УДК 533.95+517.958

О БЕЗВИХРЕВЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЯХ С ВЕКТОРНЫМИ ЛИНИЯМИ, РАСПОЛОЖЕННЫМИ НА ЗАДАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ульянов О.Н., Рубина Л.И.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 05.03.2022, после переработки 12.04.2022.

Рассматриваются безвихревые векторные поля на поверхности, заданной уравнением $a = z + \alpha(x, y, t) = 0$. Изучаются условия, при выполнении которых векторные линии таких полей располагаются на этой поверхности. Получены достаточные условия существования гармонического векторного поля с такими векторными линиями. Изучена переопределенная система уравнений в частных производных, решение которой обеспечивает получение гармонического поля, векторные линии которого лежат на заданной поверхности рассматриваемого вида. Выписано уравнение поверхности, для которой можно найти гармоническое векторное поле с векторными линиями расположенными на этой поверхности. Показано, что для любых поверхностей рассматриваемого вида можно найти безвихревые негармонические векторные поля с векторными линиями, расположенными на заданной поверхности. Приведен ряд поверхностей, для которых указаны гармонические или негармонические безвихревые векторные поля с векторными линиями расположенными на этих поверхностях. Рассмотрена система уравнений Навье - Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в безразмерном виде. Для этой системы в предположении потенциальности поля скоростей выписано частное решение, обеспечивающее расположение векторных линии поля скоростей на параболоиде вращения.

Ключевые слова: безвихревое векторное поле, векторные линии, уравнение поверхности, допускающей построение гармонического поля.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 49–61.
https://doi.org/10.26456/vtpmk645

Введение

В разных областях математики, механики и физики возникает потребность построения векторных полей определенного направления. Это и обтекание тел и поверхностей потоками жидкости и газа (поле скоростей) [1, 2], и удержание плазмы

© Ульянов О.Н., Рубина Л.И., 2022

в магнитной газодинамике (магнитное поле) [3—6], и задачи управления потоками пучков частиц (электрическое поле) [7, 8]. В одних случаях это соленоидальное векторное поле, в других — нет.

В статье рассматривается задача получения безвихревого векторного поля на заданной поверхности с векторными линиями, лежащими на этой поверхности.

Рассматриваем односвязные области. Полагаем, что безвихревое векторное поле создается вектором $\mathbf{U} = (u, v, w)$. Известно [9], что векторное поле безвихревое тогда и только тогда, когда $u = Q_x$, $v = Q_y$, $w = Q_z$ где, вообще говоря, $Q = Q(x, y, z, t)$ — достаточно гладкая функция, t — время. Векторное поле соленоидальное, если $\mathrm{div}\mathbf{U} = 0$.

Нетрудно проверить, что если $\mathbf{U} = \nabla a \times \nabla b$, то при любых заданных достаточно гладких $a(x, y, z, t)$, $b(x, y, z, t)$ (когда $a_{xy} = a_{yx}$, $a_{xz} = a_{zx}$, $a_{yz} = a_{zy}$, $b_{xy} = b_{yx}$, $b_{xz} = b_{zx}$, $b_{yz} = b_{zy}$) имеем $\mathrm{div}\mathbf{U} = 0$. Если выполняются оба перечисленные условия, а именно, $\nabla Q = \nabla a \times \nabla b$, то такой вектор $\mathbf{U}$ создает гармоническое поле в каждый фиксированный момент времени. Покоординатная запись соотношения $\nabla Q = \nabla a \times \nabla b$ имеет вид

$$Q_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad Q_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad Q_z = a_x b_y - a_y b_x. \tag{1}$$

Здесь и далее нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным.

Если (1) выполняется, то $Q_x a_x + Q_y a_y + Q_z a_z = 0$ и $Q_x b_x + Q_y b_y + Q_z b_z = 0$, следовательно, $u a_x + v a_y + w a_z = 0$ и $u b_x + v b_y + w b_z = 0$, тогда векторные линии поля $\mathbf{U} = (u, v, w)$ расположены на линии пересечения поверхностей $a(x, y, z, t) = 0$ и $b(x, y, z, t) = 0$.

