МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 510.635, 510.665

ДЕРЕВЬЯ КАК СРЕДСТВО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕРАЗРЕШИМЫХ ПРОБЛЕМ[1]

Рыбаков М.Н.
ИППИ имени А.А. Харкевича РАН, г. Москва
НИУ ВШЭ, г. Москва
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 26.11.2022, после переработки 10.12.2022.

Доказывается неразрешимость и сильная неразрешимость (неарифметичность) теорий классов деревьев (при различных уточнениях понятия дерева и при различных требованиях к свойствам деревьев, включая конечность числа вершин) в языке с бинарной предикатной буквой, соответствующей дугам, равенством, оператором транзитивного замыкания и конгруэнтностью между парами вершин, которая определяется как равенство расстояния между вершинами первой пары расстоянию между вершинами второй пары. Показано, что для получения неразрешимости (или неарифметичности) теорий некоторых классов деревьев оператор транзитивного замыкания достаточно применять лишь к бинарному отношению, соответствующему дугам, т.е. фактически вместо оператора транзитивного замыкания рассматривать отношение достижимости; также показано, что теории некоторых классов деревьев неразрешимы в языке без оператора транзитивного замыкания.

Ключевые слова: теория первого порядка, деревья, транзитивные деревья, интранзитивные деревья, транзитивное замыкание, неразрешимость, неарифметичность.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 1. С. 5–23.
https://doi.org/10.26456/vtpmk653

Валентину Горанко,
с уважением от автора

Введение

Известно, что классическая логика предикатов алгоритмически неразрешима [3,16] (более точно, Σ_1^0-полна, см. [5] и [10, приложение]). Она остаётся неразрешимой даже при одной бинарной букве в языке [2, глава 21], при трёх предметных

[1]Работа поддержана программой «Научный фонд НИУ ВШЭ», грант 23-00-022.

переменных [12], а также при одновременном выполнении этих ограничений [13, пункт (ii) раздела 4.8], что фактически означает неразрешимость теории графов. При добавлении оператора транзитивного замыкания мы получаем Σ_1^1-трудную проблему выполнимости формул уже при двух переменных в языке [4], а при добавлении (помимо оператора транзитивного замыкания) равенства и композиции тот же результат получается в языке с одной бинарной буквой, отличной от равенства [7, 8].

Техника, позволяющая получить эти результаты, несложно переносится на случай теории конечных графов, а также теорий простых графов, графов с петлями, двудольных графов и др. [7, 8]; покажем, что незначительное обогащение средств языка позволяет получить аналогичные результаты и для теорий различных классов деревьев.

1. Проблемы укладки домино

В построениях ниже нам понадобятся алгоритмические проблемы, имеющие достаточно высокую степень неразрешимости; в качестве таких проблем мы возьмём две проблемы укладки плиток домино. Дадим их краткое описание.

Будем считать, что *плитки домино* имеют квадратную форму одного и того же фиксированного размера, причём для каждой такой плитки зафиксирована ориентация её сторон: указано, какая именно сторона является *верхней*, *нижней*, *правой* и *левой*. Каждая плитка домино имеет некоторый *тип* t, полностью определяемый *цветами* $\boxed{\triangleright}t$, $\boxed{\triangleleft}t$, $\boxed{\triangledown}t$ и $\boxed{\vartriangle}t$, в которые окрашены стороны плитки. *Задача домино* задаётся набором $T = \{t_0, \ldots, t_n\}$ типов плиток домино и состоит в том, что нужно выяснить, существует ли *T-укладка* плиток домино, т.е. функция $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to T$, такая, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$

(T_1) $\boxed{\triangleleft}f(i,j) = \boxed{\triangleright}f(i+1,j)$;

(T_2) $\boxed{\triangledown}f(i,j) = \boxed{\vartriangle}f(i,j+1)$.

Известно, что *проблема домино*, состоящая из задач домино, для которых существует укладка с условиями (T_1) и (T_2), является неразрешимой, более точно, Π_1^0-полной [1]. Если же добавить условие

(T_3) множество $\{j \in \mathbb{N} : f(0,j) = t_0\}$ является бесконечным,

то получившая проблема домино, т.е. определяемая задачами домино, для который существует T-укладка с условиями (T_1)–(T_3), тоже неразрешима, но уже Σ_1^1-полна [5, теорема 6.4].

2. Деревья

В теории графов дерево определяется как ациклический связный простой граф. Тем не менее, в некоторых областях математики используются другие определения дерева. Мы дадим несколько таких определений; отметим, что возникающая при этом терминология не претендует на то, чтобы быть общепринятой.

Прежде всего, под *графом* понимаем структуру $G = \langle V, E\rangle$, где V — непустое множество *вершин*, а E — бинарное отношение на V, формально $E \subseteq V \times V$. Если

$e \in E$, то e называем *дугой* в G, при этом если $e = (u, v)$, то говорим, что вершина u *видит* вершину v в графе G, а сами вершины u и v называем, соответственно, *началом* и *концом* дуги e. В случае, когда G — неориентированный граф, т.е. когда E — симметричное отношение, дуги графа G называем также *рёбрами*, считая при этом, что дуги (u, v) и (v, u) задают одно и то же ребро. Если $(u, v) \in E$, то пишем также uEv. Для вершины u определим множество $E(u)$, состоящее из вершин, которые видит u: $E(u) = \{v \in V : uEv\}$.

Для бинарного отношения E на множестве V определим его *иррефлексивизацию* E^- и *обратное отношение* E^{-1}:

$$E^- \ = \ E \setminus diag_V, \qquad E^{-1} \ = \ \{(u, v) : (v, u) \in E\},$$

где $diag_V = \{(u, u) : u \in V\}$ — *диагональ* множества V. Кроме того, элементы $u, v \in V$ называем E*-сравнимыми*, если $u = v$, uEv или vEu.

Путём в графе $G = \langle V, E\rangle$ называем последовательность π вершин, в которой для каждой пары соседних вершин имеется дуга в G из вершины с меньшим индексом (в смысле её номера в последовательности π) в вершину с бо́льшим индексом; такую дугу называем *дугой в пути* π. Пути вида $v_0, \ldots, v_n$ называем *конечными*, при этом число n называем *длиной* пути $v_0, \ldots, v_n$; вершину v_0 называем *началом* этого пути, а v_n — его *концом*; сам путь при этом называем *путём из* v_0 *в* v_n. Пути вида $v_0, v_1, v_2, \ldots$ называем *бесконечными*; вершину v_0 бесконечного пути $v_0, v_1, v_2, \ldots$ называем его *началом*.

