

## О ДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТАХ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Оникийчук В.Н.<sup>\*,\*\*</sup>, Оникийчук И.В.<sup>\*\*\*</sup>

\*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
Мытищинский филиал, г. Мытищи

\*\*Московский государственный областной технологический университет  
им. А.А. Леонова, г. Королев

\*\*\*АО «Технологическая Компания «Центр», г. Москва

---

*Поступила в редакцию 10.07.2022, после переработки 10.11.2022.*

---

Предлагается модель движения твердого вращающегося тела в центральном гравитационном поле, которая учитывает массово-геометрические характеристики тела и фактор вращения тела относительно собственного центра масс. Осью вращения тела (относительно центра масс) является линия, соединяющая центр масс тела и центр инерциальной системы координат (центр гравитационного поля). Расстояние от центра масс тела до начала инерциальной системы является постоянным в процессе движения. В этом случае математической моделью движения являются динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой (классический «случай Эйлера- Пуансо»), Уравнения Эйлера-Пуансо представлены в проекции на инерциальные оси, на нормальные оси, а также в классическом виде - в проекции на оси, связанные с телом. Установлено, что при «малой» угловой скорости вращения относительно центра масс движение тела с высокой степенью точности совпадает с классической моделью движения точечной массы в центральном поле. В случае «большой» угловой скорости собственного вращения наблюдаются качественно новые динамические эффекты в движении тела. Так, например, изменяется ориентация вектора кинетического момента в инерциальном пространстве с соответствующим разворотом плоскости орбиты. При этом траектория движения выходит из классической плоскости орбиты и способна переходить в «спираль» и даже приобретать форму «орбитальной воронки». Новые нелинейные эффекты существенно усиливаются с ростом величины начальной угловой скорости вращения тела относительно собственного центра масс.

**Ключевые слова:** центральное поле, гравитационное поле, закон Ньютона, уравнение Эйлера, случай Эйлера-Пуансо, интеграл энергии, вектор кинетического момента, орбитальная плоскость.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 1. С. 49–83.*  
<https://doi.org/10.26456/vtprm654>

## 1. Введение

В рамках классической механики существуют две основные модели движения твердого тела в центральном гравитационном поле.

### 1.1 Первая модель

Твердое тело заменяется массивной точкой, помещенной в центр масс тела. Фактор вращения тела относительно собственного центра масс не учитывается. Такую модель движения тела в инерциальном пространстве  $OXYZ$  принято представлять уравнением движения точечной массы:

$$m_0 \ddot{\mathbf{x}}_c = -m_0 \frac{\mu \mathbf{x}_c}{R^3}. \quad (1.1)$$

Здесь  $m_0$  – масса всего тела,  $\mathbf{x}_c$  – вектор-координата центра масс точечной массы в инерциальном пространстве  $OXYZ$ , которая помещена в центр гравитационного поля;  $R = |\mathbf{x}_c|$  – расстояние от центра масс тела до т.  $O$ ;  $\mu$  – постоянный гравитационный параметр. Такая модель предполагает абсолютную независимость движения точечной массы от вращения тела относительно собственного центра масс.

### 1.2 Вторая классическая модель

Действие центрального гравитационного поля на твердое тело определяется сложной функцией расстояний до каждой частицы протяженного тела (см., например, [1–3]). В такой модели все классические параметры орбиты тела подвержены возмущениям из-за неравномерности воздействия центрального поля на протяженное твердое тело. В итоге уравнения движения определяются движением точечной массы  $m_0$  с вектором  $\mathbf{x}_c$ , который определяет положение центра масс тела в инерциальном пространстве. Дополнительный вектор  $\mathbf{w}$ , как правило (см., например, [1–3]), определяет неравномерность воздействия гравитационного поля из-за геометрических размеров тела. Также вектор  $\mathbf{w}$  может учитывать и другие возмущения орбиты тела (влияние других планет Солнечной системы и самого Солнца). В этом случае уравнения движения точечной массы представляются с более сложной правой частью уравнения, чем в уравнении (1.1):

$$m_0 \ddot{\mathbf{x}}_c = -\frac{m_0 \mu \mathbf{x}_c}{R^3} + \mathbf{w}. \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{w}$  – вектор, уточняющий неравномерное силовое воздействие гравитационного поля с учетом геометрических характеристик тела и влияние других планет Солнечной системы. В этой модели на вектор  $\mathbf{w}$  накладывается естественное ограничение:

$$|\mathbf{w}| \ll \left| \frac{m_0 \mu \mathbf{x}_c}{R^3} \right|. \quad (1.3)$$

Ограничение (1.3) является естественным для такой модели, поскольку вклад нелинейности  $\mathbf{w}$  из-за геометрических характеристик тела, действительно, чрезвычайно мал.

Две модели (1.1) и (1.2) построены на классическом постулате, что вращение тела относительно собственного центра масс никак не влияет на динамику движения центра масс тела.

### 1.3 Новая модель

В настоящей работе предлагается новая модель движения твердого тела в центральном поле, которая учитывает массово-геометрические характеристики тела и фактор вращения тела относительно собственного центра масс. Математической моделью движения твердого тела в центральном поле являются классические уравнения Эйлера - Пуансо с нулевой правой частью [4]. Центр масс тела находится на постоянном расстоянии от центра гравитационного поля. Сферическое движение центра масс тела по сфере постоянного радиуса  $R$  определяется классическими углами Эйлера  $\{\vartheta, \psi\}$ . Кроме того, предполагается, что тело вращается относительно собственного центра масс вокруг оси симметрии тела на угол  $\varphi$ , которая совпадает с направлением действия линии действия центрального поля по направлению  $\overline{OC}$ , где т.  $C(x_c, y_c, z_c)$  определяет положение центра масс тела в инерциальном пространстве (Рис.1). Таким образом, тройка углов Эйлера  $\{\vartheta, \psi, \varphi\}$  определяет динамику движения центра масс тела с учетом вращения его относительно собственного центра масс.

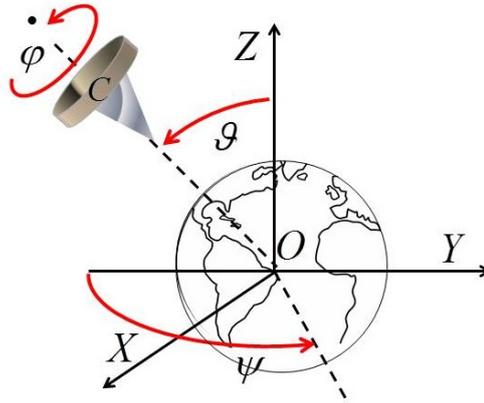
В уравнениях Эйлера существует нелинейная связь между угловой переносной скоростью движения центра масс тела и угловой скоростью вращения тела относительно собственного центра масс. Это обстоятельство приводит к тому, что фактор вращения тела относительно центра масс в динамике изменяет параметры траектории движения тела в инерциальном пространстве. Из-за присутствия таких нелинейностей наблюдается динамический эффект изменения траектории растет по мере роста угловой скорости вращения тела  $\dot{\varphi}$  (см. Раздел VIII).

Следует отметить, что при малых значениях  $\dot{\varphi}$  изменение в движении центра масс «пренебрежительно мало». И в этом смысле классическая модель замены твердого тела точечной массой себя вполне оправдывает. Вопрос лишь в критерии такой «малости» расхождения (см. Раздел VIII). Если же скорость вращения тела относительно центра масс «велика», то наблюдаются качественно новые динамические эффекты в движении тела в гравитационном поле, отсутствующие в моделях (1.1) и (1.2).

