УДК 510.63

РАЗРЕШИМОСТЬ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ БЕЗАТОМНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

Авхимович Н.В., Дудаков С.М.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 14.02.2023, после переработки 30.03.2023.

В работе рассматриваются алгебраические системы, где в качестве носителя выступают конечные подмножества некоторой безатомной булевой алгебры. Для полученной системы мы вводим новое отношение для конечных подмножеств: считаем, что одно подмножество состоит в отношении с другим подмножеством в том и только том случае, когда все элементы одного подмножества меньше всех элементов другого. Мы демонстрируем, что теория построенной таким образом новой системы сводится к теории безатомных булевых алгебр. Следовательно, также как и теория исходной системы, теория новой системы оказывается разрешимой.

Ключевые слова: булева алгебра, конечное подмножество, теория, обогащение, разрешимость.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 1. С. 24–35.
https://doi.org/10.26456/vtpmk656

Введение

Мы рассматриваем безатомные булевы алгебры. Сами булевы алгебры имеют большое теоретическое и практическое значение, так как играют важную роль в математической логике, многие логические структуры оказываются булевыми алгебрами. Среди булевых алгебр особое положение занимают безатомные. Их теория допускает элиминацию кванторов, является счетно категоричной, и любая счетная булева алгебра изоморфно вкладывается в безатомную.

Мы рассматриваем теорию системы, носителем которой являются конечные подмножества безатомной булевой алгебры. Проблема заключается в определении сигнатурных символов новой системы. Булевы алгебры можно рассматривать в функциональной сигнатуре, когда операциями являются нахождение точных верхних и нижних граней, дополнение и константы для максимального и минимального элемента. Подобные методы рассматривались, например, в работах [4] и [3].

Однако исходным является все же отношение частичного порядка, поэтому мы рассматриваем вариант сигнатуры, который содержит только отношение порядка.

Для подмножеств мы определяем отношение, пользуясь принципом тотальности: считаем, что два подмножества состоят в отношении «меньше» тогда и только тогда, когда каждый элемент первого подмножества строго меньше каждого элемента второго подмножества.

Для плотно и дискретно линейно упорядоченных множеств мы ранее изучали это отношение в работах [1] и [2] соответственно, указав явный способ элиминации кванторов. Разрешимость такой теории может быть получена также из классической работы [5].

Для систем конечных подмножеств, которые построены из нелинейных порядков, такой вопрос еще не изучался. Для системы, построенной из безатомной булевой алгебры, мы показываем возможность сведения ее теории к теории исходной булевой алгебры. В частности, это означает, что эта теория допускает элиминацию кванторов и алгоритмически разрешима.

1. Основные определения

Напомним определения основных понятий, используемых в работе. Определения 1–3 взяты из книги [6].

Далее с помощью символов $<$ и $\leq$ мы обозначаем отношения строгого и нестрогого порядков соответственно.

Определение 1 (Верхние и нижние грани)**.** *Пусть* $(A, \leq)$ *— частично упорядоченное множество,* $X \subseteq A$*,* $x \in A$*. Тогда* x *называется*

– *верхней гранью* X*, если* $y \leq x$ *для всех* $y \in X$*;*

– *нижней гранью* X*, если* $x \leq y$ *для всех* $y \in X$*.*

Если множество верхних (нижних) граней X *имеет наименьший (соответственно, наибольший) элемент, то он называется точной верхней (соответственно, нижней) гранью и обозначается с помощью* $\sup X$ *(соответственно,* $\inf X$*).*

В частности, если множество X имеет наибольший (наименьший) элемент a, то $\sup X = a$ ($\inf X = a$). Например, для одноэлементных множеств выполнено $\sup\{a\} = \inf\{a\} = a$.

Если множество X состоит из двух элементов a и b, то точную верхнюю грань множества X обозначают также с помощью $a \cup b$, а точную нижнюю — $a \cap b$.