Путь π называем *простым*, если никакая дуга графа G не встречается в π дважды; если при этом G — неориентированный граф, то π называем простым, если никакое ребро графа G не встречается в π дважды. Если в конечном пути первая вершина совпадает с последней, и при этом длина пути не равна нулю, то такой путь называем *циклом*. Граф $G = \langle V, E\rangle$ называем E*-связным*, если между любыми двумя вершинами существует путь из одной из этих вершин в другую. Граф $G = \langle V, E\rangle$ называем *связным*, если граф $\langle V, E^{\leftrightarrow}\rangle$ является $E^{\leftrightarrow}$-связным, где $E^{\leftrightarrow} = E \cup E^{-1}$ — *симметричное замыкание* отношения E. Вершину r графа $G = \langle V, E\rangle$ называем *корнем* графа G, если из r имеется путь в любую вершину графа G; граф с корнем называем *корневым*. Длину кратчайшего пути между вершинами u и v в графе $\langle V, E^{\leftrightarrow}\rangle$ называем *расстоянием* между этими вершинами (в графе $G = \langle V, E\rangle$) и обозначаем $\rho(u, v)$. Если между u и v не существует пути в графе $\langle V, E^{\leftrightarrow}\rangle$, то значение $\rho(u, v)$ считаем неопределённым. По определению, $\rho(u, u) = 0$ и если $\rho(u, v)$ определено, то $\rho(u, v) = \rho(v, u)$. Нетрудно видеть, что в корневом графе определено расстояние между любыми двумя его вершинами.

Будем называть деревья, являющиеся таковыми в смысле общепринятого определения, *иррефлексивными простыми деревьями*; т.е. это связные неориентированные графы без простых циклов. Заметим, что иррефлексивные простые деревья являются корневыми графами.

Граф $G = \langle V, E\rangle$ называем:

– *простым деревом*, если граф $\langle V, E^-\rangle$ — иррефлексивное простое дерево;

– *интранзитивным деревом*, если G — корневой граф с иррефлексивным антисимметричным отношением E и граф $\langle V, E^{\leftrightarrow}\rangle$ является простым деревом;

– *квази-интранзитивным деревом*, если $\langle V, E^-\rangle$ — интранзитивное дерево;

– *транзитивным деревом*, если V — корневой граф, E — транзитивное антисимметричное отношение и для любой вершины $v \in V$ любые два элемента множества $E^{-1}(v)$ являются E-сравнимыми.

Нетрудно понять, что интранзитивные деревья являются квази-интранзитивными. Отметим, что простые, интранзитивные, транзитивные деревья, вообще говоря, могут не быть деревьями в обычном понимании[2]; тем не менее, граф $G = \langle V, E \rangle$ называем

– *деревом*, если G является простым, квази-интранзитивным или транзитивным деревом.

Говорим, что дерево $G = \langle V, E \rangle$ рефлексивно, иррефлексивно, серийно[3], и т.д., если соответствующим свойством обладает отношение E.

Пусть $G = \langle V, E \rangle$ — граф. Определим E^+ как транзитивное замыкание отношения E, а E^* — как рефлексивно-транзитивное замыкание отношения E, т.е.

$$E^+ \;=\; \bigcup_{n=1}^{n} E^n, \qquad E^* \;=\; \bigcup_{n=0}^{n} E^n,$$

где $E^0 = diag_V$, $E^1 = E$, $E^{k+1} = E \circ E^k$ для $k \in \mathbb{N}$. Отношение E^* называем *отношением достижимости* в графе G, и если выполнено uE^*v, то говорим, что вершина v *достижима* из вершины u.

Отметим, что r является корнем графа $G = \langle V, E \rangle$ тогда и только тогда, когда $E^*(r) = V$. Нетрудно видеть, что если G — антисимметричное дерево, то в G существует единственный корень, а если G — симметричное дерево, то корнем является каждая его вершина.

3. Язык для описания графов

Для описания графов будем пользоваться языком первого порядка, содержащим бинарную предикатную букву E, равенство, а также дополнительно оператор транзитивного замыкания бинарного отношения и квартернарное отношение конгруэнтности $\cong$, которое определим следующим образом:

$$u_1u_2 \cong v_1v_2 \quad \leftrightharpoons \quad \rho(u_1, u_2) = \rho(v_1, v_2).$$

Считаем, что предикатная буква E интерпретируется множеством дуг графа, поэтому в записи не различаем предикатную букву и соответствующее ей отношение. То же самое относится и к другим средствам языка.

Множество формул этого языка будем обозначать $\mathcal{L}$, а сами формулы будем называть также $\mathcal{L}$-формулами.

Для бинарного отношения R его транзитивное замыкание обозначаем R^+. Имея транзитивное замыкание отношения R и равенство, можем выразить рефлексивно-транзитивное замыкание R^*:

$$uR^*v \quad = \quad uR^+v \vee u = v.$$

[2]Поскольку, в частности, могут не быть неориентированными графами без петель.
[3]То есть если любая вершина является началом некоторой дуги.

Отметим, что конгруэнтность позволяет сравнивать расстояния между вершинами. Выразить расстояние между вершинами графа можно и без конгруэнтности:

$$\begin{aligned}
\rho(u,v) = 0 \quad &\iff \quad u = v;\\
\rho(u,v) = 1 \quad &\iff \quad u \neq v \wedge uE^{\leftrightarrow}v;\\
\rho(u,v) = n+1 \quad &\iff \quad \bigwedge_{k=0}^{n} (\rho(u,v) \neq k) \wedge \exists x\,(\rho(u,x) = n \wedge \rho(x,v) = 1),
\end{aligned}$$

где в правой части вместо выражений вида $\rho(u,v) = k$ должны стоять соответствующие формулы. Но так мы не получаем возможности «говорить» о натуральных числах вообще, хотя фактически каждое из них по отдельности и оказывается выразимым. Наличие конгруэнтности даёт слабую возможность это делать: сравнивая расстояния между вершинами (даже всего лишь на предмет того, равны они или нет), фактически мы сравниваем два произвольных натуральных числа.

4. Теории деревьев

Нас будут интересовать не столько сами деревья и классы деревьев, сколько теории классов деревьев и свойства этих теорий. Пусть $\mathscr{C}$ — некоторый класс деревьев. Определим *теорию класса* $\mathscr{C}$ в языке $\mathcal{L}$ как множество $\mathcal{L}$-формул, истинных в каждом дереве класса $\mathscr{C}$. Теорию класса $\mathscr{C}$ в языке $\mathcal{L}$ обозначаем $Th_{\mathcal{L}}(\mathscr{C})$; вместо $Th_{\mathcal{L}}(\{G\})$ пишем $Th_{\mathcal{L}}(G)$.

Мы будем исследовать вопрос о разрешимости теорий различных классов деревьев. Пока сделаем очевидное наблюдение.

Предложение 1. *Если G — конечное дерево, то теория $Th_{\mathcal{L}}(G)$ разрешима.*

Доказательство. Достаточно заметить, что конечность числа элементов в G даёт возможность последовательно перебрать все элементы G, что позволяет оценить истинность формул вида $\forall x\, A$ и $\exists x\, A$, если значения свободных переменных формулы A уже зафиксированы. $\square$

Конечно, в этом наблюдении важна лишь конечность графа G, а то, что G является деревом, совершенно неважно.

Следствие 1. *Если $\mathscr{C}$ — конечный класс конечных деревьев, то теория $Th_{\mathcal{L}}(\mathscr{C})$ разрешима.*

Насколько сложны алгоритмически теории бесконечных классов деревьев? В частности, какова алгоритмическая сложность теорий бесконечных классов конечных деревьев? Ниже мы получим ответы на эти вопросы.