В разделе 1 дается постановка задачи получения безвихревого векторного поля с векторными линиями, лежащими на поверхности $a(x, y, z, t) = z + \alpha(x, y, t) = 0$. В разделе 2 рассматривается возможность получения гармонического векторного поля с векторными линиями, лежащими на такой заданной поверхности. В пункте 2.1 рассмотрена возможность построения гармонического векторного поля с векторными линиями, лежащими на параболоидах. В разделе 3 рассматривается возможность построения безвихревого негармонического векторного поля с векторными линиями, лежащими на заданной поверхности $a = z + \alpha(x, y, t) = 0$.

1. Постановка задачи получения безвихревого векторного поля с векторными линиями, лежащими на на заданной поверхности

Изучаем решения системы (1), когда $a(x, y, z, t) = 0$ — известная достаточно гладкая функция. Пусть $a = z + \alpha(x, y, t)$, $b = z + \beta(x, y, t)$, тогда система (1) имеет вид

$$Q_x = \alpha_y - \beta_y, \quad Q_y = \beta_x - \alpha_x, \quad Q_z = \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x, \tag{2}$$

причем (2) задает соленоидальное векторное поле, когда $\beta_{yx} = \beta_{xy}$.

Здесь в фиксированный момент времени $(\alpha_x, \alpha_y, 1)$ — нормальный вектор поверхности $a(x, y, z, t) = 0$, по которой требуется направить векторные линии безвихревого поля (Q_x, Q_y, Q_z), а $(\beta_x, \beta_y, 1)$ — нормальный вектор поверхности $b = z + \beta(x, y, t) = 0$. Чтобы направить вектор, описывающий безвихревое векторное поле, по касательной к заданной поверхности $a = z + \alpha(x, y, t) = 0$, необходимо найти такую поверхность $b = z + \beta(x, y, t) = 0$, для которой выполняются зависимости (2). Причем $\beta(x, y, t)$ должна быть такой, чтобы выполнялись условия $Q_{xy} = Q_{yx}$, $Q_{xz} = Q_{zx}$, $Q_{yz} = Q_{zy}$.

Эти условия будут выполняться, если

$$\beta_{xx} + \beta_{yy} = \alpha_{xx} + \alpha_{yy}, \quad \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x = c(t). \tag{3}$$

Покажем ниже, что решение переопределенной системы (3) с неизвестной функцией $\beta = \beta(x, y, t)$, не всегда гарантирует выполнение условия соленоидальности векторного поля $\mathrm{div}\mathbf{U} = 0$.

2. О гармоническом векторном поле с векторными линиями, лежащими на на заданной поверхности

Если $\beta = \beta(x, y, t)$ — достаточно гладкая функция ($\beta_{xy} = \beta_{yx}$), то (3) — переопределенная (см. [11]) система для функции $\beta = \beta(x, y, t)$, когда $z = -\alpha(x, y, t)$ — задает известную поверхность $a = z + \alpha(x, y, t) = 0$, на которой должны лежать векторные линии поля $\mathbf{U}$.

Утверждение 1. *Если $Q_z \neq 0$, то не для любой заданной поверхности $a = z + \alpha(x, y, t) = 0$ существует такое решение системы* (3)*, которое обеспечивает получение гармонического поля с векторными линиями, лежащими на этой поверхности.*

Доказательство. Решаем систему (3). Выписываем дифференциальные следствия второго уравнения системы. Получаем алгебраическую систему для определения неизвестных вторых производных по x и по y функции $\beta(x, y, t)$

$$\alpha_x \beta_{yx} - \alpha_y \beta_{xx} = -\alpha_{xx}\beta_y + \alpha_{yx}\beta_x, \quad \alpha_x \beta_{yy} - \alpha_y \beta_{xy} = -\alpha_{xy}\beta_y + \alpha_{yy}\beta_x,$$

$$\beta_{xx} + \beta_{yy} = \alpha_{xx} + \alpha_{yy}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
\beta_{xy} &= \frac{\alpha_x\alpha_y(\alpha_{xx} + \alpha_{yy}) + \beta_x(\alpha_x\alpha_{xy} - \alpha_y\alpha_{yy}) + \beta_y(\alpha_y\alpha_{xy} - \alpha_x\alpha_{xx})}{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}, \\
\beta_{xx} &= \frac{\alpha_x^2(\alpha_{xx} + \alpha_{yy})}{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} - \beta_x\left(\frac{\alpha_y\alpha_{xy} + \alpha_x\alpha_{yy}}{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}\right) + \beta_y\left(\frac{\alpha_x\alpha_{xy} + \alpha_y\alpha_{xx}}{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}\right), \\
\beta_{yy} &= \frac{\alpha_y^2(\alpha_{xx} + \alpha_{yy})}{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} + \beta_x\left(\frac{\alpha_x\alpha_{yy} + \alpha_y\alpha_{xy}}{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}\right) - \beta_y\left(\frac{\alpha_x\alpha_{xy} + \alpha_y\alpha_{xx}}{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}\right).
\end{aligned} \tag{4}$$