Определение 2 (Булева алгебра)**.** *Частично упорядоченное множество* $(A, \leq)$ *называется булевой алгеброй, если*

1) *для любых* $x, y \in A$ *существуют* $x \cup y$*,* $x \cap y$*;*

2) *операции* $\cup$ *и* $\cap$ *дистрибутивны относительно друг друга;*

3) *в* $(A, \leq)$ *существует наименьший элемент, обозначаемый* 0*;*

4) *в* $(A, \leq)$ *существует наибольший элемент, обозначаемый* 1*;*

5) *для каждого* $x \in A$ *существует* $y \in A$*, для которого* $x \cap y = 0$ *и* $x \cup y = 1$*. Элемент* y *называется дополнением* x*, он является единственным и обозначается с помощью* $\bar{x}$*.*

Булева алгебра называется безатомной, если она не содержит минимальных элементов среди ненулевых. Это эквивалентно плотной упорядоченности: если $a < b$, то существует элемент e такой, что $a < e < b$.

Определение 3 (Теория алгебраической системы)**.** *Теория алгебраической системы* $\mathfrak{A}$ *— это множество истинных в* $\mathfrak{A}$ *замкнутых формул.*

Известна следующая теорема.

Теорема. Теория безатомных булевых алгебр допускает эффективную элиминацию кванторов и, следовательно, разрешима.

2. Система конечных подмножеств

Пусть у нас есть некоторая безатомная булева алгебра $\mathfrak{A}$. Построим новую алгебраическую систему, где в качестве носителя возьмем множество $\exp \mathfrak{A}$ — множество конечных подмножеств множества $\mathfrak{A}$.

Для конечных подмножеств — элементов $\exp \mathfrak{A}$ — введем отношение

$$A <^* B \Leftrightarrow (\forall a \in A)(\forall b \in B) a < b.$$

Таким образом, будем считать, что одно множество меньше чем другое, если каждый элемент первого множества меньше каждого элемента второго множества. Если не выполняется ни один из случаев $A <^* B$, $B <^* A$, $A = B$, то считаем, что множества A и B не сравнимы. Таким образом получается алгебраическая система $(\exp \mathfrak{A}, <^*)$.

В этой алгебраической системе определимо пустое множество — единственное множество, которое сравнимо со всеми другими:

$$X = \varnothing \Leftrightarrow (\forall Y) X <^* Y.$$

Пусть у нас есть бескванторная формула φ, содержащая переменную X, обозначающую некоторое множество. Добавим в формулу φ дизъюнкцию

$$\varphi \wedge (X = \varnothing \vee \neg X = \varnothing).$$

После раскрытия скобок и приведения формулы к ДНФ для каждой элементарной конъюнкции мы получим один из видов:

$$K \wedge X = \varnothing \quad \text{или} \quad K \wedge \neg X = \varnothing.$$

Допустим, что множество X пусто, то есть мы рассматриваем элементарную конъюнкцию $K \wedge X = \varnothing$. Покажем, как в такой ситуации исключить X. Переменная X может входить в формулу следующими способами:

1) $X = t$, в этом случае заменяем это равенство на $t = \varnothing$;

2) $\neg X = t$, в этом случае делаем замену на $\neg t = \varnothing$;

3) $X <^* t$, это неравенство меняем на тождественно истинную формулу $\top$;

4) $\neg X <^* t$, заменяем на тождественно ложную формулу $\neg\top$;

5) $t <^* X$, меняем на $\top$;

6) $\neg t <^* X$, меняем на $\neg\top$;

7) $X = \varnothing$, в этом случае меняем равенство на $\top$;

8) $\neg X = \varnothing$, здесь же заменяем на $\neg\top$.

Мы рассмотрели все возможные варианты вхождения переменной, имеющей значение пустого множества, в элементарную конъюнкцию и показали, какие эквивалентные замены в этом случае следует произвести. Поэтому далее можем считать, что рассматриваемые нами переменные имеют значения непустых множеств.

Лемма 1. *Формула*

$$(\forall V)(\underbrace{(\forall U)((U <^* Y \to U <^* V) \wedge (Y <^* U \to V <^* U))}_{(*)} \to Y = V) \qquad (1)$$

выполнена в том и только том случае, когда Y — одноэлементное множество.