Для этого сначала приведём детальные построения для класса интранзитивных деревьев и соответствующей теории, а потом дадим пояснения, какие модификации позволят получить аналогичные результаты для теорий других классов деревьев.

5. Моделирование проблем домино в классе интранзитивных деревьев

Начнём с того, что покажем, как с помощью деревьев промоделировать проблемы домино. Возникшая при этом конструкция поможет нам в решении вопросов о разрешимости теорий деревьев.

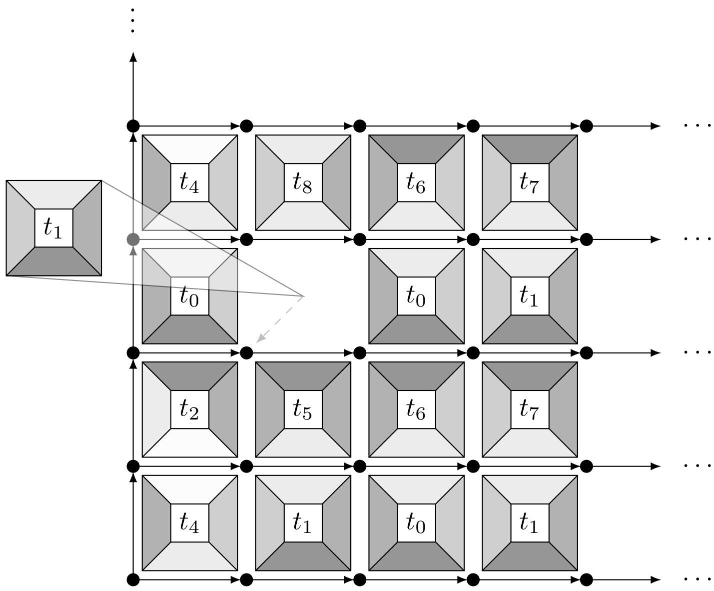

Рис. 1: *Граф $\langle V_0, E_0\rangle$ и укладка плиток домино*

Пусть $T = \{t_0, \ldots, t_n\}$ — задача домино и пусть $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to T$ — некоторая функция. Нам пока неважно, удовлетворяет f условиям (T_1)–(T_3), или только условиям (T_1) и (T_2), или вообще не удовлетворяет ни одному из этих условий. Функции f сопоставим бесконечное интранзитивное дерево G_f, которое в определённом смысле будет моделировать эту функцию.

Положим

$$V_0 \quad = \quad \mathbb{N}\times\mathbb{N},$$

а также для любых $a, b, a', b' \in \mathbb{N}$

$$(a,b)E_0(a',b') \quad \leftrightharpoons \quad \left[\begin{array}{l} a' = a = 0 \text{ и } b' = b+1, \\ a' = a+1 \text{ и } b' = b, \end{array}\right.$$

см. рис. 1. Пусть $(a,b)\in V_0$ и $f(a,b) = t_k$. Тогда положим

$$\begin{array}{rcl} V_{a,b} & = & \{(a,b)\}\cup(\{(a,b)\}\times\{0,\ldots,k\}); \\ E_{a,b} & = & \{\langle((a,b),i),((a,b),i+1)\rangle : 0\leqslant i<k\}, \end{array}$$

то есть граф $\langle V_{a,b}, E_{a,b}\rangle$ представляет собой интранзитивное дерево, вершины которого выстраиваются в путь $(a,b), ((a,b),0), \ldots, ((a,b),k)$. Теперь объединим все получившиеся графы в один:

$$\begin{array}{rcl} V_f & = & V_0\cup\bigcup\{V_{a,b} : a,b\in\mathbb{N}\}; \\ E_f & = & E_0\cup\bigcup\{E_{a,b} : a,b\in\mathbb{N}\}; \\ G_f & = & \langle V_f, E_f\rangle, \end{array}$$

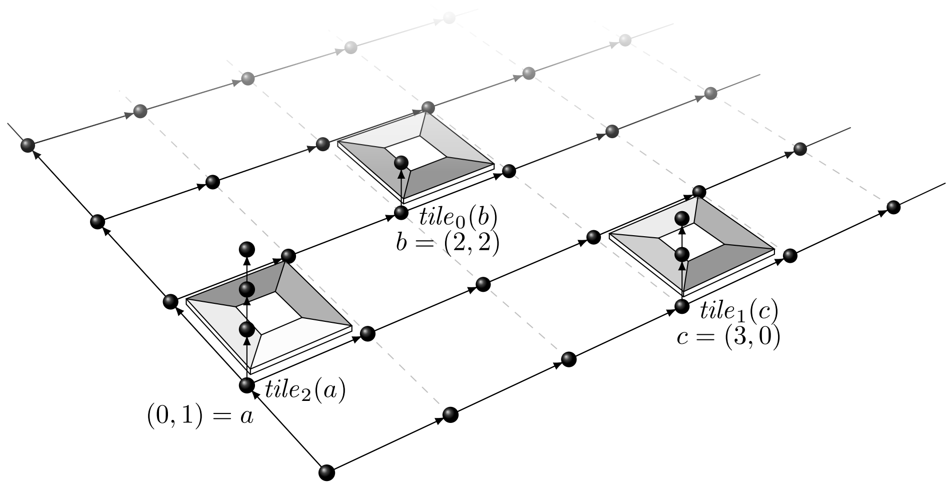

Рис. 2: *Построение графа G_f на основе графа $\langle V_0, E_0\rangle$*

см. рис. 2 (формулы вида $tile_k(x)$, имеющиеся на рис. 2, будут определены в следующем разделе). По построению, G_f — интранзитивное дерево.

Нетрудно понять, что функция f полностью восстанавливается по дереву G_f. Для задачи T определим классы $\mathscr{C}_T$ и $\mathscr{C}'_T$:

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{C}_T & = & \{G_f : f - T\text{-укладка}\}; \\ \mathscr{C}'_T & = & \{G_f : f - T\text{-укладка с дополнительным условием } (T_3)\}. \end{array}$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{C}_T \neq \varnothing & \iff & \text{существует } T\text{-укладка}; \\ \mathscr{C}'_T \neq \varnothing & \iff & \text{существует } T\text{-укладка с дополнительным условием } (T_3). \end{array}$$

Наш следующий шаг — описать устройство деревьев этих классов $\mathcal{L}$-формулами, что в случае успеха даст неразрешимость и даже сильную неразрешимость (неарифметичность) теории интранзитивных деревьев.

6. Сложность теорий классов интранзитивных деревьев

Заметим, что вершины в дереве вида G_f по их степени можно разделить на четыре множества: вершины, из которых выходят три дуги, две дуги, одна дуга или ни одной дуги. Эти условия несложно описать формулами:

$$\begin{array}{rcll} D_0(x) & = & \neg\exists y\, xEy; & \\ D_k(x) & = & \exists y_1 \ldots \exists y_k \big(\bigwedge\limits_{i=1}^{k} xEy_i \wedge \bigwedge\limits_{i\neq j}(y_i \neq y_j)\big), & \text{где } k \in \mathbb{N}^+; \\ D_{=k}(x) & = & D_k(x) \wedge \neg D_{k+1}(x), & \text{где } k \in \mathbb{N}^+. \end{array}$$

Отметим, что ниже мы будем использовать формулы вида $D_k(y)$; в этом случае надо предварительно сделать подходящую замену переменных в $D_k(x)$: так, можно взять $D_0(y) = \neg\exists x\, yEx$. Этот момент окажется важен, когда мы будем обсуждать вопросы «экономии» используемых переменных.