## 2. Постановка задачи и метод ее решения

Рассматривается задача движения твердого протяженного тела в центральном поле. Центр гравитационного поля неподвижен и располагается в начале инерциальной системы координат  $OXYZ$  (Рис. 1). Каждая частица твердого тела с массой  $m$  и с координатой  $\mathbf{x} \in OXYZ$  в инерциальном пространстве  $OXYZ$  подчиняется классическому уравнению:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{m\mu \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}, \quad (2.1)$$



**Рис. 1:** Движение центра масс вращающегося тела в центральном поле определяется углами Эйлера  $\vartheta, \psi$ , а вращение относительно центра масс параметром  $\varphi$

где

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in OXYZ. \quad (2.2)$$

Здесь  $\mu$  – гравитационный параметр, который пропорционален массе космического тела (планеты, спутника). Для тел лабораторных размеров с «усредненным радиусом» тела  $r_0$ , (например,  $r_0 \approx 6,3\text{м}$ ), закон движения (2.1) можно упростить. Например, в условиях Земли можно считать, что  $R = 6,371 \cdot 10^6\text{м}$ ,  $\mu = 3,984 \cdot 10^{14}\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$ ,  $\varepsilon = \frac{r_0}{R}$  малый параметр. В этом случае величину  $|\mathbf{x}|^3$  можно оценить так:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}|^3 &= (R + r_0)^3 = R^3 + 3R^2r_0 + 3Rr_0^2 + r_0^3 = \\ &= R^3 (1 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3) = R^3 (1 + \varepsilon)^3. \end{aligned} \quad (2.2a)$$

Поскольку в рамках принятой модели  $\varepsilon = \frac{r_0}{R} \approx 10^{-5}$  (в условиях Земли), то величинами  $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3$  можно пренебречь, т.е. можно принять, что  $|\mathbf{x}|^3 = R^3 (1 + \varepsilon)^3 \approx R^3$ . В этом случае уравнение движения (1.3) для произвольной частицы  $\mathbf{x}$  твердого тела можно представить так:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{m\mu\mathbf{x}}{R^3}, R = \text{const}. \quad (2.3)$$

Другими словами, в новой модели (2.3) вектор возмущения  $\mathbf{w}$  (1.2), определяющий неравномерность притяжения полем, отсутствует.

Несмотря на упрощенную модель (2.2a) действия гравитационного поля, система уравнений (2.3) способна учитывать влияние массово-геометрических характеристик тела на динамику движения его центра масс. Это влияние учитывается через тензор инерции тела. Такую возможность дает динамическое уравнение Эйлера. Кроме того, уравнение Эйлера позволяет оценить фактор вращения тела относительно собственного центра масс на динамику движения центра масс тела в центральном поле.

Процесс исследования поведения вращающихся тел в центральном поле предполагает несколько этапов в решении этой задачи:

1. Вывод основных алгебраических и кинематических соотношений, необходимых для вывода уравнений Эйлера (раздел IV-V);
2. Вывод уравнений движения тела в центральном поле (раздел VI)
3. Вывод первых интегралов движения (разделы V, VII);
4. Выявление принципиально новых динамических эффектов у вращающегося тела в гравитационном поле (раздел VIII);

### 3. О некоторых свойствах линейных операторов

Предлагаемая математическая модель движения тела предполагает некоторый объем операций, в которых используются ряд свойств линейных операторов. Это обстоятельство требует кратко остановиться на этих свойствах.

Известно, что для каждого из произвольных векторов  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$  существуют кососимметричные матрицы  $\hat{\mathbf{a}}$  и  $\hat{\mathbf{b}}$  (см., например, [4, 5]).

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Такое взаимно однозначное соответствие между кососимметричными матрицами  $\hat{\mathbf{a}}$  и  $\hat{\mathbf{b}}$  и векторами  $\mathbf{a} \in E_3$  и  $\mathbf{b} \in E_3$ , часто в литературе называют изоморфизмом. При этом векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и изоморфные им матрицы  $\hat{\mathbf{a}}$  и  $\hat{\mathbf{b}}$  обладают рядом свойств:

**Свойство 1.** Векторное произведение  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  векторов  $\mathbf{a} \in E_3$  и  $\mathbf{b} \in E_3$  можно определить как произведение соответствующих кососимметричных матриц  $\hat{\mathbf{a}}$  и  $\hat{\mathbf{b}}$  на векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Такое произведение  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  обладает свойством несимметричной перестановки множителей:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \equiv \hat{\mathbf{a}}\mathbf{b} \equiv -\hat{\mathbf{b}}\mathbf{a}. \quad (3.2)$$

**Свойство 2.** Векторное произведение  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  двух одинаковых (или коллинеарных) векторов равно нулю:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = \hat{\mathbf{a}}\mathbf{a} \equiv \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

**Свойство 3.** Для двух произвольных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  изоморфных им матриц  $\hat{\mathbf{a}}$  и  $\hat{\mathbf{b}}$  справедливо свойство [6 стр. 58, 448]:

$$\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}^2\hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}^2 + |\mathbf{a}|^2\hat{\mathbf{b}}. \quad (3.4)$$

**Свойство 4.** Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  преобразуются ортогональной матрицей  $\mathbf{G}$ , то скалярное произведение двух векторов  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ , имеет свойство:

$$\langle \mathbf{G}\mathbf{a}, \mathbf{G}\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle. \quad (3.5)$$

**Свойство 5.** Если один из векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  подвергается линейному преобразованию матрицей  $\mathbf{D}$ , то скалярное произведение  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  двух векторов преобразуется по формуле:

$$\langle \mathbf{D}\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{D}^T \mathbf{b} \rangle, \langle \mathbf{a}, \mathbf{D}\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{D}^T \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \quad (3.6)$$

где  $\mathbf{D}^T$  – транспонированная матрица  $\mathbf{D}$ . Если  $\mathbf{D}$  – матрица кососимметрична, т.е.,  $\mathbf{D}^T = -\mathbf{D}$ , то в этом случае:

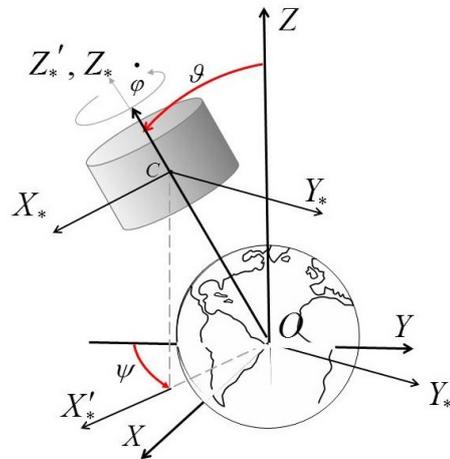
$$\langle \mathbf{D}\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{D}\mathbf{b} \rangle, \langle \mathbf{a}, \mathbf{D}\mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{D}\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle. \quad (3.7)$$

**Свойство 6.** Если два вектора  $\mathbf{a} \in E_3$  и  $\mathbf{b} \in E_3$  связаны между собой ортогональной матрицей  $\mathbf{G}$ , т.е.  $\mathbf{a} = \mathbf{G}\mathbf{b}$ , то соответствующие им кососимметричные матрицы  $\hat{\mathbf{a}}$  и  $\hat{\mathbf{b}}$  связаны матричным равенством [ 6 стр. 449 ]:

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{b}}\mathbf{D}^{-1}. \quad (3.8)$$