Доказательство. Докажем утверждение в прямую сторону. Допустим, формула (1) истинна. Пусть множество Y содержит по крайней мере два элемента: $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$. Тогда $\inf Y < \sup Y$. Поскольку порядок $<$ в исходной булевой алгебре является плотным, существует такой элемент e, что $\inf Y < e < \sup Y$. Возьмем в качестве V множество, состоящее из элемента e. В этом случае фрагмент $(*)$ выполнен. Рассмотрим $(U <^* Y \to U <^* V)$. Пусть выполнено $U <^* Y$. Тогда для всех элементов $u \in U$ выполняется $u \leq \inf Y$. Поскольку для V выполняется $\inf Y <^* V$, то из-за транзитивности получаем $U <^* V$. По аналогии из $(Y <^* U \to V <^* U)$ получаем $V <^* \sup Y <^* U$, откуда следует $V <^* U$. Однако равенство $V = Y$ не выполнено. Пришли к противоречию: множество Y не может состоять больше, чем из одного элемента.

Пусть теперь $Y = \{y\}$. Предположим, что формула (1) ложна. Тогда $(*)$ истинно, а $Y = V$ ложно. Рассмотрим всевозможные соотношения Y и V.

1. Пусть $V <^* Y$. Это означает, что множество V содержит элементы, отличные от y, то есть существует такой элемент $v \in V$, что $v < y$. В этом случае существует и элемент e такой, что $v < e < y$. Возьмем $U = \{e\}$. Тогда $U <^* Y$ выполнено, а $U <^* V$ нет.

2. Пусть $Y <^* V$. Это означает, что множество V содержит элементы, отличные от y, то есть существует такой элемент $v \in V$, что $y < v$. В этом случае существует и элемент e такой, что $y < e < v$. Возьмем $U = \{e\}$. Тогда $Y <^* U$ выполнено, а $V <^* U$ нет.

3. Пусть Y и V несравнимы. Возможны два варианта.

   Первый: все элементы множества V сравнимы с y. Рассмотрим элемент $v \in V$ такой, что $v \neq y$. Тогда существует элемент e такой, что $y < e < v$ (или $v < e < y$). Возьмем $U = \{e\}$. Тогда $Y <^* U$ (или $U <^* Y$) выполнено, а $V <^* U$ (или $U <^* V$) нет.

   Второй вариант: хотя бы один элемент $v \in V$ несравним с y. Тогда существует элемент e такой, что $\inf\{v, y\} < e < y$. Возьмем $U = \{e\}$. Тогда $U <^* Y$ выполнено, а $U <^* V$ нет.

Наше допущение, что при одноэлементном множестве Y формула (1) ложна, является ошибочным. □

Обозначим формулу (1) при помощи $\mathrm{one}(Y)$.

Введем в системе $(\exp \mathfrak{A}, <^*)$ функции, определяющие точную нижнюю и точную верхнюю грани. Поскольку мы рассматриваем частично упорядоченные множества, точные нижняя и верхняя грани могут быть как внутри множества, так и за его пределами.

Лемма 2. *Формула*

$$\inf_s(X) = Y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{one}(Y) \wedge Y <^* X \wedge \underbrace{(\forall Z)((\mathrm{one}(Z) \wedge \neg Z = Y) \to (Z <^* X \leftrightarrow Z <^* Y))}_{(*)} \quad (2)$$

определяет одноэлементное множество $Y = \{y\}$ *такое, что* $y = \inf X$ *и* $y \notin X$.

Доказательство. Элемент y является точной нижней гранью множества X, если выполнены следующие два условия:

1) $y \leq x$ для всех $x \in X$;

2) если для всех $x \in X$ выполнено $z \leq x$, то $z \leq y$.

Пусть выполнено $y \notin X$ и y является точной нижней гранью множества X. Покажем, что формула (2) будет истинна.

Условие $\mathrm{one}(Y)$ выполнено, поскольку Y — это одноэлементное множество. Истинность фрагмента $Y <^* X$ следует из условия $y \notin X$ и условия, что y является точной нижней гранью множества X, то есть выполнено $y \leq x$ для всех $x \in X$ (в рассматриваемом случае неравенство будет строгим), а также из определения отношения $<^*$.