Опишем условие, выделяющее корень:

$$\mathit{root}(x) \quad = \quad \neg\exists y\, yEx.$$

Сделаем подготовку к описанию укладки плиток домино. Пусть

$$\begin{array}{lcll}
S_0^y(x) & = & \neg\exists y\, xEy; & \\
S_{k+1}^y(x) & = & \neg D_2(x) \wedge \exists y\,(xEy \wedge S_k^x(y)), & \text{где } k \in \mathbb{N}; \\
\mathit{tile}_k^y(x) & = & D_2(x) \wedge \exists y\,(xEy \wedge S_k^x(y)), & \text{где } k \in \mathbb{N}.
\end{array}$$

Ниже мы будем писать $\mathit{tile}_k(x)$ вместо $\mathit{tile}_k^y(x)$, полагая, что вторая переменная выбирается подходящим образом, т.е. отличается от свободной переменной формулы.

Опишем некоторые общие свойства дерева вида G_f:

$$\begin{array}{lcl}
A_1 & = & \exists x\,(\mathit{root}(x) \wedge D_{=3}(x)); \\
A_2 & = & \forall x\,(D_2(x) \to \exists y\,(xEy \wedge D_{=2}(y)); \\
A_3 & = & \forall x\,(D_3(x) \to \exists y\,(xEy \wedge D_{=3}(y)).
\end{array}$$

Теперь опишем свойства дерева вида G_f, связанные с T-укладкой:

$$\begin{array}{lcl}
T_0 & = & \forall x\,(D_2(x) \to \bigvee\limits_{k=0}^{n}(\mathit{tile}_k(x) \wedge \bigwedge\limits_{j\neq k}\neg \mathit{tile}_j(x))); \\
T_1 & = & \forall x \forall y\,(D_2(x) \wedge D_{=2}(y) \wedge xEy \to \bigwedge\limits_{i=0}^{n}(\mathit{tile}_i(x) \to \bigvee\limits_{\text{◨} t_i = \text{◧} t_j} \mathit{tile}_j(y))); \\
T_2' & = & \forall x \forall y\,(D_3(x) \wedge D_3(y) \quad \wedge xEy \to \bigwedge\limits_{i=0}^{n}(\mathit{tile}_i(x) \to \bigvee\limits_{\text{⬒} t_i = \text{⬓} t_j} \mathit{tile}_j(y))); \\
T_2'' & = & \forall x \forall y \forall \hat{x} \forall \hat{y}\,(D_2(x) \wedge D_2(y) \wedge D_3(\hat{x}) \wedge D_3(\hat{y}) \wedge \hat{x}E\hat{y} \wedge \\
 & & \wedge\, \exists z\,(\hat{x}Ez \wedge zE^*x) \wedge \exists z\,(\hat{y}Ez \wedge zE^*y) \wedge \hat{x}x \cong \hat{y}y \to \\
 & & \qquad\qquad \to \bigwedge\limits_{i=0}^{n}(\mathit{tile}_i(x) \to \bigvee\limits_{\text{⬒} t_i = \text{⬓} t_j} \mathit{tile}_j(y))); \\
T_3 & = & \forall x\,(D_3(x) \to \exists y\,(D_3(y) \wedge xE^+y \wedge \mathit{tile}_0(y))).
\end{array}$$

Наконец, соберём эти формулы в две конъюнкции:

$$\begin{array}{lcl}
\mathit{Tiling}_T & = & A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge T_0 \wedge T_1 \wedge T_2' \wedge T_2''; \\
\mathit{Tiling}_T' & = & \mathit{Tiling}_T \wedge T_3.
\end{array}$$

Нетрудно понять, что истинность формулы Tiling_T или формулы Tiling_T' в некотором интранзитивном дереве означает наличие T-укладки (с соответствующим набором свойств). Верно и обратное: наличие T-укладки даёт возможность построения интранзитивного дерева, где истинна $Tiling_T$ или даже $Tiling'_T$. Более точно, справедливо следующее:

(1) если f — T-укладка, то в графе G_f истинна формула $Tiling_T$;

(2) если в интранзитивном дереве G истинна формула $Tiling_T$, то существует T-укладка f, такая, что $G = G_f$ (с точностью до изоморфизма);

(3) если f — T-укладка с дополнительным условием (T_3), то в графе G_f истинна формула $Tiling'_T$;

(4) если в интранзитивном дереве G истинна формула $Tiling'_T$, то существует T-укладка f с дополнительным условием (T_3), такая, что $G = G_f$ (с точностью до изоморфизма).

Первые два условия дают нам неразрешимость (Σ^0_1-трудность) теории интранзитивных деревьев в языке $\mathcal{L}$, а последние два — даже её неарифметичность (Π^1_1-трудность).

Теорема 1. *Теория класса интранзитивных деревьев в языке $\mathcal{L}$ является Π^1_1-трудной.*

Отметим, что любая формула $\neg B$ эквивалентна в теории интранзитивных деревьев формуле $B \to \forall x \forall y\, xEy$, поэтому в формулах выше можно элиминировать отрицание. В результате мы получим *позитивные* формулы, описывающие те же самые условия.

Теорема 2. *Позитивный фрагмент теории класса интранзитивных деревьев в языке $\mathcal{L}$ является Π^1_1-трудным.*

Теперь обратим внимание на количество переменных, необходимых для записи формулы $Tiling'_T$. Нетрудно видеть, что достаточно пяти: пять переменных используются в формуле $D_{=3}(x)$ и в формуле T''_2, а больше столько переменных нигде не требуется. Покажем, что и пяти переменных не требуется: достаточно четырёх. Заметим, что z в T''_2 можно элиминировать, заменив подформулу $\exists z\,(\hat{x}Ez \wedge zE^*x) \wedge \exists z\,(\hat{y}Ez \wedge zE^*y)$ на $\exists y\,(\hat{x}Ey \wedge yE^*x) \wedge \exists x\,(\hat{y}Ex \wedge xE^*y)$. Формулу $D_{=3}(x)$ можно заменить на $D_3(x)$. При такой замене уже невозможно обосновать условия (2) и (4), но вместо них будут выполняться похожие, которых вполне достаточно для доказательства теорем 1 и 2: в формулировках (2) и (4) нужно заменить условие равенства $G = G_f$ на условие, состоящее в том, что в дереве G существует *вершинный подграф* G', такой, что $G' = G_f$. Получаем ещё одно уточнение теоремы 1.