Чтобы производные (4) были производными одной и той же функции, должны быть равны смешанные производные $\beta_{xxy} = \beta_{xyx}$, $\beta_{yyx} = \beta_{xyy}$. Требуя равенства третьих смешанных производных, получаем, что эти зависимости выполняются, когда $A\beta_x + B\beta_y = K$, где

$$
\begin{aligned}
&A = 2\alpha_x\alpha_{xx}\alpha_{xy} + 2\alpha_x\alpha_{yy}\alpha_{xy} + 4\alpha_y\alpha_{xy}^2 - 2\alpha_y\alpha_{xx}\alpha_{yy} + 2\alpha_y\alpha_{yy}^2 \\
&-(\alpha_x^2 + \alpha_y^2)(\alpha_{yyy} + \alpha_{xxy}), \\
&B = 2\alpha_y\alpha_{xx}\alpha_{xy} - 2\alpha_y\alpha_{yy}\alpha_{xy} - 4\alpha_x\alpha_{xy}^2 + 2\alpha_x\alpha_{xx}\alpha_{yy} - 2\alpha_x\alpha_{xx}^2 \\
&-(\alpha_x^2 + \alpha_y^2)(\alpha_{xyy} + \alpha_{xxx}), \\
&K = (\alpha_{xx} + \alpha_{yy})[2\alpha_x\alpha_y\alpha_{yy} - 2\alpha_x\alpha_y\alpha_{xx} + 2(\alpha_x^2 - \alpha_y^2)\alpha_{xy}] \\
&-(\alpha_x^2 + \alpha_y^2)[\alpha_x(\alpha_{xxy} + \alpha_{yyy}) - \alpha_y(\alpha_{xxx} + \alpha_{yyx})].
\end{aligned} \tag{5}
$$

Заметим, что $K = \alpha_x A + \alpha_y B$. Таким образом, приходим к тому, что первые производные β_x и β_y определяются из системы уравнений $A\beta_x + B\beta_y = \alpha_x A + \alpha_y B$, $\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x = c(t)$, где $c(t)$ — произвольная функция.

Отсюда

$$
\begin{gathered}
\beta_x = \alpha_x - \frac{c(t)B}{\alpha_x A + \alpha_y B}, \quad \beta_y = \alpha_y + \frac{c(t)A}{\alpha_x A + \alpha_y B}, \\
\text{если} \quad (\alpha_x A + \alpha_y B) \neq 0, \quad c(t) \neq 0.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Если функции β_x, β_y из (6) подставим в (2), то получим вектор $\mathbf{U}$, который касается заданной поверхности $a = z + \alpha(x, y, t) = 0$, но условие $\mathrm{div}\mathbf{U} = 0$ может не выполняться. Легко проверить, что полученные в (6) функции после подстановки в (2) будут задавать гармоническое поле только тогда, когда они — производные одной и той же функции (их смешанные производные равны)

$$
\beta_{xy} = \beta_{yx}, \quad -\left(\frac{B}{\alpha_x A + \alpha_y B}\right)_y = \left(\frac{A}{\alpha_x A + \alpha_y B}\right)_x, \quad c(t) \neq 0. \tag{7}
$$

Здесь индексы за скобками обозначают переменные, по которым вычисляются производные от выражений, стоящих в скобках.

