегментов равной длины и вычислять коэффициент детерминации R^2 для каждого полученного сегмента. Если для каждого полученного сегмента $R^2 > \varepsilon$, то получаем корректное разделение. В противном случае каждый выделенный ранее сегмент разбивается на два подсегмента, и описанные выше действия повторяются для $k = 2k$.

В результате было выделено 15 сегментов с постоянным шагом $h = 0,4$ (с разницей в 4 узловые точки). Далее для каждого сегмента была построена линейная аппроксимация, в результате чего требование по точности построенной модели $R^2 \geq 0,996$ было удовлетворено. Результаты вычислительных экспериментов представлена в Таблице 5.

ТАБЛИЦА 5: Результаты вычислительных экспериментов для метода с постоянным шагом

m	u	v	A	B	R ²
1	0	4	-6,12085	100,0084	0,99973
2	4	8	-9,38019	101,2619	0,99626
3	8	12	-15,30108	105,73332	0,99787
4	12	16	-21,29137	112,59827	0,99919
5	16	20	-25,7244	119,41431	0,99979
6	20	24	-27,78595	123,36721	0,99998
7	24	28	-27,32076	122,21019	0,99995
8	28	32	-24,67906	114,89626	0,99974
9	32	36	-20,56334	101,90426	0,99938
10	36	40	-15,87499	85,25817	0,99892
11	40	44	-11,56099	68,23961	0,99862
12	44	48	-8,46034	54,79292	0,99909
13	48	52	-7,15104	48,62531	0,99997
14	52	56	-7,79639	51,998	0,9995
15	56	60	-9,99192	64,21301	0,9991

Вычислительные затраты при использовании «жадного» алгоритма будут зна-

чительно масштабнее, чем в разработанном методе с адаптивным шагом. Количество произведенных операций для построения линейных моделей на множестве сегментов постоянной длины представлено в Таблице 6.

Таблица 6: *Представление количества произведенных операций для аппроксимации с постоянным шагом*

Операция	Количество операций
Сравнение	56
Сложение	5866
Вычитание	314
Умножение	2677
Деление	403
ВСЕГО	9 316

Вывод: При одинаковой точности разработанный адаптивный метод динамического определения сегментов переменной длины для кусочно-линейной аппроксимации затрачивает в 11 раз меньше операций, чем метод с постоянным шагом для одной и той же эталонной кривой. Эффективность метода подтверждена.

Заключение

На основании проведенных вычислительных экспериментов и сравнительного анализа вычислительных затрат, доказана высокая эффективность разработанного адаптивного метода расчета шага переменной длины для кусочно-линейной аппроксимации эмпирической нелинейной функции по сравнению с прямыми методами вычисления с постоянным шагом. Таким образом, метод может применяться для расчета переменного шага при кусочно-линейной аппроксимации нелинейных функций.

Список литературы

- [1] Лоран П.Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496 с.
- [2] Sohn J., Robertazzi T.G., Luryi S. Optimizing computing costs using divisible load analysis // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. 1998. Vol. 9, № 3. Pp. 225–234. <https://doi.org/10.1109/71.674315>
- [3] Бауман Е.В., Гольдовская М.Д., Дорофеев Ю.А. Методы кусочно-линейной аппроксимации и их использование в задачах управления // Таврический вестник информатики и математики. 2008. № 1 (12). С. 73–79.
- [4] Tomek I. Two Algorithms for Piecewise-Linear Continuous Approximation of Functions of One Variable // IEEE Transactions on Computers. 1974. Vol. C-23, № 4. Pp. 445–448. <https://doi.org/10.1109/T-C.1974.223961>
- [5] Будылина Е.А., Гарькина И.А., Сухов Я.И. Алгоритм кусочно-линейной аппроксимации с максимальным интервалом // Молодой ученый. 2014. № 3 (62). С. 269–271.

- [6] Паасонен В.И. Схема третьего порядка аппроксимации на неравномерной сетке для уравнений Навье-Стокса // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 5. С. 78–85.
- [7] Новикова С.В., Мингалиев З.З. Нейросетевое прогнозирование гликемии у пациентов с сахарным диабетом на основе смешанных временных рядов с перспективой применения в составе интеллектуальной инсулиновой помпы // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 1. С. 90–98. <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202101.732>
- [8] Types of Insulin [Electronic resource]. URL: <https://www.cdc.gov/diabetes/basics/type-1-types-of-insulin.html>.
- [9] Toffanin Ch., Zisser H., Doyle F.J., Dassau E. Dynamic Insulin on Board: Incorporation of Circadian Insulin Sensitivity Variation // Journal of Diabetes Science and Technology. 2013. Vol. 7, № 4. Pp. 928–940. <https://doi.org/10.1177/193229681300700415>
- [10] Vettoretti M., Cappon G., Facchinetti A., Sparacino G. Advanced Diabetes Management Using Artificial Intelligence and Continuous Glucose Monitoring Sensors // Sensors. 2020. Vol. 20, № 14. ID 3870. <https://doi.org/10.3390/s20143870>
- [11] Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C. Introduction To Algorithms. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2009. 1313 p.

Образец цитирования

Мингалиев З.З., Новикова С.В., Моисеев Г.В. Метод расчета переменного шага для кусочно-линейной аппроксимации эмпирической нелинейной функции с заданной точностью // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 35–48. <https://doi.org/10.26456/vtprm644>

Сведения об авторах

1. Мингалиев Заид Зульфатович

аспирант кафедры Прикладной математики и информатики Казанского национального исследовательского технического университета им А.Н. Туполева – КАИ.