Рассмотрим теперь фрагмент $(*)$. Возьмем произвольное одноэлементное множество Z такое, что $Z \neq Y$. Пусть выполнено $Z <^* X$. Тогда, так как y является точной нижней гранью множества X, неравенство $Z <^* Y$ также будет выполнено (по определению точной нижней грани и ввиду условия $Z \neq Y$).

Обратно, пусть верно $Z <^* Y$. У нас есть условие, что $Y <^* X$. Тогда в силу транзитивности выполнено $Z <^* X$.

Пусть теперь истинна формула (2). Нужно доказать, что множество Y состоит из единственного элемента y, являющегося точной нижней гранью множества X и выполнено условие $y \notin X$.

Множество Y является одноэлементным, поскольку выполняется фрагмент $\mathrm{one}(Y)$. То, что $y \notin X$, следует из истинности $Y <^* X$ и определения отношения $<^*$.

Рассмотрим фрагмент $(*)$. Пусть $Z = \{z\}$, $z \neq y$. Получаем, что $z < x$ для всех $x \in X$ в том и только том случае, когда $z < y$. В частности выполнено $z < x \to z < y$ для всех $x \in X$, для всех $z \neq y$. □

Аналогично лемме 2 можно доказать

Лемма 3. *Формула*

$$\sup_s(X) = Y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{one}(Y) \wedge X <^* Y \wedge (\forall Z)((\mathrm{one}(Z) \wedge \neg Z = Y) \to (X <^* Z \leftrightarrow Y <^* Z)) \quad (3)$$

определяет одноэлементное множество $Y = \{y\}$ *такое, что* $y = \sup X$ *и* $y \notin X$.

Эти функции описывают случай, когда грани находятся за пределами множества X. Рассмотрим теперь случай, когда точные грани лежат внутри множества X.

Лемма 4. *Формула*

$$\inf_v(X) = Y \Leftrightarrow \mathrm{one}(Y) \wedge (\neg X <^* Y \wedge \neg Y <^* X \wedge \neg X = Y \vee X = Y) \wedge$$
$$\wedge \underbrace{(\forall Z)(\mathrm{one}(Z) \to (Z <^* X \leftrightarrow Z <^* Y))}_{(*)} \quad (4)$$

определяет одноэлементное множество $Y = \{y\}$ *такое, что* $y = \inf X$ *и* $y \in X$.

Доказательство. Сначала докажем лемму в прямую сторону. Пусть $y \in X$ и y является точной нижней гранью множетсва X, то есть выполнены условия

1) $y \leq x$ для всех $x \in X$;

2) если для всех $x \in X$ выполнено $z \leq x$, то $z \leq y$.

Покажем, что формула (4) будет выполнена.

Фрагмент $\mathrm{one}(Y)$ выполнен, поскольку Y является одноэлементным множеством.

Далее рассмотрим два случая.

1. Множество X состоит из одного элемента. В этом случае выполнено $X = Y$, фрагмент $(*)$ эквивалентен единице. Формула (4) истинна.

2. Множество X состоит по крайней мере из двух элементов. Тогда выполняется $\neg X <^* Y \wedge \neg Y <^* X \wedge \neg X = Y$, то есть множества X и Y несравнимы. Это верно, поскольку $y \in X$. Фрагмент $(*)$ будет тоже выполнен. Возьмем произвольное множество Z. Согласно условию, что если $z \leq x$ для всех $x \in X$, то $z \leq y$, в прямую сторону формула выполняется: если верно $Z <^* X$, то $Z <^* Y$ также верно. Допустим теперь, что выполнено $Z <^* Y$, то есть множество Z меньше точной нижней грани множества X. По определению точной нижней грани, $y \leq x$ для всех $x \in X$. Следовательно, $Z <^* X$ выполнено.

Докажем теперь обратное. Пусть выполнена формула (4).

Фрагмент $\mathrm{one}(Y)$ гарантирует нам одноэлементность множества Y.