Итак, в (7) получено, что если $Q_z = c(t) \neq 0$, то гармоническое поле будет иметь векторные линии только на такой поверхности, уравнение которой

$$
\left(\frac{B}{\alpha_x A + \alpha_y B}\right)_y + \left(\frac{A}{\alpha_x A + \alpha_y B}\right)_x = 0, \quad \text{если} \quad (\alpha_x A + \alpha_y B) \neq 0. \tag{8}
$$

Что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Если заданная поверхность удовлетворяет уравнению $\alpha_x A + \alpha_y B = 0$, но $A \neq 0$, $B \neq 0$ (см. (5)), то $Q_z = c(t) = 0$.*

Следствие 2. *Если $Q_z = 0$, то для любой поверхности $a = z + \alpha(x, y, t) = 0$ система (2)(см. также (6)) имеет решение $\beta(x, y, t) = \alpha(x, y, t)$, что приводит к условию прилипания вектора $\mathbf{U}$ на заданной поверхности, ибо при этом имеем $Q_x = Q_y = Q_z = 0$. В этом случае поверхность $a = z + \alpha(x, y, t) = 0$ можно считать поверхностью слабого разрыва [11] для решаемой задачи [12].*

Легко проверить, что в случае плоскости или цилиндрической поверхности, для которых, очевидно, можно указать гармоническое поле с векторными линиями, лежащими на них, соотношение (8) выполняется.

2.1 О гармоническом векторном поле с векторными линиями, лежащими на параболоидах $z + m(t)x^2 + n(t)y^2 = 0$

Для данной поверхности $\alpha(x, y, t) = m(t)x^2 + n(t)y^2$, $\alpha_x = 2m(t)x$, $\alpha_y = 2n(t)y$, $\alpha_{xx} = 2m(t)$, $\alpha_{yy} = 2n(t)$, $\alpha_{xy} = 0$, $\alpha_{xxx} = \alpha_{xxy} = \alpha_{xyy} = \alpha_{yyy} = 0$. Подставляя выписанные производные в (5), получаем

$$A = 16n(t)^2(n(t) - m(t))y, \quad B = 16m(t)^2(n(t) - m(t))x,$$

$$K = 32m(t)n(t)(n(t)^2 - m(t)^2)xy,$$

$$\beta_x = 2m(t)x - \frac{0.5m(t)c(t)}{n(t)y(n(t) + m(t))}, \quad \beta_y = 2n(t)y + \frac{0.5n(t)c(t)}{m(t)x(n(t) + m(t))}.$$

Для безвихревого несоленоидального векторного поля ($\mathrm{div}\mathbf{U} \neq 0$) после подстановки в (2) имеем

$$Q_x = -0.5\frac{c(t)n(t)}{m(t)x(m(t) + n(t))}, \quad Q_y = -0.5\frac{c(t)m(t)}{n(t)y(m(t) + n(t))}, \quad Q_z = c(t),$$

отсюда $Q_x\alpha_x + Q_y\alpha_y + Q_z = 0$, а $\mathrm{div}\mathbf{U} = 0$, только если $Q_z = c(t) = 0$. Тогда $Q_x = Q_y = Q_z = 0$ и на поверхности $z + m(t)x^2 + n(t)y^2 = 0$ выполняются условия прилипания. Нетрудно проверить, что при $c(t) = 0$ для $\alpha(x, y) = m(t)x^2 + n(t)y^2$ выполняются условия (8).

Случай $m(t) = n(t)$. Если $m(t) = n(t)$, то $A = B = K = 0$ и вторые производные в (4) — производные одной и той же функции. Отсюда, учитывая, что $2m(t)(x\beta_y - y\beta_x) = c(t)$, следовательно $\beta_x = (x/y)\beta_y - c(t)/[2m(t)y]$, имеем $Q_x = 2m(t)y - \beta_y$, $Q_y = (x/y)\beta_y - c(t)/[2ym(t)] - 2m(t)x$, $Q_z = c(t)$,

$$\beta_{yy} - \beta_y\left(\frac{x^2 - y^2}{y(x^2 + y^2)}\right) = \frac{4m(t)y^2}{x^2 + y^2} - \frac{c(t)x}{2m(t)y(x^2 + y^2)}.$$

Решая это линейное уравнение относительно β_y и учитывая, что $\beta_x = (x/y)\beta_y - c(t)/[2m(t)y]$, получаем

$$\beta_y = \frac{y}{x^2 + y^2}\left(\eta(x, t) + 2m(t)y^2 + \frac{c(t)x}{2m(t)y}\right),$$

$$\beta_x = \frac{x}{x^2 + y^2}\left(\eta(x, t) + 2m(t)y^2 + \frac{c(t)x}{2m(t)y}\right) - \frac{c(t)}{2m(t)y}.$$

