УДК 531.31

ВЕКТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА, ПУАССОНА И ВОЛЬТЕРРА-ЖУКОВСКОГО

Оникийчук В.Н.[*,**], **Оникийчук И.В.**[***]
[*]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Мытищинский филиал, г. Мытищи
[**]Московский государственный областной технологический университет им. А.А. Леонова, г. Королев
[***]АО «Гаруда Аэро», г. Москва

Поступила в редакцию 10.04.2022, после переработки 22.05.2022.

Выведены динамические уравнения Эйлера для вращающегося твердого тела с неподвижной точкой в проекции на неподвижные (инерциальные) оси. Представлена полная система аналитических интегралов в форме векторного интеграла для динамического уравнения Эйлера с нулевой правой частью, а также для кинематических уравнений Пуассона и Вольтерра-Жуковского. Все названные интегралы не содержат эллиптических квадратур.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, уравнения Пуассона, Вольтерра-Жуковского, векторные интегралы, динамика твердого тела, эллиптическая квадратура.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 62–75.
https://doi.org/10.26456/vtpmk641

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются три системы дифференциальных уравнений:

1. динамические уравнения Эйлера с нулевой правой частью («случай Эйлера-Пуансо»);
2. кинематические уравнения Пуассона;
3. уравнения Вольтерра-Жуковского.

В классической научной и учебной литературе утверждается, что один из интегралов уравнения Эйлера-Пуансо обязательно является эллиптическим интегралом Лежандра 1 рода (см., например, [1,т.2, стр.150-152], [2], [3,с.89, 97], [4, стр.36]), [5, стр.196-197], [6, стр194-196], [7, т.3, стр.123], [8, стр.227-228], [9, стр. 388-389], [10, стр. 106]):

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = at + h_*.$$

Здесь a и h_* – некоторые константы. Поскольку классические параметры $\{p, q, r\}$ динамического уравнения Эйлера-Пуансо (1.1) нелинейно связаны между собой, то был сделан вывод, что решение уравнения Эйлера-Пуансо также представляется в конечном итоге в эллиптических функциях [1, т.2, стр.150-152], [2], [3, с. 89,97], [4, стр.36]), [5, стр.196-197], [6, стр194-196], [7, т.3, стр. 123], [8, стр. 227-228], [9, стр. 388-389], [10, стр. 106].

Следовательно, все классические компоненты $\{p, q, r\}$ вектора угловой скорости твердого тела представляются в конечном итоге также в эллиптических функциях. Структура кинематических уравнений Пуассона и уравнений Вольтерра-Жуковского идентична уравнениям Эйлера-Пуансо. Из этого факта был сделан вывод, что и первые интегралы уравнений Пуассона и Вольтерра – Жуковского, в конечном счете, представляются в эллиптических квадратурах.

Ниже будет представлено доказательство того, что уравнения Эйлера-Пуансо являются уравнениями в полных дифференциалах. По этой причине все первые интегралы этого уравнения представляются в элементарных функциях. Таким образом, уравнения Эйлера, Пуассона и Вольтерра-Жуковского имеют векторные интегралы, которые также представлены в элементарных функциях, т.е. без эллиптических квадратур.

1.1 Динамические уравнения и эллиптические квадратуры

Динамические уравнения Эйлера с нулевой правой частью («случай Эйлера-Пуансо») для твердого тела с одной неподвижной точкой можно представить так:

$$\frac{d(\mathbf{Jp})}{dt} + [\mathbf{p}, \mathbf{Jp}] = \begin{cases} A\dot{p} + (C-B)\,qr = 0, & (a) \\ B\dot{q} + (A-C)\,pr = 0, & (b) \\ C\dot{r} + (B-A)\,pq = 0, & (c) \end{cases} \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{J}$ – тензор инерции тела с постоянными диагональными элементами

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} = diag\,(A, B, C)\,, \quad A \neq B \neq C \neq A. \qquad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{p}$ – известный вектор угловой скорости твердого тела в проекции на оси, жестко связанные с твердым телом (см., например, [1, т.2, стр. 141], [4, стр.33], [5, стр. 79], [11, стр. 242], [12, стр. 156], [13, стр. 54], [14, стр. 44]):

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}\sin\varphi\sin\vartheta + \dot{\vartheta}\cos\varphi \\ \dot{\psi}\cos\varphi\sin\vartheta - \dot{\vartheta}\sin\varphi \\ \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \qquad (1.3)$$

Здесь и далее в тексте символами $\{\psi, \vartheta, \varphi\}$ обозначены классические углы Эйлера.