Теорема 3. *Позитивный фрагмент теории класса интранзитивных деревьев в языке $\mathcal{L}$ с четырьмя предметными переменными является Π^1_1-трудным.*

Неясно, можно ли ещё уменьшить число переменных в предложенном моделировании, поскольку оно использует символ квартернарного отношения. Тем не менее, вопрос о возможности уменьшении их числа с сохранением полученных результатов о неразрешимости (неарифметичности) является вполне осмысленным: напомним, что иногда для неарифметичности теории бинарного отношения достаточно даже двух переменных [7, 8].

Теперь обратим внимание на то, что все рассуждения останутся справедливыми, если мы ограничимся рассмотрением интранзитивных деревьев с *ветвлением* не более чем три, т.е. когда из каждой вершины выходит не более трёх дуг.

Теорема 4. *Позитивный фрагмент теории класса интранзитивных деревьев ветвления не более трёх в языке* $\mathcal{L}$ *с четырьмя предметными переменными является* Π^1_1*-трудным.*

Получится ли понизить ветвление до двух? Да, вполне: для этого можно модифицировать граф вида G_f, «сдвинув» укладку. Именно, пусть вершины вида $(0,k)$ больше не видят вершин, отличных от $(0,k+1)$ и $(1,k)$, и тем самым не участвуют в моделировании плиток домино, и пусть вершина (a,b) при $a \in \mathbb{N}^+$ моделирует плитку, тип которой равен $f(a-1,b)$. Возможность выделить вершины вида $(0,k)$ формулой остаётся: только эти вершины являются началами двух различных бесконечных путей, и достаточно выразить условие, что из них можно сделать в каждом из соответствующих направлений больше шагов, чем число типов плиток домино в рассматриваемой задаче T. Трёх переменных для этого достаточно. Конечно, это повлечёт изменения и других формул; в частности, изменится формула T_3. Мы опускаем описание подробностей соответствующих технических построений.

Теорема 5. *Позитивный фрагмент теории класса интранзитивных деревьев ветвления не более двух в языке* $\mathcal{L}$ *с четырьмя предметными переменными является* Π^1_1*-трудным.*

Заметим, что мы не воспользовались явно условиями (1) и (2), связанными с формулой $Tiling_T$. Тем не менее незначительная модификация этой формулы даст нам ещё один результат, близкий к теореме Трахтенброта [14, 15] (см. также [9]).

Теорема 6. *Позитивный фрагмент теории класса конечных интранзитивных деревьев в языке* $\mathcal{L}$ *является* Π^0_1*-трудным.*

Доказательство. Дадим детальный набросок доказательства. Пусть, как и раньше $T = \{t_0, \ldots, t_n\}$.

Напомним, что для доказательства неразрешимости проблемы укладки домино, которую мы рассматриваем, можно свести к ней проблему неостановки машин Тьюринга[4] на пустой ленте: каждая строка в сетке $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ с укладкой соответствует некоторой конфигурации некоторой машины Тьюринга M (если M не останавливается на входе, конечно). Если мы зафиксируем первую строку так, чтобы она соответствовала начальной конфигурации с пустой лентой, то k-я строка будет соответствовать k-й конфигурации в вычислении M на пустом входе, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда мы получаем ещё два условия, которые можно добавить к (T_1) и (T_2), не меняя сложности проблемы укладки. Будем считать, что начальная конфигурация машины M имеет вид $q_0\#\Box\Box\Box\ldots$, а заключительная — вид $q_e\#s_1s_2s_3\ldots$, где q_0 и q_e — *начальное состояние* и *заключительное состояние* машины M, $\#$ и $\Box$ — *граничный маркер* и *символ пустой ячейки*, $s_1, s_2, s_3, \ldots$ — некоторые символы на ленте; тип t плитки домино соответствует либо символу, либо комбинации qs, где q является состоянием, а s символом, который видит машина M в состоянии q.

[4] Детали, связанные с машинами Тьюринга, можно посмотреть, например, в [6, 11].

Пусть типы плиток t_0, t_1 и t_2 соответствуют пустой ячейке на ленте, граничному маркеру, обозреваемому машиной M в начальном состоянии, и граничному маркеру, обозреваемому машиной M в заключительном состоянии. Тогда мы можем добавить к (T_1) и (T_2) следующие условия:

(T_4) $f(0,0) = t_1$ и $f(i,0) = t_0$ для каждого $i \in \mathbb{N}^+$;

(T_5) $f(i,j) \neq t_2$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$.

Будем считать, что T-укладка удовлетворяет условиям (T_1), (T_2), (T_4), (T_5). Для укладки $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to T$ и числа $k \in \mathbb{N}$ определим ограничение f_k на множество $\{0,\dots,k\}$, т.е. $f_k(a,b) = f(a,b)$ для любых $a, b \in \{0,\dots,k\}$. По аналогии с графом G_f определим граф G_{f_k}, оттолкнувшись от множества $\{0,\dots,k\}\times\{0,\dots,k\}$ вместо множества V_0. Чтобы знать, где находятся элементы вида (k,b), сделаем каждый из них началом пути, длина которого $n+2$; такое условие описывается, например, формулой $D_2(x) \wedge \exists y\,(xEy \wedge S^x_{n+1}(y))$, что позволяет выделить в графе нужные элементы. Аналогично поступим с элементом $(0,k)$.

На этапе описания таких графов формулами, используя конгруэнтность, потребуем, чтобы вместе с элементом $(0,i)$ был элемент $(i,0)$ и наоборот, вместе с элементом $(i,0)$ — и элемент (i,i), а вместе с элементом $(i+1,j)$ — и элемент (i,j). Это позволит говорить об укладке для конечных квадратных сеток вида $m \times m$.

Далее включим в описание формулу для (T_4) и рассмотрим импликацию от конъюнкции всех полученных формул к формуле, описывающей отрицание условия (T_5).

Получившаяся формула будет опровержима в классе конечных интранзитивных деревьев тогда и только тогда, когда T-укладки с дополнительными условиями (T_4) и (T_5) не существует. Это и даст Π^0_1-трудность теории. Чтобы ограничиться позитивными формулами, элиминируем отрицание, как и раньше. □

Обратим внимание, что в доказательстве теоремы 6 нужно модифицировать именно формулу Tiling_T, а не Tiling'_T. Возникает естественный вопрос: можно ли как-то получить моделирование проблемы домино с условием (T_3) внутри теории класса конечных деревьев? Частичный ответ на этот вопрос даёт следующее наблюдение.

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{C}$ — непустой рекурсивно перечислимый класс конечных деревьев. Тогда теория $Th_{\mathcal{L}}(\mathscr{C})$ находится в классе Π^0_1.*

Доказательство. Достаточно показать, что дополнение теории $Th_{\mathcal{L}}(\mathscr{C})$ рекурсивно перечислимо, т.е. находится в Σ^0_1. А это так, поскольку, во-первых, мы имеем эффективное перечисление всех деревьев из $\mathscr{C}$ и эффективное перечисление всех $\mathcal{L}$-формул, а во-вторых, задача проверки истинности формулы в каждом конечном дереве разрешима, см. предложение 1. □

Следствие 2. *Теория класса конечных интранзитивных деревьев в языке $\mathcal{L}$ является Π^0_1-полной.*

Конечно, для теорий классов конечных интранзитивных деревьев возможны уточнения как по числу предметных переменных, так и по ограничениям на ветвление; детали оставляем читателю.