Снова рассмотрим два случая.

1. Выполнено $X = Y$. Следовательно, множество X является одноэлементным. Для одноэлементного множества точной нижней гранью является его единственный элемент.

2. Выполнено $\neg X <^* Y \wedge \neg Y <^* X \wedge \neg X = Y$. Допустим, что y не является наименьшим элементом множества X. Существует два возможных случая.

   Первый случай: в X есть элемент x, который несравним с y. Тогда существует элемент e такой, что $\inf\{x, y\} < e < y$. Возьмем в качестве Z множество $\{e\}$. Тогда $Z <^* Y$ выполнено, а $Z <^* X$ нет.

   Второй случай: все элементы X сравнимы с y. Тогда существует элемент $x \in X$ такой, что $x < y$. У нас выполняется фрагмент $(*)$. Возьмем в качестве Z множество $\{x\}$. Тогда $Z <^* Y$ выполнено, а $Z <^* X$ нет.

Из обоих случаев следует, что y является точной нижней гранью множества X. □

Аналогичным образом можем определить функцию нахождения точной верхней грани.

Лемма 5. *Формула*

$$\sup_v(X) = Y \Leftrightarrow \mathrm{one}(Y) \wedge (\neg Y <^* X \wedge \neg X <^* Y \wedge \neg X = Y \vee X = Y) \wedge \\ \wedge (\forall Z)(\mathrm{one}(Z) \to (X <^* Z \leftrightarrow Y <^* Z)) \quad (5)$$

определяет одноэлементное множество $Y = \{y\}$ *такое, что* $y = \sup X$ *и* $y \in X$.

Теперь мы можем обогатить сигнатуру рассматриваемой системы четырьмя определимыми отношениями: $\inf_s$ и $\sup_s$, $\inf_v$ и $\sup_v$.

3. Теория конечных подмножеств для безатомных булевых алгебр

Мы хотим показать, что теория конечных подмножеств может быть сведена к теории исходной системы. Прежде чем перейти к основной теореме, рассмотрим следующие леммы.

Лемма 6. *Отношение* $<^*$ *может быть выражено через введенные нами четыре функции:*

$$A <^* B \Leftrightarrow \sup_s(A) < \inf_s(B) \vee \inf_s(B) = \sup_s(A) \vee \\ \vee \sup_s(A) < \inf_v(B) \vee \inf_v(B) = \sup_s(A) \vee \sup_v(A) < \inf_s(B) \vee \\ \vee \inf_s(B) = \sup_v(A) \vee \sup_v(A) < \inf_v(B). \quad (6)$$

Доказательство. Здесь перечислены всевозможные варианты для $A <^* B$. □

Лемма 7. *Если в безатомной булевой алгебре $\mathfrak{A}$ выполнено $a < b$, то существуют несравнимые u и v такие, что* $\inf\{u, v\} = a$, $\sup\{u, v\} = b$.

Доказательство. В силу плотности порядка выберем u, для которого $a < u < b$. Пусть $v = (b \cap \bar{u}) \cup a$. Тогда

$$u \cup v = u \cup (b \cap \bar{u}) \cup a = u \cup (b \cap \bar{u}) = (u \cup b) \cap (u \cup \bar{u}) = (u \cup b) \cap 1 = u \cup b = b.$$

Аналогично

$$u \cap v = u \cap ((b \cap \bar{u}) \cup a) = (u \cap (b \cap \bar{u})) \cup (u \cap a) = 0 \cup (u \cap a) = u \cap a = a.$$

Если бы u и v были сравнимы, то $u \cup v$ или $u \cap v$ было бы равно u, что, как мы увидели, не так. □

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — безатомная булева алгебра. Тогда теория системы* $\exp \mathfrak{A}$ *может быть интерпретирована в теории системы $\mathfrak{A}$ и допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство. Покажем, как преобразовать произвольную формулу теории системы $\exp \mathfrak{A}$ к эквивалентной формуле теории $\exp A$. Заменим в формуле все вхождения предикатного символа $<^*$, используя эквивалентность (6). Далее покажем, как элиминируется квантор по множеству X для элементарной конъюнкции. Как известно, этого достаточно для элиминации кванторов.