Уравнение (1.1) имеет два скалярных интеграла (см., например, [1, т.2, стр. 150], [5, стр. 190-191], [8,стр. 227-228], [9, стр. 388-389], [14, стр. 64]):

$$\langle \mathbf{Jp}, \mathbf{Jp} \rangle = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2 = const, \tag{1.4}$$

$$\langle \mathbf{Jp}, \mathbf{p} \rangle = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h_1 = const. \tag{1.5}$$

В XVIII-XIX веках классиками науки было принято решение найти третий интеграл из уравнения (1.1b). Для этого скалярное уравнение (1.1b) с помощью равенств (1.4) и (1.5) было приведено к дифференциальному уравнению эллиптического типа:

$$\frac{dq}{dt} = -\lambda_3 \sqrt{(\lambda_1 - q^2)(\lambda_2 - q^2)}, \tag{1.6}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 – числовые константы, зависящие от параметров A, B, C, K, h_1.

Поскольку уравнение (1.6) не удалось решить в элементарных функциях, то его решение формально представили эллиптической квадратурой:

$$\int \frac{dq}{\sqrt{(\lambda_1 - q^2)(\lambda_2 - q^2)}} = -\lambda_3 t + h_0. \tag{1.7}$$

Здесь h_0 – произвольная постоянная. Далее, заменой переменных

$$q = z\sqrt{\lambda_2}, \quad k^2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

равенство (1.7) приводится к классическому эллиптическому интегралу Лежандра 1 рода:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} = -\lambda_3 \sqrt{\lambda_1}\, t + h_2, \tag{1.9}$$

где h_2 – произвольная постоянная. Решение $z(t)$ этого интеграла (1.9) представляется лишь специальными эллиптическими функциями. Поскольку параметры $\{p, q, r\}$ вектора $\mathbf{p}$ (1.3) нелинейно связаны между собой через интегралы (1.4), (1.5) и равенства (1.8), то был сделан вывод, что решение $\{p, q, r\}$ уравнения (1.1) также представляется в конечном итоге в эллиптических функциях (см., например, [1, т.2, стр. 150-152], [2,], [3, стр. 89,97], [4, стр. 36], [5, стр. 196-197], [6, стр. 194-196], [7, т.3, стр. 123], [8, стр. 227-228], [9, стр. 388-389], [10, стр.106]).

1.2 Кинематические уравнения Пуассона

Проекции единичных ортов инерциальной системы координат $OXYZ$ на оси, жестко связанные с телом, являются векторами α, β, γ:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \ \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \ \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Векторы α, β, γ подчиняются уравнениям Пуассона (см., например, [1, т.2, стр. 187], [3, с. 48], [4, стр. 34], [12, стр. 154], [15 стр. 34], [16, стр. 92]):

$$\frac{d\alpha}{dt} + [\mathbf{p}, \alpha] = \mathbf{0}, \quad \frac{d\beta}{dt} + [\mathbf{p}, \beta] = \mathbf{0}, \quad \frac{d\gamma}{dt} + [\mathbf{p}, \gamma] = \mathbf{0}. \tag{1.11}$$

Уравнения Эйлера (1.1) и Пуассона (1.11) структурно идентичны. На основании этого был сделан вывод, что решения уравнений Пуассона (1.11) также представляются в эллиптических функциях [1, т.2, стр. 150-152], [2], [3, с. 89,97], [4, стр. 36], [5, стр. 196-197], [6, стр. 194-196], [7, т.3, стр. 123], [8, стр. 227-228], [9, стр. 388-389], [10, стр. 106].

1.3 Уравнения Вольтерра-Жуковского

Существует еще одна система уравнений, которая структурно похожа на уравнения Эйлера (1.1) с нулевой правой частью. Это уравнения Вольтерра-Жуковского с постоянным вектором $\mathbf{b}$ в правой части уравнения [3, стр. 152-157, 305-307], [15, стр. 42], [17, стр. 85]:

$$\frac{d\,(\mathbf{Jp})}{dt} + [\mathbf{p}, \mathbf{Jp}] = [\mathbf{p}, \mathbf{b}]\,. \tag{1.12}$$

Уравнения Пуассона и Вольтерра - Жуковского (1.12) также структурно похожи на уравнения Эйлера (1.1). Из этого наблюдения был сделан аналогичный вывод о том, что интегралы для этих систем определяются через эллиптические функции (см., например, [3, стр. 101,305], [16,стр. 159], [17, стр. 85]).