#### 4. Основные кинематические соотношения для динамики движения твердого тела в центральном поле

Для построения уравнений движения твердого тела в центральном поле недостаточно утверждать, что каждая частица с координатой  $\mathbf{x}$  должна подчиняться уравнению (2.3). Леонард Эйлер в свое время предложил математическую модель движения совокупности частиц, расстояния между которыми не изменяются при движении. Идея состоит в том, что с твердым телом необходимо жестко связать систему координат  $OX'_*Y'_*Z'_*$ . Центр этой системы  $OX'_*Y'_*Z'_*$  размещен в начале инерциальной системы  $OXYZ$ , т.е. в точке  $O$  (Рис. 2). В этом случае твердое те-



**Рис. 2:** Расположение связанных с телом систем координат  $OX'_*Y'_*Z'_*$  и  $CX_*Y_*Z'_*$  относительно инерциальной системы  $OXYZ$

ло имеет только одну неподвижную т.  $O$ . Вращение тела (координатной системы

$OX'_*Y'_*Z'_*$  в пространстве  $OXYZ$  Л. Эйлер предложил определять тремя углами  $\{\vartheta, \psi, \varphi\}$ . Изменение углов  $\{\vartheta, \psi, \varphi\}$  представляется ортогональными матрицами  $\mathbf{Q}_\vartheta, \mathbf{Q}_\psi, \mathbf{Q}_\varphi$ :

$$\mathbf{Q}_\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Условимся при этом, что ось  $OZ'_*$  системы  $OX'_*Y'_*Z'_*$  совпадает с осью  $\overline{OC}$  вращения тела относительно собственного центра масс. Рассмотрим еще одну систему координат  $CX_*Y_*Z_*$  которая также связана с твердым телом. Эта система  $CX_*Y_*Z_*$  расположена в центре масс тела – т.е. в точке  $C$ , а оси ее параллельны соответствующим координатным осям системы  $OX'_*Y'_*Z'_*$  (Рис.2). Одна и та же произвольная частица тела в системе  $OX'_*Y'_*Z'_*$  определяется вектором  $\mathbf{x}'_*$ , а в системе  $CX_*Y_*Z_*$  – вектором  $\mathbf{x}_*$ :

$$\mathbf{x}'_* = \begin{bmatrix} x'_* \\ y'_* \\ z'_* \end{bmatrix} \in OX'_*Y'_*Z'_*, \mathbf{x}_* = \begin{bmatrix} x_* \\ y_* \\ z_* \end{bmatrix} \in CX_*Y_*Z_*. \quad (4.2)$$

Для упрощения ситуации будем предполагать, что твердое тело является симметричным относительно оси вращения  $\overline{OC}$ . Для определенности условимся считать, что центр масс (т.  $C$ ) находится на оси  $\overline{OC}$  на постоянном расстоянии  $R = |\mathbf{x}_c| = const$  от начала инерциальной системы (Рис. 2). В этом случае векторы  $\mathbf{x}'_*$  и  $\mathbf{x}_*$  связаны между собой равенством:

$$\mathbf{x}'_* = \mathbf{R} + \mathbf{x}_* \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix}, \mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Ортогональная матрица  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\vartheta \mathbf{Q}_\varphi$  связывает две системы координат  $OXYZ$  и  $OX'_*Y'_*Z'_*$  [6, с. 129 ], [7, т.2, с.238], [8, т.2, с.138], [9, стр. 157 ], [10, стр. 51 ], [11, стр. 17 ], [12, с.42], [13, стр.8 ], [14, стр. 127 ], [15, стр.41 ]:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \cos\vartheta \sin\psi, & -\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \cos\vartheta \sin\psi, \\ \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\vartheta \cos\psi, & -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\vartheta \cos\psi, \\ \sin\vartheta \sin\varphi & \sin\vartheta \cos\varphi \\ & \sin\vartheta \sin\psi \\ & -\sin\vartheta \cos\psi \\ & \cos\vartheta \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Матрица  $\mathbf{Q}$  (4.4) является произведением матриц  $\mathbf{Q}_0$  и  $\mathbf{Q}_\varphi$ , т.е.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_\varphi, \quad (4.5)$$

где

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta \\ \sin \psi & \cos \psi \cos \vartheta & -\cos \psi \sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Одна и та же произвольная частица твердого тела определяется вектором  $\mathbf{x} \in OXYZ$  (2.2) и вектором  $\mathbf{x}'_* = OX'_*Y'_*Z'_*$  (4.2) одновременно:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}'_*, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_\varphi. \quad (4.7)$$

Равенство (4.3) позволяет представить вектор (4.7) несколько иначе:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}'_* = \mathbf{Q}(\mathbf{R} + \mathbf{x}_*). \quad (4.8)$$

По условию задачи твердое тело является симметричным относительно оси собственного вращения  $\overline{OC}$ . Это условие существенно упрощает решение задачи, поскольку позволяет в уравнениях движения исключить угол поворота  $\varphi$ . Для этого необходимо ввести еще одну систему координат  $C\xi\eta\nu$ . Координатная система  $C\xi\eta\nu$  расположена в центре масс движущегося тела (точка  $C$ ). Ось  $C\nu$  направлена вдоль оси  $\overline{OC}$ , т.е. вдоль оси  $CZ_*$ , а плоскость  $C\xi\eta$  является касательной плоскостью к сфере радиуса  $R$  (Рис. 3).

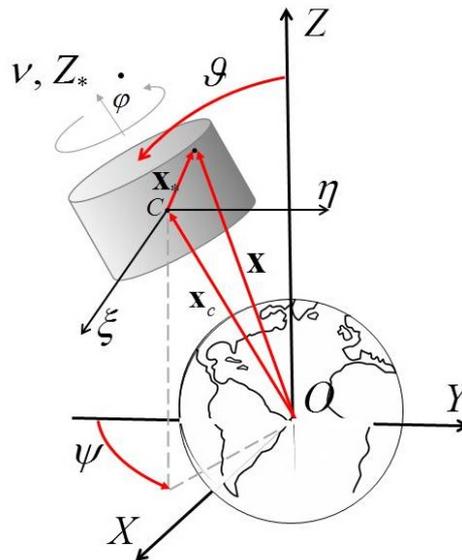


Рис. 3: При движении в гравитационном поле плоскость местного горизонта лежит на осях  $C\xi\eta$

В этом случае угол  $\varphi$  моделирует поворот связанной системы  $CX_*Y_*Z_*$  относительно системы  $C\xi\eta\nu$ . Этот поворот происходит относительно их общей оси  $C\nu$ , совпадающей в этом случае с осью  $CZ_*$ . Плоскость  $C\xi\eta$  является в этом случае «плоскостью местного горизонта». Таковую систему координат  $C\xi\eta\nu$  часто называют

«нормальной». Ось  $C\xi$  направлена по касательной к сфере вдоль «географического меридиана», т.е. в плоскости которого изменяется угол  $\vartheta$ . Ось  $C\eta$  направлена по бинормали, касаясь «географической параллели», является в этом случае «плоскостью местного горизонта». Одна и та же произвольная частица тела в трех системах координат определяется тремя векторами:  $\mathbf{x} \in OXYZ$ ,  $\mathbf{x}'_* \in OX'_*Y'_*Z'_*$ , а в системе  $C\xi\eta\nu$  положение этой же частицы определяется вектором  $\boldsymbol{\xi} \in C\xi\eta\nu$ :

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \nu \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{x}_*. \quad (4.9)$$