Обратим внимание ещё на один момент: мы применяли оператор транзитивного замыкания только к E, т.е. не применяли его к формулам, отличным от атомарных. Это означает, что фактически мы рассматривали первопорядковые теории алгебр вида $\langle V, E, E^+, \cong, =\rangle$, в которых $\langle V, E\rangle$ — интранзитивное дерево.

7. Сложность теорий квази-интранзитивных деревьев

В случае квази-интранзитивных деревьев никаких неожиданностей нет. Достаточно заметить, что если мы введём сокращение

$$xE^-y \quad = \quad xEy \wedge x \neq y,$$

то если отношение E давало квази-интранзитивное дерево, то отношение E^- даст нам интранзитивное дерево. Кроме того, отметим, что в этом случае можно определить и $(E^-)^+$, применяя оператор транзитивного замыкания только к E:

$$x(E^-)^+y \quad = \quad xE^+y \wedge x \neq y.$$

Последнее замечание позволяет, как и в случае теории интранзитивных деревьев, не применять оператор транзитивного замыкания к формулам, отличным от атомарных.

Благодаря сделанным наблюдениям, результаты, полученные для теорий классов интранзитивных деревьев, полностью переносятся на теории аналогичных классов квази-интранзитивных деревьев.

8. Сложность теорий транзитивных деревьев

Заметим, что в теории транзитивных деревьев можно выразить интранзитивное отношение, обозначим его E_1. Положим

$$xE_1y \quad = \quad xE^-y \wedge \neg\exists z\,(xE^-z \wedge zE^-y).$$

Но дальше начинаются некоторые «чудеса», поэтому рассмотрим ситуацию с теорией транзитивных деревьев более подробно.

Если в формуле Tiling'_T заменить E, E^+, E^* на, соответственно, E_1, E_1^+, E_1^*, то мы получим для теорий классов транзитивных деревьев те же результаты, что были получены для теорий аналогичных классов интранзитивных деревьев. Но в этом случае оператор транзитивного замыкания применяется уже не к элементарной формуле, и поэтому не получится утверждать, что мы находимся в первопорядковой теории алгебр вида $\langle V, E, E^+, \cong, =\rangle$, как это было в случае интранзитивных деревьев.

Возникает естественный вопрос: а нельзя ли вместо E^+ использовать отношение E^- и вместо E^* использовать рефлексивное замыкание отношения E, определяемое формулой $xEy \vee x = y$? Дело в том, что E уже транзитивно, и почему бы не взять его (точнее, E^-) вместо E_1^+?

Так действительно можно поступить, но в только в случае формулы Tiling_T. Это даёт неразрешимость (Σ_1^0-трудность) теории транзитивных деревьев в языке $\mathcal{L}$, а также неразрешимость (Π_1^0-трудность) теории конечных транзитивных деревьев в языке $\mathcal{L}$. Но не только это. Рассмотрим язык $\mathcal{L}_1$, отличающийся от языка

$\mathcal{L}$ лишь тем, что в нём нет оператора транзитивного замыкания. Тогда получаем, что теория транзитивных деревьев Σ_1^0-трудна в языке $\mathcal{L}_1$, а теория конечных транзитивных деревьев Π_1^0-трудна в языке $\mathcal{L}_1$.

С формулой Tiling'_T так уже не получится. Дело в том, что и E, и E^- могут не быть транзитивными замыканиями отношения E_1. Например, такое возможно, если в исходном дереве были бесконечные E-цепи, упорядоченные как, скажем, $\omega+\omega$ или $\omega\cdot\omega$. Ситуацию $\omega\cdot k$ при $k\in\mathbb{N}^+$ можно «победить», а как быть с $\omega\cdot\omega$ — неясно. В этом случае истинность формулы Tiling'_T даст нам T-укладку, но плитка, имеющая тип t_0, может не встретиться в её первом вертикальном ряду бесконечно много раз, т.к. для истинности формулы T_3 достаточно, чтобы такая плитка встретилась, например, по одному разу в каждой копии цепи ω первого «вертикального ряда» дерева, имеющего вид $\omega\cdot\omega$. Заметим, что в случае $\omega\cdot k$ при $k\in\mathbb{N}^+$ так произойти не может, и если нас интересует класс транзитивных деревьев с такими ограничениями на цепи, то результаты, полученные для теорий интранзитивных деревьев, на соответствующие теории переносятся.

Отметим также, что в случае конечных транзитивных графов $E^-=E_1^+$.

9. Сложность теорий простых иррефлексивных деревьев

В случае простых иррефлексивных деревьев для получения аналогичных результатов достаточно промоделировать движение по дереву в некотором фиксированном направлении. Покажем, как это сделать.

Изменим описание дерева G_f. Вместо вершин с ветвлением 2 и 3 теперь пусть будут вершины, степень которых равна 4 и 5 соответственно. Мы добавим несуществующие в T «фиктивные» типы плиток домино t_{n+1}, t_{n+2} и t_{n+3}, и из каждой вершины вида (a,b) при $a,b\in\mathbb{N}$ сделаем видимой вершину, которая видит последовательность из $(n+1)$, $(n+2)$ или $(n+3)$ элементов, заканчивающуюся висячей вершиной. Сразу опишем это формулами:

$$\begin{array}{lcll} H_0(x) & = & \forall y\forall z\,(xEy\wedge xEz\to y=z); & \\ H_{k+1}(x) & = & D_{=2}(x)\wedge\exists y\,(xEy\wedge H_k(y)), & \text{где } k\in\mathbb{N};\\ \mathit{tile}_k(x) & = & D_4(x)\wedge\exists y\,(xEy\wedge H_k(y)), & \text{где } k\in\mathbb{N}. \end{array}$$

Теперь можно задать интранзитивное отношение $E^{\to}$:

$$\begin{array}{rcl} xE^{\to}y & = & D_4(x)\wedge D_4(y)\wedge xEy\wedge((\mathit{tile}_{n+1}(x)\wedge\mathit{tile}_{n+2}(y))\vee\\ & & \vee\,(\mathit{tile}_{n+2}(x)\wedge\mathit{tile}_{n+3}(y))\vee\\ & & \vee\,(\mathit{tile}_{n+3}(x)\wedge\mathit{tile}_{n+1}(y))). \end{array}$$

Если теперь потребовать, чтобы для каждого x выполнялось не более одного из условий $\mathit{tile}_{n+1}(x)$, $\mathit{tile}_{n+2}(x)$ и $\mathit{tile}_{n+3}(x)$, то получим, что отношение $E^{\to}$ является интранзитивным на множестве вершин степени не менее четырёх. Это позволит построить аналог графа G_f и описать его формулами.

В результате становится возможным повторить аргументацию, приведённую в разделе, где рассматривались теории интранзитивных деревьев, используя, где это требуется, $E^{\to}$, $(E^{\to})^+$ и $(E^{\to})^*$ вместо E, E^+ и E^* соответственно.