В предлагаемой работе доказывается, что каждая из систем уравнений Эйлера (1.1), Пуассона (1.11) и Вольтерра-Жуковского (1.12) имеет собственный векторный интеграл. При этом все компоненты этих интегралов представляются в элементарных функциях, т.е., без эллиптических квадратур.

2. Постановка задачи метод и построение решения

Задача настоящей работы состоит в следующем:

1. Определить класс физических задач из динамики твердого тела, для которых правая часть уравнений Эйлера (1.1) равна нулю. Этот шаг является важным, поскольку помогает понять структуру первых интегралов для уравнений Эйлера с точки зрения физики движения.
2. Установить векторные интегралы для уравнений Эйлера (1.1), Пуассона (1.11) и Вольтерра-Жуковского (1.12), компоненты которых представляются в элементарных функциях (т.е., без эллиптических квадратур).

Принято считать, что уравнения Эйлера с нулевой правой частью (1.1) появляются лишь в случае отсутствия внешнего силового поля, либо когда центр масс вращающегося тела неподвижно закреплен. И все же, названные хрестоматийные случаи не являются исчерпывающими. К уравнениям Эйлера (1.1), например, приводится задача движения вращающегося твердого тела в центральном гравитационном поле по сфере постоянного радиуса.

Действительно, пусть каждая частица твердого тела с плотностью массы m и с координатой $\mathbf{x}$ в инерциальном пространстве $OXYZ$ подчиняется классическому уравнению

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{m\mu\,\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}, \tag{2.1}$$

где μ – гравитационный параметр.

Если центр масс $\mathbf{x_c}$ тела движется по круговой орбите радиуса $R = const$, то «неподвижной точкой» для него является центр инерциальной системы координат $OXYZ$. При этом предполагается, что вращение тела относительно собственного центра масс $\mathbf{x_c}$ происходит на оси $\overline{OR}$.

Для тел лабораторных размеров с «усредненным радиусом» тела $\rho \approx 10$м в условиях Земли $R \approx 6,37 \cdot 10^6$м закон движения (2.1) можно упростить. Поскольку в условиях Земли $|\mathbf{x}|^3 \approx (R+\rho)^3 \approx R^3\left(1+\frac{\rho}{R}\right)^3$. В этом случае $\frac{\rho^3}{R^3} \approx 10^{-15} \div 10^{-16}$ и поэтому величиной $\frac{\rho^3}{R^3}$ можно пренебречь, т.е. можно принять, что $|\mathbf{x}|^3 \approx R^3\left(1+\frac{\rho^3}{R^3}\right) \approx R^3$. В этом случае уравнение движения (2.1) для произвольной частицы $\mathbf{x}$твердого тела можно представить так:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{m\mu\,\mathbf{x}}{R^3}. \tag{2.2}$$

Умножим векторно $\mathbf{x}$ на уравнение (2.2) и просуммируем по всему объему тела. В итоге получаем производную вектора кинетического момента для тела:

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = \int\limits_V m\left[\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}\right] d\nu = 0. \tag{2.3}$$

Поскольку $\left[\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}\right] = 0$, то из равенства (2.3) следует постоянство вектора кинетического момента:

$$\mathbf{K}_0 = \int\limits_V m\left[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right] d\nu = \mathbf{C} = \overrightarrow{const}. \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{C}$ – вектор с произвольными постоянными величинами C_1, C_2, C_3:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Метод решения задачи состоит из четырех этапов

1. Доказательство, что равенство (2.3) представляет собой динамическое уравнение Эйлера (1.1) в проекции на инерциальные оси.

2. Доказательство, что вектор (2.4) представляет собой полный интеграл уравнения Эйлера (1.1) в элементарных функциях.

3. Идентичность структуры уравнений Эйлера (1.1) и уравнений Пуассона (1.11) дает возможность написать векторный интеграл для уравнений Пуассона в элементарных функциях.

4. Уравнения Вольтерра - Жуковского (1.12) заменой переменных приводятся к динамическим уравнениям Эйлера (1.1). Это обстоятельство позволяет написать для этих уравнений векторный интеграл в элементарных функциях, аналогичный интегралу уравнений Эйлера.

3. Вывод динамических уравнений Эйлера в проекции на инерциальные оси

Ключевым условием для нахождения векторного интеграла для уравнения Эйлера (1.1) является математически корректный вывод этих уравнений в проекции на инерциальные оси.