Россия, 420015, г. Казань, ул. Большая Красная, д. 55, КНИТУ-КАИ.

E-mail: ZZMingaliev@kai.ru

2. Новикова Светлана Владимировна

профессор кафедры Прикладной математики и информатики Казанского национального исследовательского технического университета им А.Н. Туполева – КАИ.

Россия, 420015, г. Казань, ул. Большая Красная, д. 55, КНИТУ-КАИ.

E-mail: sweta72@bk.ru

3. Моисеев Георгий Викторович

Доцент департамента анализа данных и машинного обучения Финансового университета при Правительстве РФ.

Россия, 125993, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 49.

E-mail: GVMoiseev@fa.ru

**VARIOUS LENGTH STEP CALCULATION METHOD FOR
PIECEWISE LINEAR APPROXIMATION PROBLEM OF EMPIRICAL
NONLINEAR FUNCTION WITH A SPECIFIED ACCURACY**

Mingaliyev Zaid Zulfatovich

PhD student at the Department of Applied Mathematics and Computer Science,
Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI
Russia, 420015, Kazan, 55 Bolshaya Krasnaya str., KNRTU-KAI.
E-mail: ZZMingaliyev@kai.ru

Novikova Svetlana Vladimirovna

Professor at the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Kazan
National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI
Russia, 420015, Kazan, 55 Bolshaya Krasnaya str., KNRTU-KAI.
E-mail: sweta72@bk.ru

Moiseyev Georgiy Viktorovich

Associate Professor of the Department of Data Analysis and Machine Learning,
Financial University under the Government of the Russian Federation
Russia, 125993, Moscow, 49 Leningradsky Prospekt.
E-mail: GVMoiseev@fa.ru

Received 15.07.2022, revised 15.08.2022.

The paper proposes a numerical method for adaptive selection of a variable step for approximating a nonlinear one-dimensional function, the analytical expression of which is not given, by a piecewise linear function. It is shown that under the conditions of miniaturization of computing devices, the selection of the approximation step (grid) is an important task in terms of minimizing the required number of calculations. The developed algorithm includes the calculation of the lengths of successive intervals, which eventually cover the entire domain of the function, with a predetermined approximation accuracy. The coefficient of determination is used as a measure of accuracy. Numerical experiments are presented, the proposed method is compared with the method with a constant step, providing the same accuracy, also expressed in the value of the coefficient of determination. The conducted computational experiment proved the advantage of the developed method in terms of computational costs with the same accuracy.

Keywords: piecewise linear approximation, variable step, approximation grid step, numerical methods.

Citation

Mingaliyev Z.Z., Novikova S.V., Moiseyev G.V., “Various length step calculation method for piecewise linear approximation problem of empirical nonlinear function

with a specified accuracy”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 3, 35–48 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk644>

References

- [1] Loran P.Zh., *Approksimatsiya i optimizatsiya [Approximation and optimization]*, Mir Publ., Moscow, 1975 (in Russian), 496 pp.
- [2] Sohn J., Robertazzi T.G., Luryi S., “Optimizing computing costs using divisible load analysis”, *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **9**:3 (1998), 225–234, <https://doi.org/10.1109/71.674315>.
- [3] Bauman E.V., Goldovskaya M.D., Dorofeyuk Yu.A., “Piecewise linear approximation methods and their use in control problems”, *Tavrisheskij vestnik informatiki i matematiki [Tauride Bulletin of Computer Science and Mathematics]*, 2008, № 1 (12), 73–79 (in Russian).
- [4] Tomek I., “Two Algorithms for Piecewise-Linear Continuous Approximation of Functions of One Variable”, *IEEE Transactions on Computers*, **C-23**:4 (1974), 445–448, <https://doi.org/10.1109/T-C.1974.223961>.
- [5] Budylnina E.A., Garkina I.A., Sukhov Ya.I., “Piecewise linear approximation algorithm with maximum interval”, *Molodoj uchenyj [Young scientist]*, 2014, № 3 (62), 269–271 (in Russian).
- [6] Paasonen V.I., “A third-order approximation scheme on an uneven grid for the Navier-Stokes equations”, *Vychislitelnye tekhnologii [Computing technologies]*, **5**:5 (2000), 78–85 (in Russian).
- [7] Novikova S.V., Mingaliev Z.Z., “Neural network prediction of glycemia in patients with diabetes mellitus based on mixed time series with the prospect of use as part of an intelligent insulin pump”, *Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie [Modern information technologies and IT education]*, **17**:1 (2021), 90–98 (in Russian), <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202101.732>.
- [8] *Types of Insulin*, <https://www.cdc.gov/diabetes/basics/type-1-types-of-insulin.html>.
- [9] Toffanin Ch., Zisser H., Doyle F.J., Dassau E., “Dynamic Insulin on Board: Incorporation of Circadian Insulin Sensitivity Variation”, *Journal of Diabetes Science and Technology*, **7**:4 (2013), 928–940, <https://doi.org/10.1177/193229681300700415>.
- [10] Vettoretti M., Cappon G., Facchinetti A., Sparacino G., “Advanced Diabetes Management Using Artificial Intelligence and Continuous Glucose Monitoring Sensors”, *Sensors*, **20**:14 (2020), 3870, <https://doi.org/10.3390/s20143870>.
- [11] Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C., *Introduction To Algorithms*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2009, 1313 pp.