В этой модели матрица  $\mathbf{Q}_0$  (4.6) однозначно определяет положение центра масс  $\mathbf{x}_c$  тела в инерциальной системе  $OXYZ$ . В системе координат  $OX'_*Y'_*Z'_*$  положение центра масс  $\mathbf{x}_c$  определяется вектором  $\mathbf{x}'_* = \mathbf{R}$ . Подставив эту координату  $\mathbf{x}'_* = \mathbf{R}$  в равенство (4.7), получаем, поскольку  $\mathbf{Q}_\varphi \mathbf{R} = \mathbf{R}$

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}. \quad (4.10)$$

Таким образом, вектор  $\mathbf{x}$  (4.7) произвольной частицы тела можно представить так:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}(\mathbf{R} + \mathbf{x}_*) = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{R} + \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{x}_* = \mathbf{Q}_0(\mathbf{R} + \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}_c + \mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\xi}. \quad (4.11)$$

Дифференцируем вектор  $\boldsymbol{\xi}$  (4.9), учитывая, что вектор  $\mathbf{x}_*$  является постоянным, получаем:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\mathbf{Q}}_\varphi \mathbf{x}_* = \mathbf{Q}_\varphi \left( \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_\varphi \mathbf{x}_* \right) = \mathbf{Q}_\varphi \hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{x}_* = \mathbf{Q}_\varphi \hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{x}_* = \hat{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi}]. \quad (4.12)$$

**Примечание.** В равенстве (4.12) было использовано свойство:

$$\mathbf{Q}_\varphi \hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{Q}_\varphi^{-1} = \hat{\boldsymbol{\omega}}. \quad (4.13)$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  (4.14) – вектор угловой скорости вращения тела относительно собственного центра масс. Вектор  $\boldsymbol{\omega}$  направлен вдоль осей  $C\nu$  и  $CZ_*$ , которые совпадают между собой, а  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  – кососимметричный оператор, изоморфный этому вектору  $\boldsymbol{\omega}$ .

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_\varphi = \dot{\mathbf{Q}}_\varphi \mathbf{Q}_\varphi^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi} & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Далее дифференцируем вектор  $\mathbf{x}_c$  (4.10) положения центра масс тела

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \dot{\mathbf{Q}}_0 \mathbf{R} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_0^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_0 \mathbf{R} = \mathbf{Q}_0 \hat{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{R}. \quad (4.15)$$

Здесь  $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$  – кососимметричный оператор, соответствующий вектору переносной угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}$ :

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{Q}_0^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

**Примечание:** В преобразованиях (4.15) выполнено условие постановки задачи – постоянство вектора  $\mathbf{R}$ . Далее дифференцируем вектор  $\mathbf{x}$  (4.7), учитывая, что вектор  $\mathbf{x}'_*$  является постоянным, получаем:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_c + \dot{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\xi} + \mathbf{Q}_0 \dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\mathbf{x}}_c + \dot{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\xi} + \mathbf{Q}_0 \dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{Q}_0 \left( \mathbf{Q}_0^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_0 + \hat{\boldsymbol{\omega}} \right) \boldsymbol{\xi} = \dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{Q}_0 \hat{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\xi}. \quad (4.17)$$

Здесь  $\boldsymbol{\sigma}$  – суммарный вектор переносной угловой скорости тела в проекции на нормальные оси  $C\xi\eta\nu$ , а  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  – кососимметричный оператор, изоморфный вектору  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\Omega}} + \hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -(\Omega_3 + \dot{\varphi}) & \Omega_2 \\ (\Omega_3 + \dot{\varphi}) & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 + \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Для последующих операций необходима еще одна форма представления вектора  $\dot{\mathbf{x}}$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{x}'_* = \mathbf{Q} \left( \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{x}'_* \right) = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{p}} \mathbf{x}'_*. \quad (4.19)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{p}}$  – кососимметричный оператор классического вектора  $\mathbf{p}$  угловой скорости в проекции на связанные с телом оси  $OX'_*Y'_*Z'_*$ .

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \varphi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

**Примечание:** Доказательство свойства  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{Q}}$  представлено в **Приложении, (Раздел IX)**.

Из свойства  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_\varphi$  (4.7) следует, что  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \mathbf{Q}_0^{-1}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} &= \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \mathbf{Q}_0^{-1} \left( \dot{\mathbf{Q}}_0 \mathbf{Q}_\varphi + \mathbf{Q}_0 \dot{\mathbf{Q}}_\varphi \right) = \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \left( \mathbf{Q}_0^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_0 \mathbf{Q}_\varphi + \mathbf{Q}_0^{-1} \mathbf{Q}_0 \dot{\mathbf{Q}}_\varphi \right) = \\ &= \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \left( \mathbf{Q}_0^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_0 \mathbf{Q}_\varphi + \dot{\mathbf{Q}}_\varphi \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \mathbf{Q}_\varphi \right) = \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \left( \mathbf{Q}_0^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_0 + \dot{\mathbf{Q}}_\varphi \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \right) \mathbf{Q}_\varphi = \\ &= \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \left( \hat{\boldsymbol{\Omega}} + \hat{\boldsymbol{\omega}} \right) \mathbf{Q}_\varphi = \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{Q}_\varphi. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Из определения оператора  $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{Q}}_\varphi \mathbf{Q}_\varphi^{-1}$  (4.14) и оператора  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  (4.18) следует, что

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \left( \mathbf{Q}_0^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_0 + \dot{\mathbf{Q}}_\varphi \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \right) \mathbf{Q}_\varphi = \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \left( \mathbf{Q}_0^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_0 + \mathbf{Q}_\varphi \hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \right) \mathbf{Q}_\varphi = \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{Q}_\varphi. \quad (4.22)$$

Вектор  $\boldsymbol{\sigma}$  и вектор  $\mathbf{p}$ , а также соответствующие им операторы  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  и  $\hat{\mathbf{p}}$  связаны между собой равенствами (см. свойство (3.8)):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{p}, \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q}_\varphi \hat{\mathbf{p}} \mathbf{Q}_\varphi^{-1}. \quad (4.23)$$

Верно и обратно:

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{Q}_\varphi. \quad (4.24)$$

Заметим, что выражения для  $\dot{\mathbf{x}}$  (4.19) и  $\dot{\mathbf{x}}$  (4.17) эквивалентны. Чтобы в этом убедиться, необходимо преобразовать правую часть равенства (4.19):

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{p}} \mathbf{x}'_* &= \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_\varphi \hat{\mathbf{p}} \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{x}'_* = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_\varphi \hat{\mathbf{p}} \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \mathbf{Q}_\varphi (\mathbf{R} + \mathbf{x}_*) = \\ &= \mathbf{Q}_0 \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{Q}_\varphi (\mathbf{R} + \mathbf{x}_*) = \mathbf{Q}_0 \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{R} + \mathbf{Q}_0 \hat{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{Q}_0 (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{R} + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\xi}) = \\ &= \mathbf{Q}_0 (\hat{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{R} + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\xi}) = \dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{Q}_0 \hat{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Как видим, правые части равенств (4.11) и (4.25) тождественны.

**Примечание.** В операциях (4.25) были использованы свойства  $\mathbf{Q}_\varphi \mathbf{R} = \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{x}'_* = \mathbf{R} + \mathbf{x}_*$  (4.3),  $\hat{\sigma} \mathbf{R} = \hat{\Omega} \mathbf{R}$ , поскольку  $\hat{\omega} \mathbf{R} = 0$ . Также были использованы свойства  $\xi = \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{x}_*$  (4.9) и  $\mathbf{Q}_\varphi \hat{\rho} \mathbf{Q}_\varphi^{-1} = \hat{\sigma}$  (4.21).