Отсюда получаем, что $\beta_{yx} = \beta_{xy}$, если $\eta(x, t) = 2m(t)x^2$, следовательно, на параболоиде вращения $z + m(t)(x^2 + y^2) = 0$ лежат векторные линии гармонического поля

$$Q_x = -\frac{c(t)x}{2m(t)(x^2 + y^2)}, \quad Q_y = -\frac{c(t)y}{2m(t)(x^2 + y^2)}, \quad Q_z = c(t). \tag{9}$$

Пример 1. Выпишем систему уравнений Навье - Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в безразмерном виде [13]

$$
\begin{aligned}
&S\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+E\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0,\\
&S\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+E\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=0,\\
&S\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+E\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{1}{F},\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где S — число Струхаля, E — число Эйлера, R — число Рейнольдса, F — число Фруда, (u,v,w) — компоненты вектора скорости, p — давление, (x,y,z,t) — независимые переменные.

Пусть в системе (10) поле скоростей безвихревое, тогда $u=Q_x$, $v=Q_y$, $w=Q_z$. Последнее уравнение системы (10) показывает, что поле соленоидальное. Подставив в систему (10) $u=Q_x$, $v=Q_y$, $w=Q_z$, получаем, что давление на поверхности $z+m(t)(x^2+y^2)=0$ определяется из соотношения

$$p=\frac{z}{FE}-\frac{SQ_t+0.5(Q_x^2+Q_y^2+Q_z^2)}{E}+\frac{m(t)}{E}, \tag{11}$$

где (см. (9))

$$u=Q_x=-\frac{c(t)x}{2m(t)(x^2+y^2)},\quad v=Q_y=-\frac{c(t)y}{2m(t)(x^2+y^2)},\quad w=Q_z=c(t), \tag{12}$$

следовательно,

$$Q=c(t)z-\frac{c(t)}{4m(t)}\ln(x^2+y^2).$$

Здесь $c(t)$, $m(t)$ — произвольные функции.

Итак, получено частное точное решение (11)-(12) системы (10), которое описывает обтекание параболоида вращения $z+m(t)(x^2+y^2)=0$.

3. О безвихревом негармоническом векторном поле с векторными линиями, расположенными на заданной поверхности

Утверждение 2. *Для любой поверхности, заданной уравнением $z+\alpha(x,y,t)=0$, можно указать безвихревое негармоническое векторное поле, векторные линии которого расположены на этой поверхности.*

Доказательство. Пусть

$$Q_x=\alpha_y-q(x,y,t),\quad Q_y=p(x,y,t)-\alpha_x,\quad Q_z=\alpha_x q(x,y,t)-\alpha_y p(x,y,t), \tag{13}$$

где $q(x,y,t)$ и $p(x,y,t)$ — пока произвольные функции. Тогда $\alpha_x Q_x + \alpha_y Q_y + Q_z = 0$, и вектор $\mathbf{U}$ касается заданной поверхности в каждой точке этой поверхности, если Q_x, Q_y, Q_z — производные функции $Q(x,y,z,t)$, следовательно, если $Q_{xy} = Q_{yx}$, $Q_{xz} = Q_{zx}$, $Q_{yz} = Q_{zy}$.

Эти условия выполняются, если (см. (13))

$$p_x + q_y = \alpha_{xx} + \alpha_{yy}, \quad \alpha_x q - \alpha_y p = c(t). \tag{14}$$

Для определения функций $p(x,y,t)$ и $q(x,y,t)$ получаем систему уравнений. Мы имеем так называемую определенную [10] систему двух уравнений для двух функций $p(x,y,t)$ и $q(x,y,t)$ (заметим, что разделе 2. мы имели переопределенную систему уравнений). Из второго уравнения системы (14) выражаем $q = (c + \alpha_y p)/\alpha_x$ и после подстановки его в первое уравнение системы (14) получаем уравнение в частных производных первого порядка для функции $p(x,y,t)$

$$p_x\alpha_x + p_y\alpha_y = p\frac{\alpha_y\alpha_{xy} - \alpha_x\alpha_{yy}}{\alpha_x} + c(t)\frac{\alpha_{xy}}{\alpha_x} + \alpha_x(\alpha_{xx} + \alpha_{yy}),$$

решение которого сводится к решению системы уравнений характеристик [11]. Аналогично выписывается и решается уравнение для функции $q(x,y,t)$

$$q_x\alpha_x + q_y\alpha_y = q\frac{\alpha_x\alpha_{xy} - \alpha_y\alpha_{xx}}{\alpha_y} - c(t)\frac{\alpha_{xy}}{\alpha_y} + \alpha_y(\alpha_{xx} + \alpha_{yy}).$$