Отметим, что транзитивное замыкание отношения E в простом иррефлексивном дереве с более чем одной вершиной приводит к универсальному отношению, поскольку любые две вершины в таком дереве достижимы друг из друга. Это означает, что использовать E^+ вместо $(E^{\to})^+$ при моделировании T-укладки в этом классе деревьев не получится.

Что касается степеней вершин, то можно понизить максимальную степень с пяти до трёх: достаточно вместо того, чтобы моделировать в вершине и «реальную» плитку домино, и «фиктивную» одновременно, моделировать только одну из них, чередуя вершины в последовательности так, что если в некоторой вершине моделируются «реальные» плитки, то в соседних — «фиктивные», и наоборот, а в вершинах вида $(0,k)$ вообще не моделировать плитки. Такой подход повлечёт незначительное изменение формул, слегка усложнив определение отношения $E^{\to}$, где теперь придётся учесть возникшие нюансы.

10. Кода

Фактически из приведённых пояснений следует, что теории естественных классов деревьев в языке $\mathcal{L}$ неразрешимы или даже неарифметичны.

Теорема 7. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс деревьев с любым непротиворечивым сочетанием следующих ограничений на множество дуг: рефлексивность или иррефлексивность, симметричность или антисимметричность, транзитивность или интранзитивность, конечность или бесконечность. Кроме того, деревья из $\mathscr{C}$ могут иметь ограничение сверху на степень вершин, равное k, где $k \geqslant 3$. Пусть также $\mathscr{C}$ содержит деревья со сколь угодно длинными простыми путями. Тогда теория $Th_{\mathcal{L}}(\mathscr{C})$ неразрешима. При этом, если нет требования конечности, то $Th_{\mathcal{L}}(\mathscr{C})$ является Π^1_1-трудной, а если оно есть, то $Th_{\mathcal{L}}(\mathscr{C})$ является Π^0_1-трудной.*

И небольшое уточнение, касающееся теорий в языке $\mathcal{L}_1$.

Теорема 8. *Если $\mathscr{C}$ — класс всех транзитивных деревьев, или всех рефлексивных транзитивных деревьев, или всех иррефлексивных транзитивных деревьев, то теория $Th_{\mathcal{L}_1}(\mathscr{C})$ является Σ^0_1-трудной. Если $\mathscr{C}$ — класс всех конечных транзитивных деревьев, или всех конечных рефлексивных транзитивных деревьев, или всех конечных иррефлексивных транзитивных деревьев, то теория $Th_{\mathcal{L}_1}(\mathscr{C})$ является Π^0_1-трудной.*

Заключение

Несмотря на то, что была показана неразрешимость теорий различных классов деревьев (и даже неарифметичность некоторых из них), надо отметить, что мы использовали довольно богатый язык: помимо бинарной предикатной буквы, соответствующей дугам (или рёбрам) в дереве и равенства, язык $\mathcal{L}$ содержит также оператор транзитивного замыкания и конгруэнтность. Мы видели, что в случае транзитивных графов (с вариациями) для получения неразрешимости можно обойтись без оператора транзитивного замыкания. Поскольку условие транзитивности выражается формулой первого порядка, получаем, что для неразрешимости теории $Th_{\mathcal{L}}(\mathscr{C})$, где $\mathscr{C}$ — произвольный класс деревьев, расширяющий класс всех транзитивных деревьев, достаточно использовать лишь средства языка $\mathcal{L}_1$.

Теорема 9. *Если $\mathscr{C}$ — класс деревьев, содержащий в себе класс транзитивных деревьев, то теория $Th_{\mathcal{L}_1}(\mathscr{C})$ является Σ_1^0-трудной. Если $\mathscr{C}$ — класс конечных деревьев, содержащих в себе класс конечных транзитивных деревьев, то теория $Th_{\mathcal{L}_1}(\mathscr{C})$ является Π_1^0-трудной.*

Эта теорема, конечно же, останется справедливой, если добавить требование рефлексивности или требование иррефлексивности, причём даже лишь для транзитивных деревьев, входящих в $\mathscr{C}$.

Возникает естественный вопрос: можно ли получить аналогичные результаты в языке без конгруэнтности?

Именно, пусть $\mathcal{L}_2$ — язык, отличающийся от $\mathcal{L}$ лишь отсутствием конгруэнтности. Разрешимы ли и перечислимы ли теории деревьев — транзитивных, интранзитивных, простых иррефлексивных и т.д., конечных, бесконечных — в языке $\mathcal{L}_2$?

Тот же вопрос можно поставить и в отношении языка $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, т.е. не содержащем ни оператора транзитивного замыкания, ни конгруэнтности, а только бинарную букву, соответствующую множеству дуг (или рёбер) и равенство.

С одной стороны, очень похоже, что использование конгруэнтности (или другого сходного средства) нужно, чтобы согласовывать плитки домино в укладке не только по «горизонтали», но и по «вертикали». С другой стороны, известные результаты для классов графов, не являющихся деревьями, показывают, что одной бинарной буквы (даже без равенства) достаточно, чтобы получить неразрешимость.

Что касается замены конгруэнтности другим средством, то это возможно. Например, можно заменить конгруэнтность на эквивалентность, обозначим её $\approx$, к которой не предъявляем никаких особых требований. Тогда эквивалентность позволит разбивать множество вершин на классы эквивалентности. Кажется, что это средство весьма «безобидно», да и, в отличие от конгруэнтности, является бинарным отношением, а не квартернарным; тем не менее, с помощью эквивалентности можно выразить то, что нам позволяла выразить конгруэнтность (то, для чего мы её использовали). Действительно, вернёмся к классу интранзитивных деревьев. Положим

$$\begin{array}{lcl}
C_1 & = & \forall x \forall y\, (D_3(x) \wedge D_3(y) \to x \approx y);\\
C_2 & = & \forall x \forall y\, (D_3(x) \wedge \neg D_3(y) \to x \not\approx y);\\
C_3 & = & \forall x \forall y \forall x' \forall y'\, (D_3(x) \wedge D_3(y) \wedge D_{=2}(x') \wedge D_{=2}(y') \wedge xEx' \wedge yEy' \to\\
& & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to x' \approx y');\\
C_4 & = & \forall x \forall y\, (D_{=2}(x) \wedge xE^+y \to x \not\approx y);\\
C_5 & = & \forall x \forall y \forall x' \forall y'\, (D_{=2}(x) \wedge D_{=2}(y) \wedge D_{=2}(x') \wedge D_{=2}(y') \wedge xEx' \wedge yEy' \to\\
& & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to (x \approx y \to x' \approx y')).
\end{array}$$

Истинность конъюнкции C формул C_1–C_5 означает, что среди вершин множества V_0 дерева вида G_f в один класс эквивалентности попадают все вершин с равными первыми координатами:

$$(a,b) \approx (a',b') \iff a = a',$$

где $a, b, a', b' \in \mathbb{N}$. Остаётся переопределить формулу T_2'', убрав из неё подформулы, содержащие z, и заменив $\hat{x}x \cong \hat{y}y$ на $x \approx y$, а также добавить C в качестве конъюнктивного члена в получившиеся модификации формул $Tiling_T$ и $Tiling'_T$.