Обозначим вектором $\mathbf{x}$ координату произвольной частицы тела в инерциальном пространстве $OXYZ$. Пусть m- масса этой произвольной частицы. Далее свяжем с телом систему координат $OX'_*Y'_*Z'_*$, которая в неподвижной точке O совпадает с центром инерциальной системы $OXYZ$. В этом случае произвольная частица тела $\mathbf{x}$ имеет координату $\mathbf{x'}_*$ в связанной с телом системе $OX'_*Y'_*Z'_*$. Фактор твердости тела в этом случае обеспечивается тем, что векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x'}_*$ связаны между собой ортогональной матрицей $\mathbf{Q}$ (см., например, [1, т.2, стр. 138], [3, стр. 42], [5, стр.51], [11, т.2, стр. 238], [12, стр. 157], [14, стр. 17], [18, стр. 8], [19, стр. 129], [20, стр. 127]):

$$\mathbf{Q} =$$
$$\begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi, & -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi, & \sin\vartheta\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\vartheta\cos\psi, & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi, & -\sin\vartheta\cos\psi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Здесь и далее параметры $\{\psi, \vartheta, \varphi\}$ являются классическими углами Л. Эйлера. В этом случае

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x'}_*, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in OXYZ, \quad \mathbf{x'}_* = \begin{bmatrix} x'_* \\ y'_* \\ z'_* \end{bmatrix} \in OX'_*Y'_*Z'_*. \tag{3.2}$$

Для удобства операцию векторного умножения $\left[\mathbf{x}, \overset{\bullet}{\mathbf{x}}\right]$ можно определить как произведение кососимметричного оператора $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}$ (3.4) на вектор $\overset{\bullet}{\mathbf{x}}$. В этом случае вектор $\mathbf{K}_0(2.4)$ можно записать так:

$$\mathbf{K}_0 = \int\limits_V m\overset{\wedge}{\mathbf{x}}\overset{\bullet}{\mathbf{x}}dv. \tag{3.3}$$

Здесь $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}$ – кососимметричная матрица, соответствующая вектору $\mathbf{x}$, а знак интеграла обозначает суммирование по всем частицам твердого тела:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \overset{\wedge}{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Дифференцируем вектор $\mathbf{K}_0$ (3.3):

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = \int\limits_V m\overset{\wedge}{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}}dv. \tag{3.5}$$

Далее, если вместо вектора $\ddot{\mathbf{x}}$ подставить правую часть равенств (2.2), то получаем вектор $\dot{\mathbf{K}}_0$:

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = \int\limits_V m\overset{\wedge}{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}}dv = \frac{\mu}{R^3}\int\limits_V m\overset{\wedge}{\mathbf{x}}\mathbf{x}dv = 0. \tag{3.6}$$

Давайте продифференцируем равенство (3.2):

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{x}'_*, \quad \dot{\mathbf{x}}'_* = \mathbf{0}. \tag{3.7}$$

Из равенства (3.2) следует, что:

$$\mathbf{x}'_* = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}. \tag{3.8}$$

Подставляем равенство (3.8) в правую часть (3.7) и в итоге получаем кинематическую формулу Эйлера скорости произвольной частицы тела в проекции на инерциальные оси $OXYZ$.

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}}\mathbf{x} = [\mathbf{p}_{\mathbf{0}}, \mathbf{x}]\,. \tag{3.9}$$

Здесь $\mathbf{p}_{\mathbf{0}}$ – вектор угловой скорости тела в проекции на *инерциальные* оси, а $\overset{\wedge}{\mathbf{p}}_0$ – кососимметричный оператор, изоморфный вектору $\mathbf{p}_{\mathbf{0}}$, а $\{\psi, \vartheta, \varphi\}$ – классические углы Эйлера:

$$\mathbf{p}_{\mathbf{0}} = \mathbf{Q}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi \\ \dot{\vartheta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta \end{bmatrix},$$

$$\overset{\wedge}{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -r_0 & q_0 \\ r_0 & 0 & -p_0 \\ -q_0 & p_0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

В формуле для вектора $\mathbf{p}_{\mathbf{0}}$ (3.10) сомножитель $\mathbf{p}$ (1.3) – классический вектор угловой скорости в проекции на оси, жестко связанные с телом, а $\overset{\wedge}{\mathbf{p}}$ – кососимметричный оператор, изоморфный вектору $\mathbf{p}$ (1.3):