Далее, еще раз дифференцируем вектор  $\dot{\mathbf{x}}$  (4.11) и получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \ddot{\mathbf{x}}_c + \dot{\mathbf{Q}}_0 \hat{\sigma} \xi + \mathbf{Q}_0 \dot{\hat{\sigma}} \xi + \mathbf{Q}_0 \hat{\sigma} \dot{\xi} = \ddot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{Q}_0 \left( \mathbf{Q}_0^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_0 \hat{\sigma} + \dot{\hat{\sigma}} + \hat{\sigma} \hat{\omega} \right) \xi = \\ &= \ddot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{Q}_0 \left( \hat{\Omega} \hat{\sigma} + \dot{\hat{\sigma}} + \hat{\sigma} \hat{\omega} \right) \xi. \end{aligned} \quad (4.26)$$

В свою очередь, дифференцируя вектор  $\dot{\mathbf{x}}_c$  (4.15):

$$\ddot{\mathbf{x}}_c = \dot{\mathbf{Q}}_0 \hat{\Omega} \mathbf{R} + \mathbf{Q}_0 \dot{\hat{\Omega}} \mathbf{R} = \mathbf{Q}_0 \left( \mathbf{Q}_0^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_0 \hat{\Omega} + \dot{\hat{\Omega}} \right) \mathbf{R} = \mathbf{Q}_0 \left( \hat{\Omega}^2 + \dot{\hat{\Omega}} \right) \mathbf{R}. \quad (4.27)$$

В преобразовании (4.27) было использовано свойство  $\hat{\Omega} = \mathbf{Q}_0^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_0$  (4.16).

## 5. Вектор кинетического момента для вращающегося твердого тела

**Определение 1.** Кинетическим моментом твердого тела относительно инерциальных осей  $OXYZ$  и в проекции на эти оси является вектор  $\mathbf{K}_0$ :

$$\mathbf{K}_0 = \int_V m [\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}] dv \equiv \int_V m \hat{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} dv, \quad (5.1)$$

*Замечание 1.* Знак интеграла является интегральным суммированием вектора  $m \hat{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}$  по всему объему  $V$  тела. В дальнейшем по всему тексту знак объемного интеграла означает операцию интегрального суммирования по всем частицам твердого тела.

Здесь матрица  $\hat{\mathbf{x}}$  изоморфна вектору  $\mathbf{x}$  (4.7). Из свойства (3.8) следует, что вектору  $\mathbf{x}$  (4.7) соответствует кососимметричная матрица  $\hat{\mathbf{x}}$ :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}'_* \mathbf{Q}^{-1}. \quad (5.2)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{x}}'_*$  кососимметричная постоянная матрица, изоморфная вектору  $\mathbf{x}'$  (4.2):

$$\hat{\mathbf{x}}'_* = \hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{x}}_* = \begin{bmatrix} 0 & -z'_* & y'_* \\ z'_* & 0 & -x'_* \\ -y'_* & x'_* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(R + z_*) & y_* \\ R + z_* & 0 & -x_* \\ -y_* & x_* & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

В этом случае вектор  $\mathbf{K}_0$  (5.1) можно представить так:

$$\mathbf{K}_0 = \int_V m \hat{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} dv = \mathbf{Q} \int_V m \hat{\mathbf{x}}'_* \dot{\mathbf{x}}'_* dv = -\mathbf{Q} \int_V m (\hat{\mathbf{x}}'_*)^2 dv \mathbf{p} = \mathbf{Q} \mathbf{J} \mathbf{p}. \quad (5.4)$$

В преобразованиях (5.4) было использовано свойство (3.2) несимметричной перестановки линейных операторов  $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{x}'_* = -\hat{\mathbf{x}}'_*\mathbf{p}$ . Символом  $\mathbf{J}$  обозначен тензор инерции тела относительно координатной системы  $OX'_*Y'_*Z'_*$ .

$$\mathbf{J} = - \int_V m (\hat{\mathbf{x}}'_*)^2 dv = - \int_V m (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{x}}_*)^2 dv = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C_* \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

В матрице  $\mathbf{J}$  (5.5) величины  $A$  и  $C_*$  являются главными моментами инерции тела:

$$A = \int_V m (x_*'^2 + z_*'^2) dv = \int_V m (y_*'^2 + z_*'^2) dv, C_* = \int_V m (x_*'^2 + y_*'^2) dv. \quad (5.6)$$

Из-за симметрии тела относительно оси вращения справедливо свойство инвариантности тензора  $\mathbf{J}$  относительно угла поворота  $\varphi$ :

$$\mathbf{Q}_\varphi \mathbf{J} \mathbf{Q}_\varphi^{-1} = \mathbf{J}. \quad (5.7)$$

Свойство (5.7) позволяет представить вектор  $\mathbf{K}_0$  (5.4) в другом виде:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q} \mathbf{J} \mathbf{p} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{J} \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{p} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{J} \sigma. \quad (5.8)$$

Здесь было использовано свойство (4.23) о разложении тензора инерции. Вектору  $\mathbf{x}_* + \mathbf{R}$  (4.3) соответствует кососимметричная матрица  $\hat{\mathbf{x}}_* + \hat{\mathbf{R}}$ , где

$$\hat{\mathbf{x}}_* = \begin{bmatrix} 0 & -z_* & y_* \\ z_* & 0 & -x_* \\ -y_* & x_* & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 \\ R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

В этом случае тензор инерции  $\mathbf{J}$  (5.5) можно представить так:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= - \int_V m (\hat{\mathbf{x}}_* + \hat{\mathbf{R}})^2 dv = \\ &= - \int_V m (\hat{\mathbf{x}}_*)^2 dv - \int_V m \hat{\mathbf{R}}^2 dv - \int_V m (\hat{\mathbf{x}}_* \hat{\mathbf{R}}) dv - \int_V m (\hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{x}}_*) dv. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Заметим, что  $\int_V m (\hat{\mathbf{x}}_* \hat{\mathbf{R}}) dv = \int_V m (\hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{x}}_*) dv = 0$  (по определению центра масс) и поэтому тензор  $\mathbf{J}$  (5.10) можно представить так:

$$\mathbf{J} = - \int_V m (\hat{\mathbf{x}}_*)^2 dv - \int_V m \hat{\mathbf{R}}^2 dv = \mathbf{J}_\mathbf{R} + \mathbf{J}_*, \quad (5.11)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\mathbf{R} &= - \int_V m \hat{\mathbf{R}}^2 dv = m_0 \begin{bmatrix} 0 & -R^2 & 0 \\ R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_* &= - \int_V m (\hat{\mathbf{x}}_*)^2 dv = \begin{bmatrix} A_* & 0 & 0 \\ 0 & A_* & 0 \\ 0 & 0 & C_* \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Здесь  $m_0$  – масса всего тела. Таким образом, моменты инерции  $A$  и  $C_*$  (5.6) можно представить так:

$$\begin{aligned} A &= m_0 R^2 + A_*, \\ A_* &= \int_V m (x_*^2 + z_*^2) dv = \int_V m (y_*^2 + z_*^2) dv, \\ C_* &= \int_V m (x_*^2 + y_*^2) dv. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Поскольку  $\xi = \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{x}_*$  (4.9), то в соответствии со свойством (3.8) следует, что

$$\hat{\xi} = \mathbf{Q}_\varphi \hat{\mathbf{x}}_* \mathbf{Q}_\varphi^{-1}, \quad \hat{\xi}^2 = \mathbf{Q}_\varphi (\hat{\mathbf{x}}_*)^2 \mathbf{Q}_\varphi^{-1}. \quad (5.14)$$