Таким образом эти функции определяются. Определив их и подставив в (13), получим компоненты безвихревого негармонического векторного поля, векторные линии которого расположены на любой поверхности, заданной уравнением $z + \alpha(x,y,t) = 0$. Что и требовалось доказать. □

Пример 2. Пусть $a(x,y,z,t) = z + m(t)xy$, тогда $\alpha_x = m(t)y$, $\alpha_y = m(t)x$, $\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = 0$, $\alpha_{xy} = m(t)$. Для определения $p(x,y,t)$ и $q(x,y,t)$ получаем систему уравнений

$$p_x y + p_y x = p\frac{x}{y} + \frac{c(t)}{ym(t)}, \quad q_x y + q_y x = q\frac{y}{x} - \frac{c(t)}{xm(t)}.$$

Для выписанной системы уравнений в частных производных первого порядка система уравнений характеристик имеет вид

$$\frac{dx}{ds} = y, \quad \frac{dy}{ds} = x, \quad \frac{dp}{ds} = p\frac{x}{y} + \frac{c(t)}{ym(t)}, \quad \frac{dq}{ds} = q\frac{y}{x} - \frac{c(t)}{xm(t)}. \tag{15}$$

Решая систему (15), получаем $x = A(t)\exp(s)$, $y = B(t)\exp(s)$, $p = K(t)\exp(-s)$, $q = G(t)\exp(-s)$, если

$$K(t) = -\frac{c(t)}{m(t)(A(t) + B(t))}, \quad G(t) = \frac{c(t)}{m(t)(A(t) + B(t))}.$$

В частности,

$$p = -\frac{n(t)}{(x+y)}, \quad q = \frac{n(t)}{(x+y)}, \quad n(t) = \frac{c(t)}{m(t)},$$

$$Q_x = m(t)x - \frac{n(t)}{(x+y)}, \quad Q_y = -\frac{n(t)}{(x+y)} - m(t)y, \quad Q_z = c(t).$$

Отсюда имеем $m(t)yQ_x + m(t)xQ_y + Q_z = 0$, $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} \neq 0$, следовательно получены компоненты Q_x, Q_y, Q_z безвихревого негармонического векторного поля на поверхности $a(x, y, z, t) = z + m(t)xy$, обеспечивающие расположение векторных линий на этой поверхности.

Заключение

При изучении физических явлений приходится иметь дело с разными векторными полями. При описании процессов даже в одной и той же среде рассматриваются как соленоидальные так и несоленоидальные, вихревые или потенциальные, гармонические или негармонические векторные поля [14]. Для решений системы уравнений Навье - Стокса для несжимаемой сплошной среды поле скоростей соленоидальное [13], а при нестационарном потенциальном движении политропного газа поле скоростей безвихревое, но не соленоидальное [15]. Поэтому выше проведено рассмотрение как гармонических (безвихревых соленоидальных) векторных полей, так и безвихревых негармонических векторных полей. Показано, что на любой заданной поверхности рассматриваемого вида можно расположить безвихревое (негармоническое) векторное поле (см. утверждение 4) с векторными линиями, лежащими на этой поверхности. Получены условия, когда на поверхности можно расположить гармоническое поле (см. (8)). Рассмотрен ряд примеров, который можно продолжать и для других поверхностей (например, $z \pm \sqrt{k(t)^2 - m(t)^2x^2 - n(t)^2y^2} = 0$ (эллипсоид), $z \pm \sqrt{R^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - r)^2} = 0$ (тор) и другие). Рассмотренные примеры показывают, что условие (8), ограничивающее множество поверхностей, на которых можно расположить векторные линии гармонического векторного поля, иногда может быть выполнено подбором параметров, входящих в уравнение поверхности (см. $z + m(t)x^2 + n(t)y^2 = 0$, когда $m(t) = n(t)$). Заметим, что такие параметры присутствуют и в уравнении эллипсоида, и в уравнении тора. Заметим также, что получение точных решений некоторых систем уравнений (см. пример 1.) в случае безвихревых полей оказывается достаточно простым, если использовать описанные выше подходы.