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \overset{\wedge}{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}^{-\mathbf{1}}\dot{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Векторы $\mathbf{p}$ (1.3) и $\mathbf{p}_{\mathbf{0}}$ (3.10) и матрицы $\overset{\wedge}{\mathbf{p}}_0$ и $\overset{\wedge}{\mathbf{p}}_0$ связаны между собой соотношениями (3.10). Далее, подставим равенство

$$\dot{\mathbf{x}} = -\overset{\wedge}{\mathbf{x}}\mathbf{p}_0$$

в формулу для вектора $\mathbf{K}_0$ (3.3):

$$\mathbf{K}_0 = \int\limits_V m\overset{\wedge}{\mathbf{x}}\overset{\bullet}{\mathbf{x}}dv = -\int\limits_V m\overset{\wedge}{\mathbf{x}}^2\mathbf{p}_0 dv = \mathbf{J}_0\mathbf{p}_0 \ \in OXYZ. \tag{3.13}$$

Здесь $\mathbf{J_0}$ – тензор инерции относительно инерциальных осей $OXYZ$ [21, стр. 80-81]. Заметим, тензор $\mathbf{J_0}$ не является постоянным:

$$\mathbf{J_0} = -\int\limits_V m\overset{\wedge}{\mathbf{x}}^2 dv \in OXYZ. \tag{3.14}$$

Здесь $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}$ – кососимметричная матрица (3.4).

Лемма 1. *Тензоры* $\mathbf{J}_0$ *(3.14) и* $\mathbf{J}$ *(1.2) связаны между собой формулой:*

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Вектор $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}'_*$ (3.2) изоморфен кососимметричной матрице $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}$ (3.4). Из векторной записи (3.2) следует матричное представление этой связи:

$$\overset{\wedge}{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}'_*\mathbf{Q}^{-1}. \tag{3.16}$$

Из этого свойства (3.16) следует, что

$$\overset{\wedge}{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}_*'^{\mathbf{2}}\mathbf{Q}^{-1}. \tag{3.17}$$

Таким образом, тензор инерции $\mathbf{J}_0$ (3.14) выглядит так [19, стр. 137]:

$$\mathbf{J}_0 = -\int\limits_V m\overset{\wedge}{\mathbf{x}}^2 dv = \mathbf{Q}\mathbf{J}\ \mathbf{Q}^{-1}. \tag{3.18}$$

Здесь $\mathbf{J}$ (1.2) – тензор инерции в проекции на связанные с телом оси $OX'_*Y'_*Z'_*$. Лемма доказана. □

Будем полагать, что оси связанной с телом системы координат $OX'_*Y'_*Z'_*$ направлены по главным осям инерции тела:

$$\mathbf{J} = -\int\limits_V m\left(\overset{\wedge}{\mathbf{x}'_*}\right)^2 dv = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Подставляем выражения $\mathbf{J}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{J}\ \mathbf{Q}^{-1}$ (3.18) и $\mathbf{p_0} = \mathbf{Q}\mathbf{p}$ (3.10) в вектор $\mathbf{K}_0$ (3.13) и получаем в итоге:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{J}_0\mathbf{p}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{J}\ \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{p} = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{p}. \tag{3.20}$$

Заметим, вектор $\mathbf{K}_0$ (3.20) является постоянным из-за свойства центрального поля (2.1):

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{p} = \overrightarrow{const}. \tag{3.21}$$

Полученный вектор $\mathbf{K}_0$(3.21) дифференцируем и получаем в итоге динамическое уравнение Эйлера в проекции на инерциальные оси $OXYZ$:

$$\frac{d\,(\mathbf{QJp})}{dt} = \overset{\bullet}{\mathbf{Q}}\mathbf{Jp} + \mathbf{QJ}\overset{\bullet}{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}^{-1}\overset{\bullet}{\mathbf{Q}}\mathbf{Jp} + \mathbf{J}\overset{\bullet}{\mathbf{p}}\right) = \mathbf{Q}\left(\mathbf{J}\overset{\bullet}{\mathbf{p}} + \overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{Jp}\right) = \mathbf{0}. \qquad (3.22)$$

Поскольку $\det \mathbf{Q} = 1$, то из равенства (3.22) следуют уравнения Эйлера (1.1). Для этого достаточно уравнение (3.22) умножить слева на матрицу $\mathbf{Q}^{-1}$.

4. Векторные интегралы для уравнений Эйлера, Пуассона и Вольтерра-Жуковского

Из равенства (3.22) следует, что решением уравнения Эйлера (1.1) является вектор

$$\mathbf{Jp} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}, \qquad (4.1)$$

где $\mathbf{C}$ – произвольный вектор постоянных величин (2.5).