Далее суммируем матрицу  $\hat{\xi}^2$  по всему объему тела и получаем тензор  $\mathbf{J}_\xi$  инерции тела в проекции на нормальные оси  $C\xi\eta\nu$ . При этом этот тензор  $\mathbf{J}_\xi$  совпадает с постоянным тензором  $\mathbf{J}_*$ :

$$\mathbf{J}_\xi = - \int_V m \hat{\xi}^2 dv = - \mathbf{Q}_\varphi \int_V m (\hat{\mathbf{x}}_*)^2 dv \mathbf{Q}_\varphi^{-1} = \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{J}_* \mathbf{Q}_\varphi^{-1} = \mathbf{J}_*. \quad (5.15)$$

Из равенства  $\mathbf{x}_c = \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}$  (4.10) и согласно свойству (3.8) следует, что вектору положения центра масс  $\mathbf{x}_c \in OXYZ$  соответствует кососимметричная матрица  $\hat{\mathbf{x}}_c$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_c = \mathbf{Q}_0 \hat{\mathbf{R}} \mathbf{Q}_0^{-1}. \quad (5.16)$$

Таким образом, тензор инерции  $\mathbf{J}_c$  центра масс относительно инерциальных осей определяется по формуле:

$$\mathbf{J}_c = - \int_V m (\hat{\mathbf{x}}_c)^2 dv = \mathbf{Q}_0 \mathbf{J}_R \mathbf{Q}_0^{-1}. \quad (5.17)$$

Представление тензора инерции (5.11) позволяет разложить вектор  $\mathbf{K}_0$  (5.8):

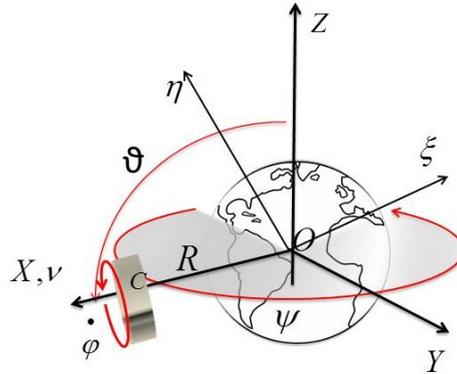
$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \mathbf{Q}_0 \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}_0 (\mathbf{J}_R + \mathbf{J}_*) \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}_0 (\mathbf{J}_R \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{J}_* \boldsymbol{\sigma}) = \\ &= \mathbf{Q}_0 (\mathbf{J}_R \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{J}_* \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_\omega. \end{aligned} \quad (5.18)$$

В цепочке равенств (5.18) было использовано то обстоятельство, что  $\mathbf{J}_R \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  и поэтому  $\mathbf{J}_R \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}_R \boldsymbol{\Omega}$ . Здесь  $\mathbf{K}_c$  – классический вектор кинетического момента точечной массы  $m_0$ , размещенной в центре масс тела. Вектор  $\mathbf{K}_\omega$  – это дополнительное слагаемое в общем векторе  $\mathbf{K}_0$  (5.8) кинетического момента, который позволяет определить влияние угловой скорости вращения тела относительно центра масс на величину суммарного кинетического момента  $\mathbf{K}_0$ . Такое разложение (5.18) позволяет определиться с критерием, когда протяженное тело допустимо заменять точечной массой, а когда это делать нежелательно.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_c &= \mathbf{Q}_0 \mathbf{J}_R \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} -m_0 R^2 \dot{\psi} \sin \vartheta \\ m_0 R^2 \dot{\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_\omega &= \mathbf{Q}_0 \mathbf{J}_* \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} A_* \dot{\vartheta} \\ A_* \dot{\psi} \sin \vartheta \\ C_* (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Теперь оценим величины  $\mathbf{K}_c$  и  $\mathbf{K}_\omega$  на конкретном примере.

*Пример 1.* Рассматривается задача движения диска по круговой орбите на высоте 200 км над Землей. Диск расположен в плоскости местного горизонта, т.е. в плоскости  $C\xi\eta$  (Рис. 4).



**Рис. 4:** К задаче о движении вращающегося диска в центральном поле. Первоначальная орбита движения диска находится в экваториальной плоскости

Диск сделан из металла плотностью  $7800 \text{ кг/м}^3$ . Радиус диска  $R = 1 \text{ м}$ , высота диска  $h = 0.1 \text{ м}$ . При этих параметрах

$$R \approx 6571 \cdot 10^3 \text{ м}; \quad \mu = 3.98 \cdot 10^{14} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2};$$

$$m_0 = 2450 \text{ кг}; \quad A_* = 637 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad C_* = 1225 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (5.20)$$

В этих условиях линейная скорость полета диска определяется условием движения по круговой орбите:

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{R}} = R |\Omega| \approx 7780.45 \text{ м/с}, \quad (5.21)$$

где  $|\Omega|$  – усредненная угловая переносная скорость движения центра масс тела:

$$|\Omega| = \sqrt{\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta} \approx 1.184 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}. \quad (5.22)$$

Предположим, что собственная угловая скорость вращения  $\dot{\varphi}$  является незначительной, т.е.  $|\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}| \approx |\Omega| + |\omega|$ , при этом  $|\omega| \approx |\Omega|$ . В этом случае

$$\begin{aligned} |\mathbf{K}_\omega| &= A_* |\Omega| \sqrt{1 + \frac{C_*^2}{A_*^2 |\Omega|^2} (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi})^2} \approx \\ &\approx A_* |\Omega| \sqrt{1 + \frac{C_*^2}{A_*^2}} \approx A_* (|\Omega| + |\omega|). \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$|\mathbf{K}_c| = m_0 R^2 |\boldsymbol{\Omega}| \approx 1.06 \cdot 10^{17} |\boldsymbol{\Omega}|. \quad (5.24)$$

$$\frac{|\mathbf{K}_\omega|}{|\mathbf{K}_c|} \approx \frac{A_* (|\boldsymbol{\Omega}| + |\boldsymbol{\omega}|)}{m_0 R^2 |\boldsymbol{\Omega}|} = \frac{A_*}{m_0 R^2} \left( 1 + \frac{|\boldsymbol{\omega}|}{|\boldsymbol{\Omega}|} \right) \approx 1.3 \cdot 10^{-14}. \quad (5.25)$$

**Вывод:** Влияние собственного вращения тела на динамику движения центра масс является пренебрежимо малым значением, т.е. порядка  $10^{-14}$ . В этом случае классический принцип замены твердого тела точечной массой вполне себя оправдывает.

*Примечание 1.* Оценка (5.25) справедлива лишь в предположении, что угловая скорость вращения тела относительно центра масс является незначительной, т.е. когда  $|\boldsymbol{\omega}| \approx |\boldsymbol{\Omega}|$ . Однако, значение  $\boldsymbol{\omega}$  теоретически может быть сколь угодно большим за счет начальной скорости вращения  $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ . Если дискретную последовательность значений  $\omega_0$  увеличивать «до бесконечности», то величина  $\mathbf{K}_\omega$  (5.23) при всех этих значениях будет расти неограниченно. Как изменяется в этом случае вектор  $\mathbf{K}_0$  – вопрос требует дальнейшего исследования. Как будут изменяться все динамические параметры полёта при теоретически неограниченных значениях начальной угловой скорости вращения  $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ ? На этот вопрос можно будет ответить, если вывести уравнения движения тела.