Если элементарная конъюнкция содержит формулу $X = Y$, то элиминация кванторов выполняется простой заменой X на Y. Далее считаем, что такого нет. Также можно полагать, что у нас нет формул $X = X$ и $X \neq X$, так как они тривиально элиминируются.

Заметим, что для формулы $(\exists X)\phi$ фрагмент ϕ не может содержать $\sup_s X$ и $\sup_v X$ одновременно, так как это — взаимоисключающие объекты. Аналогично, ϕ не может содержать $\inf_s X$ и $\inf_v X$ одновременно. Рассмотрим все четыре случая.

Пусть ϕ содержит $\sup_s X$ и $\inf_s X$. Заменим всюду в ϕ термы $\sup_s X$ и $\inf_s X$ на переменные s и i соответственно, удалим формулы вида $X \neq Y$ и обозначим полученную формулу с помощью ϕ'. Тогда формула $(\exists s)(\exists i)(\phi' \wedge i < s)$ эквивалентна $(\exists X)\phi$. Из истинности $(\exists X)\phi$ тривиально следует $(\exists s)(\exists i)(\phi' \wedge i < s)$, так как в качестве значений переменных s и i можно взять $\sup X$ и $\inf X$. Пусть истинно $(\exists s)(\exists i)(\phi' \wedge i < s)$. Выберем по лемме двухэлементное множество X, для которого $\inf X = i < s = \sup X$. Это обеспечит истинность всех формул ϕ, кроме, возможно, $X \neq Z$. Но чтобы сделать и все формулы $X \neq Z$ истинными, достаточно добавить в X любой элемент e такой, что $i < e < s$ и не входящий ни в одно из множеств Z. Это не изменит $\inf X$ и $\sup X$, поэтому сохранит истинность всех остальных формул.

Если ϕ содержит $\sup_v X$ и $\inf_s X$, то доказательство аналогично, только в X нужно будет добавить еще s. Для случая $\sup_s X$ и $\inf_v X$ доказательство будет двойственным.

Пусть, наконец, формула ϕ содержит $\sup_v X$ и $\inf_v X$. Тогда можно добавить дизъюнкцию $\inf_v X < \sup_v X \vee \inf_v X = \sup_v X$ и раскрыть скобки. Получим две элементарные конъюнкции.

Для случая $\inf_v X < \sup_v X$ доказательство будет аналогично предыдущим случаям, только в множество X нужно включать и s, и i.

В случае $\inf_v X = \sup_v X$ мы имеем дело с одноэлементным множеством. В этом случае заменим всюду в ϕ термы $\sup_v X$ и $\inf_v X$ на переменную s, а формулы вида $X \neq Z$ на $((\mathrm{one}(Z) \wedge s \neq \inf_v Z) \vee \neg\,\mathrm{one}(Z))$, и обозначим полученную формулу с помощью ϕ'. Тогда формула $(\exists s)\phi'$ эквивалентна $(\exists X)(\phi \wedge \inf_v X = \sup_v X)$. Для этого достаточно обратить внимание, что $X = \{s\}$.

Итак, мы показали, как элементарную конъюнкцию с квантором существования в теории системы $\exp \mathfrak{A}$ превратить в конъюнкцию с кванторами существования в теории исходной булевой алгебры $\mathfrak{A}$. В последней теории кванторы элиминируются. $\square$

Заключение

Мы показали, что если для безатомной булевой алгебры рассмотреть алгебру конечных подмножеств с отношением порядка, определенным по принципу тотальности, то новая система имеет теорию, интерпретируемую в исходной. Она допускает элиминацию кванторов и разрешима.

Остаются несколько вопросов.

Во-первых, можно ли этот результат перенести на другие сигнатуры? Булевы алгебры могут быть заданы во многих сигнатурах. При переходе к подмножествам мы можем получать принципиально различные системы.

Во-вторых, будет ли такой результат справедлив для других булевых алгебр (атомных, суператомных и т. д.)? В общем случае задача будет более сложной, чем в ситуации, рассмотренной в статье.