Доказательство проверяется обычным дифференцированием вектора (4.1):

$$\frac{d\,(\mathbf{Jp})}{dt} = \frac{d\left(\mathbf{Q}^{-1}\right)}{dt}\mathbf{C} = -\overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C} = -\overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{Jp}. \qquad (4.2)$$

Здесь было использовано свойство матрицы $\mathbf{Q}^{-1}$ [19, стр. 150]:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{Q}^{-1}\right) = -\overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{Q}^{-1}. \qquad (4.3)$$

Заметим, равенство (4.3) легко получить, дифференцируя тождество $\mathbf{QQ}^{-1}= \mathbf{E}$.

Покажем, что из решения (4.1) следуют классические интегралы (1.4), (1.5). Действительно $\langle \mathbf{Jp}, \mathbf{Jp}\rangle = \left\langle \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}, \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}\right\rangle = \langle \mathbf{C}, \mathbf{C}\rangle = |\mathbf{C}|^2$.

Вывод второго скалярного интеграла $\langle \mathbf{Jp}, \mathbf{p}\rangle = const$ (1.5) из равенства (4.1) требует некоторого количества вспомогательных операций. Для этого продифференцируем выражение $\langle \mathbf{Jp}, \mathbf{p}\rangle = \left\langle \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}, \mathbf{p}\right\rangle$ и докажем, что оно тождественно равно нулю:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}, \mathbf{p}\right\rangle = \left\langle -\overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}, \mathbf{p}\right\rangle + \left\langle \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}, \overset{\bullet}{\mathbf{p}}\right\rangle = \left\langle \mathbf{Jp}, \overset{\bullet}{\mathbf{p}}\right\rangle. \qquad (4.4)$$

Заметим при этом, что $\left\langle -\overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}, \mathbf{p}\right\rangle = \left\langle \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}, \overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{p}\right\rangle \equiv 0$, поскольку $\overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{p} \equiv \mathbf{0}$. В выражении (4.4) были использованы равенства (4.1) и (4.3). Поскольку векторное произведение $[\mathbf{p}, \mathbf{Jp}]$ тождественно умножению кососимметричной матрицы $\overset{\wedge}{\mathbf{p}}$ (3.11) на вектор $\mathbf{Jp}$, то уравнения Эйлера (1.1) в векторном виде можно представить так:

$$\mathbf{J}\overset{\bullet}{\mathbf{p}} + \overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{Jp} = \mathbf{0}. \qquad (4.5)$$

Заменим вектор $\overset{\bullet}{\mathbf{p}}$ в равенстве (4.4) на выражение $\overset{\bullet}{\mathbf{p}} = -\mathbf{J}^{-1}\overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{Jp}$, которое следует из уравнения Эйлера (4.5). Докажем теперь, что $\left\langle \mathbf{Jp}, -\mathbf{J}^{-1}\overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{Jp}\right\rangle \equiv 0$.

Действительно, $\mathbf{J}^{-1}\overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{Jp} = \begin{bmatrix} A^{-1}qr\,(C-B) \\ B^{-1}pr\,(A-C) \\ C^{-1}qp\,(B-A) \end{bmatrix}$ и в этом случае

$$\left\langle \begin{bmatrix} A^{-1}qr\,(C-B) \\ B^{-1}pr\,(A-C) \\ C^{-1}qp\,(B-A) \end{bmatrix}, \mathbf{Jp} \right\rangle = pqr\,(C-B+A-C+B-A) \equiv 0.$$

Таким образом, $\left\langle \mathbf{Jp}, \overset{\bullet}{\mathbf{p}} \right\rangle = 0$. Следовательно, $\langle \mathbf{Jp}, \mathbf{p} \rangle = const$, что и требовалось доказать.

Аналогично выражению (4.1) решениями уравнений Пуассона (1.11) являются векторы:

$$\alpha = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{h}_1, \quad \beta = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{h}_2, \quad \gamma = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{h}_3, \tag{4.6}$$

где $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ - произвольные постоянные векторы. В частности, решениями уравнений Пуассона (1.11) являются строки матрицы (3.1). Утверждение легко проверяется дифференцированием векторов (4.6) с использованием свойства (4.3).