## 6. Динамические уравнения Эйлера как модель движения центра масс тела в центральном поле

В данном разделе предлагается два разных способа вывода динамических уравнений Эйлера. Первый способ основан на дифференцировании вектора кинетического момента  $\mathbf{K}_0$ . Второй способ вывода уравнения построен на непосредственном вычислении векторного произведения  $m[\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}]$  для произвольной частицы тела с последующим суммированием его по всем частицам твердого тела.

### 6.1 Динамические уравнения Эйлера. Первый способ вывода

Давайте составим вектор  $m[\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}]$  для произвольной частицы  $\mathbf{x}$  и затем это выражение просуммируем по всему объему твердого тела  $V$ .

$$\int_V m[\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}] dv = -\frac{\mu}{R^3} \int_V m[\mathbf{x}, \mathbf{x}] dv = 0. \quad (6.1)$$

Здесь вместо вектора  $\ddot{\mathbf{x}}$  была подставлена правая часть уравнения движения в центральном поле (2.3):

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \int_V m[\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}] dv = \mathbf{0}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

где  $\mathbf{C}$  – постоянный вектор, а  $C_1, C_2, C_3$  – произвольные числа. Из равенства (6.2) следует, что для вращающегося твердого тела в центральном поле справедливо утверждение о постоянстве вектора  $\mathbf{K}_0$  в инерциальном пространстве  $OXYZ$  [4]:

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{J}\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{J}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{Q} \left( \mathbf{Q}^{-1}\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{J}\mathbf{p} + \mathbf{J}\dot{\mathbf{p}} \right) = \mathbf{Q} (\mathbf{J}\dot{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}\mathbf{p}) = \mathbf{0}. \quad (6.4)$$

Матричный множитель  $\mathbf{Q}$  можно сократить в равенстве (6.4) и в итоге получаем классический случай Эйлера-Пуансо в проекции на связанные с телом оси  $OX_*'Y_*'Z_*'$  (см., например, [6], [7, т.2, стр.281], [16, стр. 35-36, 114], [17, стр. 35]):

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}\mathbf{p} = \begin{cases} A\dot{p} + (C_* - A)qr = 0, \\ B\dot{q} + (A - C_*)pr = 0, \\ C_*\dot{r} = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Поскольку тело симметрично относительно оси вращения  $\overline{OC}$ , то координата  $\varphi(t)$  в уравнениях (6.5) является циклической. Следовательно, от параметра  $\varphi(t)$  можно избавиться в уравнениях Эйлера. Для этого необходимо уравнение (6.4) спроектировать на нормальные оси  $C\xi\eta\nu$ . Проекция осуществляется умножением слева матрицы  $\mathbf{Q}_\varphi$  на уравнение (6.5). Поскольку  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_\varphi$  (4.5), то правую часть равенства (6.4) можно переписать так:  $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_\varphi(\mathbf{J}\dot{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ . В этом случае выражение  $\mathbf{Q}_\varphi(\mathbf{J}\dot{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  является проекцией уравнений Эйлера (6.5) на нормальные оси  $C\xi\eta\nu$ .

$$\mathbf{Q}_\varphi(\mathbf{J}\dot{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}\mathbf{p}) = \mathbf{Q}_\varphi\mathbf{J}\mathbf{Q}_\varphi^{-1}\mathbf{Q}_\varphi\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{Q}_\varphi\hat{\mathbf{p}}\mathbf{Q}_\varphi^{-1}\mathbf{Q}_\varphi\mathbf{J}\mathbf{Q}_\varphi^{-1}\mathbf{Q}_\varphi\mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (6.6)$$

Равенства (5.7), (4.23) позволяют существенно упростить уравнение Эйлера (6.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\varphi(\mathbf{J}\dot{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}\mathbf{p}) &= (\mathbf{J}\mathbf{Q}_\varphi\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{Q}_\varphi\hat{\mathbf{p}}\mathbf{Q}_\varphi^{-1}\mathbf{Q}_\varphi\mathbf{J}\mathbf{Q}_\varphi^{-1}\mathbf{Q}_\varphi\mathbf{p}) = \\ &= \left( \mathbf{J}\mathbf{Q}_\varphi\dot{\mathbf{p}} + (\hat{\mathbf{\Omega}} + \hat{\omega})\mathbf{J}(\mathbf{\Omega} + \omega) \right) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

В Приложении (Раздел IX, Лемма 2) доказано, что

$$\mathbf{Q}_\varphi\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{\Omega}} + \hat{\omega} - \hat{\omega}\mathbf{\Omega}. \quad (6.8)$$

В этом случае уравнение Эйлера (6.7) можно представить так:

$$\mathbf{Q}_\varphi(\mathbf{J}\dot{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\mathbf{J}\mathbf{p}) = \mathbf{J}(\dot{\mathbf{\Omega}} + \hat{\omega}) - \mathbf{J}\hat{\omega}\mathbf{\Omega} + (\hat{\mathbf{\Omega}} + \hat{\omega})\mathbf{J}(\mathbf{\Omega} + \omega) = \mathbf{0}. \quad (6.9)$$

Выполнив необходимые векторно-матричные умножения, получаем три скалярных уравнения Эйлера в проекции на нормальные оси  $C\xi\eta\nu$ :

$$\left. \begin{aligned} A\dot{\Omega}_1 - (A - C_*)\Omega_2\Omega_3 + C_*\Omega_2\dot{\varphi} &= 0, & (a) \\ A\dot{\Omega}_2 + (A - C_*)\Omega_1\Omega_3 - C_*\Omega_1\dot{\varphi} &= 0, & (b) \\ C_*(\Omega_3 + \dot{\varphi}) &= h_c = const. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Такой вид уравнений Эйлера известен (см., например, [17, с.52, 55]). Далее представим уравнения (6.10) в угловых параметрах Эйлера  $\{\vartheta, \psi, \varphi\}$ :

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{\vartheta} - A\dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + C_*\dot{\psi} \sin \vartheta (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) &= 0, & (a) \\ A\ddot{\psi} \sin \vartheta + 2A\dot{\psi}\dot{\vartheta} \cos \vartheta - C_*\dot{\vartheta} (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) &= 0, & (b) \\ C_* (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) &= h_c = const. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Параметры  $\{\vartheta, \psi\}$  однозначно определяют положение центра масс  $\mathbf{x}_c = \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}$  (4.10) в инерциальном пространстве  $OXYZ$ . Поэтому необходимо выделить в уравнениях (6.11) слагаемые, которые относятся только к динамике движения центра масс тела. Для этого воспользуемся разложением компонент тензора инерции (5.13). Подставляем моменты инерции (5.13) в уравнения (6.11) и в итоге получаем уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta} - \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + f_\vartheta = 0, \\ \ddot{\psi} \sin \vartheta + 2\dot{\vartheta} \dot{\psi} \cos \vartheta + f_\psi = 0, \\ C_* (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) = h_c. \end{cases} \quad (6.12)$$

Здесь  $f_\vartheta, f_\psi$  нелинейности, связывающие динамику движения центра масс и вращение тела относительно собственного центра масс:

$$f_\vartheta = \frac{h_c \dot{\psi} \sin \vartheta}{m_0 R^2 + A_*}, f_\psi = -\frac{h_c \dot{\vartheta}}{m_0 R^2 + A_*}. \quad (6.13)$$

Уравнения (6.12) представляют собой уравнения движения центра масс тела с дополнительными нелинейностями  $f_\vartheta, f_\psi$  (6.13).