Список литературы

[1] Berger R. The undecidability of the domino problem // Memoirs of the American Mathematical Society. 1966. № 66. http://dx.doi.org/10.1090/memo/0066

[2] Boolos G.S., Burgess J.P., Jeffrey R.C. Computability and Logic. 5th edition. New York: Cambridge University Press, 2007. 364 p.

[3] Church A. A note on the Entscheidungsproblem // Journal of Symbolic Logic. 1936. Vol. 1. Pp. 40–41.

[4] Grädel E., Otto M., Rosen E. Undecidability results on two-variable logics // Archive for Mathematical Logic. 1999. Vol. 38. Pp. 313–354.

[5] Harel D. Effective transformations on infinite trees, with applications to high undecidability, dominoes, and fairness // Journal of the ACM. 1986. Vol. 33. Pp. 224–248.

[6] Papadimitriou C.H. Computational Complexity. Addison–Wesley Publishing Company, 1995.

[7] Рыбаков М. Алгоритмическая сложность теорий бинарного предиката с малым числом переменных в языке // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507. С. 61–65. https://doi.org/10.1134/S1064562422700053

[8] Рыбаков М. Бинарный предикат, транзитивное замыкание, две-три переменные: сыграем в домино? // Логические исследования. 2023. (в печати)

[9] Rybakov M., Shkatov D. Trakhtenbrot theorem for classical languages with three individual variables // Proceedings of SAICSIT2019. ACM, 2019.

[10] Rybakov M., Shkatov D. Algorithmic properties of first-order superintuitionistic logics of finite Kripke frames in restricted languages // Journal of Logic and Computation. 2021. Vol. 31, № 2. Pp. 494–522.

[11] Sipser M. Introduction to the Theory of Computation. 3rd edition. Cengage Learning, 2012.

[12] Surányi J. Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktioskalküls // Mathematikai és Fizikai Lapok. 1943. Vol. 50. Pp. 51–74.

[13] Tarski A., Givant S. A Formalization of Set Theory without Variables. American Mathematical Society, 1987.

[14] Трахтенброт Б.А. Невозможность алгоритма для проблемы разрешимости на конечных классах // Доклады Академии наук СССР. 1950. Т. 70, № 4. С. 569–572.

[15] Трахтенброт Б.А. О рекурсивной отделимости // Доклады Академии наук СССР. 1953. Т. 88, № 6. С. 953–956.

[16] Turing A.M. On computable numbers, with an application to the ‘Entscheidungsproblem’ // Proceedings of the London Mathematical Society. 1936. Vol. 42. Pp. 230–265.

Образец цитирования

Рыбаков М.Н. Деревья как средство моделирования неразрешимых проблем // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 1. С. 5–23. https://doi.org/10.26456/vtpmk653

Сведения об авторах

1. **Рыбаков Михаил Николаевич**
ведущий научный сотрудник ИППИ имени А. А. Харкевича РАН; доцент факультета математики НИУ ВШЭ; доцент кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: m_rybakov@mail.ru

TREES AS A TOOL FOR MODELLING UNDECIDABLE PROBLEMS

Rybakov M.
IITP RAS, Moscow
HSE University, Moscow
Tver State University, Tver

Received 26.11.2022, revised 10.12.2022.

To Valentin Goranko,
with gratitude from the author

The paper proves undecidability and high undecidability (non-arithmeticity) of theories of trees (with various refinements of the concept of a tree and with various requirements for the properties of trees, including the finiteness of the number of vertices) in a language with a binary predicate letter corresponding to edges, equality, the transitive closure operator and congruence between pairs of vertices, which is defined as equality of the distance between the vertices of the first pair and the distance between the vertices of the second pair. It is shown that in many cases it is sufficient to apply the transitive closure operator only to the binary relation corresponding to edges, i.e., in fact, instead of the transitive closure operator, it is sufficient to consider the reachability relation; in some cases, we establish undecidability in a language without the transitive closure operator.

Keywords: first-order theory, trees, transitive trees, intransitive trees, transitive closure, undecidability, non-arithmeticity.

Citation

Rybakov M., "Trees as a tool for modelling undecidable problems", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 1, 5–23 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk653

References

[1] Berger R., "The undecidability of the domino problem", *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1966, № 66, http://dx.doi.org/10.1090/memo/0066.

[2] Boolos G.S., Burgess J.P., Jeffrey R.C., *Computability and Logic*, 5th edition, Cambridge University Press, New York, 2007, 364 pp.

[3] Church A., "A note on the Entscheidungsproblem", *Journal of Symbolic Logic*, **1** (1936), 40–41.

[4] Grädel E., Otto M., Rosen E., "Undecidability results on two-variable logics", *Archive for Mathematical Logic*, **38** (1999), 313–354.

[5] Harel D., "Effective transformations on infinite trees, with applications to high undecidability, dominoes, and fairness", *Journal of the ACM*, **33** (1986), 224–248.

[6] Papadimitriou C.H., *Computational Complexity*, Addison–Wesley Publishing Company, 1995.

[7] Rybakov M., "Computational complexity of theories of a binary predicate with a small number of variables", *Doklady Mathematics*, **106**:3 (2022), 458–461, https://doi.org/10.1134/S1064562422700053.

[8] Rybakov M., "Binary predicate, transitive closure, two or three variables: shall we play dominoes?", *Logicheskie issledovaniya [Logical research]*, 2023 (to appear) (in Russian).

[9] Rybakov M., Shkatov D., "Trakhtenbrot theorem for classical languages with three individual variables", *Proceedings of SAICSIT2019*, ACM, 2019.

[10] Rybakov M., Shkatov D., "Algorithmic properties of first-order superintuitionistic logics of finite Kripke frames in restricted languages", *Journal of Logic and Computation*, **31**:2 (2021), 494–522.

[11] Sipser M., *Introduction to the Theory of Computation*, 3rd edition, Cengage Learning, 2012.

[12] Surányi J., "Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktioskalküls", *Mathematikai és Fizikai Lapok*, **50** (1943), 51–74.

[13] Tarski A., Givant S., *A Formalization of Set Theory without Variables*, American Mathematical Society, 1987.

[14] Trakhtenbrot B.A., "The impossibility of an algorithm for the decidability problem on finite classes", *Doklady Akademii Nauk SSSR [Proceedings of the USSR Academy of Sciences]*, **70**:4 (1950), 569–572 (in Russian).

[15] Trakhtenbrot B.A., "On recursive separability", *Doklady Akademii Nauk SSSR [Proceedings of the USSR Academy of Sciences]*, **88**:6 (1953), 953–956 (in Russian).

[16] Turing A.M., "On computable numbers, with an application to the 'Entscheidungsproblem'", *Proceedings of the London Mathematical Society*, **42** (1936), 230–265.

Author Info

1. **Rybakov Mikhail**
Leading Researcher, IITP RAS; Associate Professor at Faculty of Mathematics, HSE University; Associate Professor at Functional Analysis and Geometry department, Tver State University.

Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: m_rybakov@mail.ru