Утверждение 3. *Фундаментальным решением уравнения Вольтера-Жуковского*

$$\frac{d\,(\mathbf{Jp})}{dt} + [\mathbf{p}, \mathbf{Jp}] = \overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{b} \tag{4.7}$$

является вектор

$$\mathbf{Jp} = \mathbf{Q^{-1}C} + \mathbf{b}. \tag{4.8}$$

Здесь $\mathbf{b}$ *– заданный по условию задачи постоянный вектор,* $\mathbf{C}$ *– произвольный постоянный вектор (2.5).*

Доказательство. Давайте продифференцируем вектор (4.8):

$$\mathbf{J}\overset{\bullet}{\mathbf{p}} = -\overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{Q^{-1}C}. \tag{4.9}$$

Из равенства (4.8) следует, что $\mathbf{Q^{-1}C} = \mathbf{Jp} - \mathbf{b}$. В этом случае выражение (4.9) преобразуется так:

$$\mathbf{J}\overset{\bullet}{\mathbf{p}} = -\overset{\wedge}{\mathbf{p}}\mathbf{Q^{-1}C} = -\overset{\wedge}{\mathbf{p}}\,(\mathbf{Jp} - \mathbf{b})\,. \tag{4.10}$$

Таким, образом, векторный интеграл (4.8) полностью удовлетворяет уравнению Вольтерра-Жуковского (4.7). □

Заключение

1. Классические утверждения о том, что первые интегралы для динамических уравнений Эйлера с нулевой правой частью («случай Эйлера-Пуансо») обязательно содержат эллиптические квадратуры, оказались некорректными.

2. Уравнения Эйлера для данного случая являются полной производной от вектора кинетического момента (в проекции на инерциальные оси). Все компоненты вектора кинетического момента представляются в элементарных функциях.

3. Все известные классические интегралы для этого случая являются следствием векторного интеграла кинетического момента.

4. Поскольку уравнения Пуассона и Вольтерра-Жуковского структурно похожи на уравнения Эйлера, то и уравнения Пуассона и Вольтерра-Жуковского также имеют соответствующие векторные интегралы, выраженные в элементарных функциях.

Список литературы

[1] Аппель П. Теоретическая механика. М.: Физматгиз, Наука, 1960.

[2] Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи математических наук. 1983. Т. 38, № 1 (229). С. 3–67.

[3] Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.

[4] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Издательство Факториал, 1995.

[5] Маркеев А.П. Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. 572 с.

[6] Уиттекер Э. Аналитическая динамика. Издательский дом Удмуртский университет, 1999. 588 с.

[7] Ламб Г. Теоретическая механика. М.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1936.

[8] Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Издательство МГУ, 2000. 719 с.

[9] Петкевич В.В. Теоретическая механика. М.: Наука, 1981.

[10] Хаар Д. Основы гамильтоновой механики. М.: Наука, 1974.

[11] Лагранж Ж.Л. Аналитическая механика. М.: Издательство Гостехиздат, 1950.

[12] Козлов В.В. Общая теория вихрей. Ижевск: Издательский дом Удмуртский университет, 1998. 238 с.

[13] Оден М. Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. 215 с.

[14] Амелькин Н.И. Динамика твёрдого тела. М.: МФТИ, 2010.

[15] Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Издательский дом Удмуртский университет, 1995. 432 с.

[16] Борисов А.В., Мамаев И.С Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: Издательский дом Удмуртский университет, 1999.

[17] Виттенбург Й. Динамика системы твердых тел. М.: Мир, 1980.

[18] Клейн Ф. Математическая теория волчка. М., 2013.

[19] Оникийчук В.Н. Великая тайна Леонарда Эйлера. СПб.: Издательство Профессионал, 2007. 520 с.

[20] Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415 с.

[21] Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

Образец цитирования

Оникийчук В.Н., Оникийчук И.В. Векторные интегралы уравнений Эйлера, Пуассона и Вольтерра-Жуковского // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 62–75. https://doi.org/10.26456/vtpmk641

Сведения об авторах

1. **Оникийчук Валерий Николаевич**
   доцент Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, Мытищинский филиал; доцент Московского государственного областного технологического университета им. А.А. Леонова.

   Россия, 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1.
   E-mail: valeryonikiychuk@yandex.ru

2. **Оникийчук Игорь Валерьевич**
   руководитель проектов (вертолётостроение, БПЛА) АО «Гаруда Аэро».

   Россия, 11024, г. Москва, ул. Авиамоторная, д. 50, стр. 2.
   E-mail: ionikv@inbox.ru

VECTOR INTEGRALS OF THE EULER, POISSON AND VOLTERRA-ZHUKOVSKY EQUATIONS

Onikiychuk Valery Nikolaevich
Associate Professor of the Bauman Moscow State Technical University, Mytishchi Branch
Associate Professor of the Moscow State Regional Technological University named after A.A. Leonov
Russia, 141005, Moscow region, Mytishchi, 1st Institutskaya str., 1.
E-mail: valeryonikiychuk@yandex.ru

Onikiychuk Igor Valeryevich
Project Manager (helicopter construction, UAV) of JSC "Garuda Aero"
Russia, 11024, Moscow, Aviamotornaya str., 50, p. 2.
E-mail: ionikv@inbox.ru

Received 10.04.2022, revised 22.05.2022.