Список литературы

[1] Маслов Е.А., Савкина Н.В., Скибина Н.П., Фарапонов В.В. Численный расчет аэродинамических и газодинамических параметров обтекания тел сверхзвуковым потоком при наличии локального вдува газа в пограничный слой // Труды Томского государственного университета. Под ред. М.Ю. Орлова. Серия физико-математическая: Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики: VIII Всероссийская молодежная конференция. Т. 303. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2019. С. 24–33.

[2] Павленко О.В., Петров А.В., Пигусов Е.А. Исследование обтекания высоконесущего крылового профиля с комбинированной энергетической системой увеличения подъемной силы крыла // Вестник Московского авиационного института. 2020. Т. 27, № 4. С. 7–20.

[3] Морозов А.И., Соловьев Л.С. Геометрия магнитного поля // Вопросы теории плазмы. 1963. № 2. С. 3–91.

[4] Брушлинский К.В. Математические модели плазмы в проектах Морозова // Физика плазмы. 2019. Т. 45, № 1. С. 37–50.

[5] Сорокина Е.А., Ильгисонис В.И. Уравнения равновесия плазмы в магнитном поле с трехмерными магнитными поверхностями // Физика плазмы. 2019. Т. 45, № 17. С. 1065–1071.

[6] Inzhevatkina A.A., Burdakov A.V., Ivanov I.A., Postupaev V.V., Sudnikov A.V., Lomov K.A., Ustyuzhanin V.O. Investigation of Plasma Rotation in Smola Helical Open Trap // Plasma Physics Reports. 2021. Vol. 47, № 8. Pp. 794–802.

[7] Lozeeva T. A., Lozeev Yu.Yu., Polozov S.M., Samoshin A.V., Grigorenko L.V., Fomichev A.S., Barth W., Yaramyshev S. Beam Dynamics Simulation in the LINAC-100 Accelerator Driver for the DERICA Project // Physics of Atomic Nuclei. 2019. Vol. 82, № 11. Pp. 1519–1526.

[8] Перепелкин Е.Е., Репникова Н.П., Иноземцева Н.Г. Точное решение задачи пространственного заряда для движения сферически симметричного пучка в однородном электрическом поле // Математические заметки. 2015. Т. 98, № 3. С. 386–392.

[9] Эйхенвальд А.А. Теоретическая физика. Москва, Ленинград: Государственное издательство, 1926. 271 с.

[10] Сидоров А.Ф., Шапеев В.П, Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1984. 271 с.

[11] Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. N.Y.: Interscience, 1962. 830 p.

[12] Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On some properties of the Navier-Stokes equations // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2017. Vol. 297. Pp. 163–174.

[13] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.

[14] Калиткин Н.Н., Костомаров Д.П. Математические модели физики плазмы (обзор) // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 11. С. 67–94.

[15] Сидоров А.Ф. О нестационарных потенциальных движениях политропного газа с вырожденным годографом // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23, № 5. С. 940–943.

Образец цитирования

Ульянов О.Н., Рубина Л.И. О безвихревых векторных полях с векторными линиями, расположенными на заданной поверхности // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 49–61. https://doi.org/10.26456/vtpmk645

Сведения об авторах

1. **Ульянов Олег Николаевич**
старший научный сотрудник Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН.

Россия, 620108, Свердловская область, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16. E-mail: uon@imm.uran.ru

2. **Рубина Людмила Ильинична**
старший научный сотрудник Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН.

Россия, 620108, Свердловская область, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16. E-mail: rli@imm.uran.ru

ON IRROTATIONAL VECTOR FIELDS WITH VECTOR LINES LOCATED ON A GIVEN SURFACE

Ulyanov Oleg Nikolaevich
Senior Researcher of Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
Russia, 620108, Sverdlovsk region, Yekaterinburg, Sofia Kovalevskaya str., 16.
E-mail: *uon@imm.uran.ru*

Rubina Lyudmila Ilyinichna
Senior Researcher of Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
Russia, 620108, Sverdlovsk region, Yekaterinburg, Sofia Kovalevskaya str., 16.
E-mail: *rli@imm.uran.ru*

Received 05.03.2022, revised 12.04.2022.