Список литературы

[1] Авхимович Н.В. О разрешимости теории конечных подмножеств для плотного линейного порядка // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж, 2022. С. 1521–1525.

[2] Авхимович Н.В. О разрешимости теории конечных подмножеств для дискретного линейного порядка // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 91–104. https://doi.org/10.26456/vtpmk646

[3] Dudakov S.M. On Undecidability of Finite Subsets Theory for Torsion Abelian Groups // Mathematics. 2022. Vol. 10, № 3. ID 533.

[4] Dudakov S., Karlov B. On decidability of theories of regular languages // Theory of Computing Systems. 2021. Vol. 65. Pp. 462–478. http://doi.org/10.1007/s00224-020-09995-4

[5] Rabin M.O. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees // Bulletin of the American Mathematical Society. 1968. Vol. 74. Pp. 1025–1029.

[6] Дудаков С.М. Основы теории моделей. Тверь: Твер. гос. ун-т, 2013. 480 с.

Образец цитирования

Авхимович Н.В., Дудаков С.М. Разрешимость теории конечных подмножеств безатомных булевых алгебр // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 1. С. 24–35. https://doi.org/10.26456/vtpmk656

Сведения об авторах

1. **Авхимович Николь Вадимовна**
   магистрант факультета прикладной математики и кибернетики Тверского государственного университета.

   Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д.33, ТвГУ.
   E-mail: nicoleavkhimovich@mail.ru

2. **Дудаков Сергей Михайлович**
   декан факультета прикладной математики и кибернетики Тверского госуниверситета.

   Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
   E-mail: sergeydudakov@yandex.ru

ON DECIDABILITY OF FINITE SUBSETS' THEORY FOR DENSE LINEAR ORDER

Avkhimovich N.V., Dudakov S.M.
Tver State University, Tver

Received 14.02.2023, revised 30.03.2023.

We consider atomless boolean algebras, and study algebraic structures where the universe consists of finite subsets of such an algebra. On these structures, we define the new relation between finite subsets: we say that one set is less than another one iff all elements of the first set are less than all elements of the second one. We show that the theory of constructed structure is reducible to the theory of original boolean algebra. Hence, the theory of constructed structure is decidable.

Keywords: atomless boolean algebras, theory, finite subset, decidability.

Citation

Avkhimovich N.V., Dudakov S.M., "On decidability of finite subsets' theory for dense linear order", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 1, 24–35 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk656

References

[1] Avkhimovich N.V., "On the solvability of finite subset theory for dense linear order", *Aktualnye problemy prikladnoj matematiki, informatiki i mekhaniki: sbornik trudov Mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii [Actual problems of applied mathematics, computer science and Mechanics: proceedings of the International Scientific Conference]*, Voronezh, 2022, 1521–1525 (in Russian).

[2] Avkhimovich N.V., "On decidability of finite subsets' theory for discrete linear order", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, №3, 91–104 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk646.

[3] Dudakov S.M., "On Undecidability of Finite Subsets Theory for Torsion Abelian Groups", *Mathematics*, **10**:3 (2022), 533.

[4] Dudakov S., Karlov B., "On decidability of theories of regular languages", *Theory of Computing Systems*, **65** (2021), 462–478, http://doi.org/10.1007/s00224-020-09995-4.

[5] Rabin M.O., "Decidability of second-order theories and automata on infinite trees", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **74** (1968), 1025–1029.

[6] Dudakov S.M., *Osnovy teorii modelej [Fundamentals of model theory]*, Tver State University, Tver, 2013 (in Russian), 480 pp.

Author Info

1. **Avkhimovich Nicole Vadimovna**
   Master student of the Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics, Tver State University.

   Russia, 170100, Tver, Zhelyabova str., 33, TvSU.
   E-mail: nicoleavkhimovich@mail.ru

2. **Dudakov Sergey Mikhailovich**
   Dean of the Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics, Tver State University.

   Russia, 170100, Tver, 33, Zhelyabova str., TverSU.
   E-mail: sergeydudakov@yandex.ru