The dynamic Euler equations for a rotating rigid body with a fixed point in projection on fixed (inertial) axes are derived. A complete system of analytical integrals in the form of a vector integral for the dynamic Euler equation with the zero right side, as well as for the kinematic Poisson and Volterra-Zhukovsky equations is presented. All these integrals do not contain elliptic quadratures.

Keywords: Euler equations, Poisson equations, Volterra-Zhukovsky equations, vector integrals, solid dynamics, elliptic quadrature.

Citation

Onikiychuk V.N., Onikiychuk I.V., “Vector integrals of the Euler, Poisson and Volterra-Zhukovsky equations”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 3, 62–75 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk641

References

[1] Appel P., *Teoreticheskaya mekhanika [Theoretical mechanics]*, Fizmatgiz, Nauka, Moscow, 1960 (in Russian).

[2] Kozlov V.V., “Integrability and nonintegrability in Hamiltonian mechanics”, *Russian Mathematical Surveys*, **38**:1 (229) (1983), 3–67 (in Russian).

[3] Borisov A.V., Mamaev I.S., *Dinamika tverdogo tela [Solid body dynamics]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Izhevsk, 2001 (in Russian), 384 pp.

[4] Trofimov V.V., Fomenko A.T., *Algebra i geometriya integriruemykh gamiltonovykh differentsialnykh uravnenij [Algebra and geometry of integrable Hamiltonian differential equations]*, Factorial Publishing House, Moscow, 1995 (in Russian).

[5] Markeev A.P., *Teoreticheskaya mekhanika*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Izhevsk, 1999 (in Russian), 572 pp.

[6] Uitteker E., *Analiticheskaya dinamika [Analytical dynamics]*, Publishing House Udmurt University, 1999 (in Russian), 588 pp.

[7] Lamb G., *Teoreticheskaya mekhanika [Theoretical mechanics]*, United Scientific and Technical Publishing House of the NKTP of the USSR, Moscow, 1936 (in Russian).

[8] Golubev Yu.F., *Osnovy teoreticheskoj mekhaniki [Fundamentals of theoretical mechanics]*, MSU Publishing House, Moscow, 2000 (in Russian), 719 pp.

[9] Petkevich V.V., *Teoreticheskaya mekhanika [Theoretical mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (in Russian).

[10] Khaar D., *Osnovy gamiltonovoj mekhaniki [Fundamentals of Hamiltonian mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (in Russian).

[11] Lagranzh Zh.L., *Analiticheskaya mekhanika [Analytical mechanics]*, Gostekhizdat Publishing House, Moscow, 1950 (in Russian).

[12] Kozlov V.V., *Obshchaya teoriya vikhrej [General theory of vortices]*, Publishing House Udmurt University, Izhevsk, 1998 (in Russian), 238 pp.

[13] Oden M., *Vrashchayushchiesya volchki: kurs integriruemykh sistem [Spinning tops: a course of integrable systems]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., 1999 (in Russian), 215 pp.

[14] Amelkin N.I., *Dinamika tvyordogo tela [Solid body dynamics]*, MIPT, Moscow, 2010 (in Russian).

[15] Kozlov V.V., *Simmetrii, topologiya i rezonansy v gamiltonovoj mekhanike [Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics]*, Publishing House Udmurt University, Izhevsk, 1995 (in Russian), 432 pp.

[16] Borisov A.V., Mamaev I.S, *Puassonovy struktury i algebry Li v gamiltonovoj mekhanike [Poisson structures and Lie algebras in Hamiltonian mechanics]*, Publishing House Udmurt University, Izhevsk, 1999 (in Russian).

[17] Wittenburg J., *Dynamics of systems of rigid bodies*, Stuttgart Publ., Stuttgart, 1977.

[18] Klein F., *Mathematical Theory of the Top*, New York, 1897.

[19] Onikijchuk V.N., *Velikaya tajna Leonarda Ejlera [The Great Mystery of Leonhard Euler]*, Professional Publishing House, SPb., 2007 (in Russian), 520 pp.

[20] Goldstejn G., *Klassicheskaya mekhanika [Classical mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (in Russian), 415 pp.

[21] Zhuravlev V.F., *Osnovy teoreticheskoj mekhaniki [Fundamentals of theoretical mechanics]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2001 (in Russian), 320 pp.