Irrotational vector fields are considered on the surface given by the equation $a = z + \alpha(x, y, t) = 0$. The conditions under which the vector lines of such fields are located on this surface are studied. Sufficient conditions for the existence of a harmonic vector field with such vector lines are obtained. An overdetermined system of partial differential equations is studied, the solution of which provides a harmonic field, the vector lines of which lie on a given surface of the considered type. The equation of the surface is written, for which it is possible to find a harmonic vector field with vector lines located on this surface. It is shown that for any surfaces of the type under consideration, one can find irrotational nonharmonic vector fields with vector lines located on a given surface. A number of surfaces are given for which harmonic or nonharmonic irrotational vector fields with vector lines located on these surfaces are obtained. Navier - Stokes equations for a viscous incompressible fluid in nondimensional form are considered. For this system, under the assumption that the velocity field is potential, a particular solution is written that ensures the location of the vector lines of the velocity field on a paraboloid of revolution.

Keywords: irrotational vector field, field lines, equation of a surface that allows the construction of a harmonic field.

Citation

Ulyanov O.N., Rubina L.I., "On irrotational vector fields with vector lines located on a given surface", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 3, 49–61 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk645

References

[1] Maslov E.A., Savkina N.V., Skibina N.P., Faraponov V.V., "Numerical calculation of aerodynamic and gas-dynamic parameters of supersonic flow around bodies in the presence of local gas injection into the boundary layer", *Trudy Tomskogo gosudarstvennogo universiteta [Proceedings of Tomsk State University]*, Physics and Mathematics series: Actual problems of modern Continuum Mechanics and Celestial Mechanics: VIII All-Russian Youth Conference. V. 303, ed. Orlov M.Yu., Izd-vo Tom. un-ta, Tomsk, 2019, 24–33 (in Russian).

[2] Pavlenko O.V., Petrov A.V., Pigusov E.A., "Investigation of the flow of a high-bearing wing profile with a combined energy system to increase the lift of the wing", *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta [Bulletin of the Moscow Aviation Institute]*, **27**:4 (2020), 7–20 (in Russian).

[3] Morozov A.I., Solovev L.S., "Geometry of the magnetic field", *Voprosy teorii plazmy [Questions of plasma theory]*, 1963, № 2, 3–91 (in Russian).

[4] Brushlinskij K.V., "Mathematical models of plasma in Morozov's projects", *Fizika plazmy [Plasma Physics]*, **45**:1 (2019), 37–50 (in Russian).

[5] Sorokina E.A., Ilgisonis V.I., "Equations of plasma equilibrium in a magnetic field with three-dimensional magnetic surfaces", *Fizika plazmy [Plasma Physics]*, **45**:17 (2019), 1065–1071 (in Russian).

[6] Inzhevatkina A.A., Burdakov A.V., Ivanov I.A., Postupaev V.V., Sudnikov A.V., Lomov K.A., Ustyuzhanin V.O., "Investigation of Plasma Rotation in Smola Helical Open Trap", *Plasma Physics Reports*, **47**:8 (2021), 794–802.

[7] Lozeeva T. A., Lozeev Yu.Yu., Polozov S.M., Samoshin A.V., Grigorenko L.V., Fomichev A.S., Barth W., Yaramyshev S., "Beam Dynamics Simulation in the LINAC-100 Accelerator Driver for the DERICA Project", *Physics of Atomic Nuclei*, **82**:11 (2019), 1519–1526.

[8] Perepelkin E.E., Repnikova N.P., Inozemtseva N.G., "Exact solution of the spatial charge problem for the motion of a spherically symmetric beam in a homogeneous electric field", *Mathematical notes*, **98**:3 (2015), 386–392 (in Russian).

[9] Ejkhenvald A.A., *Teoreticheskaya fizika*, Gosudarstvennoe izdatelstvo, Moskva, Leningrad, 1926 (in Russian), 271 pp.

[10] Sidorov A.F., Shapeev V.P, Yanenko N.N., *Metod differentsialnykh svyazej i ego prilozheniya k gazovoj dinamike*, Nauka. Sibirskoe otdelenie, Novosibirsk, 1984 (in Russian), 271 pp.

[11] Courant R., Hilbert D., *Methods of mathematical physics*, Interscience, N.Y., 1962 (in Russian), 830 pp.

[12] Rubina L.I., Ul'yanov O.N., "On some properties of the Navier-Stokes equations", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **297** (2017), 163–174.

[13] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Drofa Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[14] Kalitkin N.N., Kostomarov D.P., "Mathematical models of plasma physics (review)", *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical modeling]*, **18**:11 (2006), 67–94 (in Russian).

[15] Sidorov A.F., "On nonstationary potential motions of a polytropic gas with a degenerate hodograph", *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, **23**:5 (1959), 940–943 (in Russian).