### 6.2 Уравнения Эйлера. Второй способ вывода

Давайте вычислим вектор  $m[\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}] \equiv m \hat{\mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}}$  и затем просуммируем его по всему объему тела. Для этого воспользуемся разложением вектора  $\ddot{\mathbf{x}}$  (4.26):

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{Q}_0 \left( \hat{\Omega} \hat{\sigma} + \hat{\sigma} + \hat{\sigma} \hat{\omega} \right) \xi. \quad (6.14)$$

Вектору  $\mathbf{x}$  (4.11) изоморфна матрица  $\hat{\mathbf{x}}$ :

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_c + \mathbf{Q}_0 \hat{\xi} \mathbf{Q}_0^{-1}. \quad (6.15)$$

Умножив матрицу  $\hat{\mathbf{x}}$  (6.15) на вектор  $\ddot{\mathbf{x}}$  (6.13), получаем:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{x}}_c \ddot{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_c \mathbf{Q}_0 \left( \hat{\Omega} \hat{\xi} \hat{\sigma} + \hat{\xi} \hat{\sigma} + \hat{\sigma} \hat{\xi} \omega \right) + \\ &+ \mathbf{Q}_0 \hat{\xi} \mathbf{Q}_0^{-1} \ddot{\mathbf{x}}_c - \mathbf{Q}_0 \hat{\xi} \left( \hat{\Omega} \hat{\xi} \hat{\sigma} + \hat{\xi} \hat{\sigma} + \hat{\sigma} \hat{\xi} \omega \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Далее, по порядку вычислим каждое из слагаемых в правой части (6.16). Равенство (4.27) можно для удобства операций представить так:

$$\ddot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{Q}_0 \left( \hat{\Omega}^2 + \hat{\Omega} \right) \mathbf{R} = -\mathbf{Q}_0 \left( \hat{\Omega} \hat{\mathbf{R}} \Omega + \hat{\mathbf{R}} \hat{\Omega} \right). \quad (6.17)$$

Здесь было использованы свойства (3.2)  $\hat{\Omega} \mathbf{R} = -\hat{\mathbf{R}} \Omega$  и  $\hat{\mathbf{x}}_c$  (5.16). Таким образом:

$$\hat{\mathbf{x}}_c \ddot{\mathbf{x}}_c = -\mathbf{Q}_0 \hat{\mathbf{R}} \left( \hat{\Omega} \hat{\mathbf{R}} \Omega + \hat{\mathbf{R}} \hat{\Omega} \right) = -\mathbf{Q}_0 \left( \hat{\mathbf{R}} \hat{\Omega} \hat{\mathbf{R}} \Omega + \hat{\mathbf{R}}^2 \hat{\Omega} \right). \quad (6.18)$$

Для ускорения проведения следующих операций необходимо использовать еще одно свойство кососимметричных матриц (3.4). В этом случае вектор  $\hat{\mathbf{R}} \hat{\Omega} \hat{\mathbf{R}} \Omega$  преобразуется так:

$$\hat{\mathbf{R}} \hat{\Omega} \hat{\mathbf{R}} \Omega = \left( \hat{\mathbf{R}}^2 \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \hat{\mathbf{R}}^2 + |\mathbf{R}|^2 \hat{\Omega} \right) \Omega = \hat{\Omega} \hat{\mathbf{R}}^2 \Omega. \quad (6.19)$$

Теперь уже можно умножить равенство (6.18) на массу всего тела  $m_0 = \int_V m dv$

$$m_0 \hat{\mathbf{x}}_c \ddot{\mathbf{x}}_c = -\mathbf{Q}_0 m_0 \left( \hat{\mathbf{R}} \hat{\Omega} \hat{\mathbf{R}} \Omega + \hat{\mathbf{R}}^2 \dot{\Omega} \right) = \mathbf{Q}_0 m_0 R^2 \begin{bmatrix} \ddot{\vartheta} - \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \ddot{\psi} \sin \vartheta + 2\dot{\vartheta} \dot{\psi} \cos \vartheta \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Действительно, воспользуемся определением матриц  $\hat{\mathbf{R}}$  (5.9) и  $\hat{\Omega}$  (4.16), а также определением вектора  $\Omega$  (4.16), поэтапное вычисление правой части равенства (6.20) можно представить так:

$$\hat{\mathbf{R}} \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 \\ R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\Omega_2 \\ R\Omega_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.20a)$$

$$\hat{\Omega} \hat{\mathbf{R}} \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R\Omega_2 \\ R\Omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\Omega_3 \Omega_1 \\ -R\Omega_2 \Omega_3 \\ R(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \end{bmatrix}, \quad (6.20a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} \hat{\Omega} \hat{\mathbf{R}} \Omega &= \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 \\ R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R\Omega_3 \Omega_1 \\ -R\Omega_2 \Omega_3 \\ R(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} R^2 \Omega_2 \Omega_3 \\ -R^2 \Omega_3 \Omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ -R^2 \dot{\vartheta} \dot{\psi} \cos \vartheta \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.20b)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}^2 \dot{\Omega} &= \begin{bmatrix} -R^2 & 0 & 0 \\ 0 & -R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_1 \\ \dot{\Omega}_2 \\ \dot{\Omega}_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -R^2 \dot{\Omega}_1 \\ -R^2 \dot{\Omega}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R^2 \ddot{\vartheta} \\ -R^2 (\ddot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\psi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.20c)$$

$$-\hat{\mathbf{R}} \hat{\Omega} \hat{\mathbf{R}} \Omega - \hat{\mathbf{R}}^2 \dot{\Omega} = \begin{bmatrix} -R^2 \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ R^2 \dot{\vartheta} \dot{\psi} \cos \vartheta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R^2 \ddot{\vartheta} \\ R^2 (\ddot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\psi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.20d)$$

Следует заметить, что в выражении (6.16) одно из слагаемых равно нулю:

$$\mathbf{Q}_0 \int_V m \left( -\hat{\mathbf{x}}_c \left( \hat{\Omega} \hat{\xi} \sigma + \hat{\xi} \dot{\sigma} + \hat{\sigma} \hat{\xi} \omega \right) + \hat{\xi} \mathbf{Q}_0^{-1} \ddot{\mathbf{x}}_c \right) dv = \mathbf{0}. \quad (6.21)$$

Последнее равенство (6.21) справедливо, поскольку все слагаемые в нем линейно зависят от компонент матрицы  $\hat{\xi}$  (5.14). Далее преобразуем оставшееся выражение  $-\mathbf{Q}_0 \hat{\xi} \left( \hat{\Omega} \hat{\xi} \sigma + \hat{\xi} \dot{\sigma} + \hat{\sigma} \hat{\xi} \omega \right)$  в равенстве (6.16). В соответствии со свойством (3.4) получаем:

$$\hat{\xi} \hat{\Omega} \hat{\xi} = \hat{\xi}^2 \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \hat{\xi}^2 + |\xi|^2 \hat{\Omega}, \quad \hat{\xi} \dot{\sigma} \hat{\xi} = \hat{\xi}^2 \dot{\sigma} + \dot{\sigma} \hat{\xi}^2 + |\xi|^2 \dot{\sigma}. \quad (6.22)$$

В этом случае

$$\hat{\xi}\hat{\Omega}\hat{\xi}\sigma = \left(\hat{\xi}^2\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\hat{\xi}^2 + |\xi|^2\hat{\Omega}\right)(\Omega + \omega) = \hat{\Omega}\hat{\xi}^2\Omega + \left(\hat{\xi}^2\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\hat{\xi}^2 + |\xi|^2\hat{\Omega}\right)\omega, \quad (6.23)$$

$$\hat{\xi}\hat{\sigma}\hat{\xi}\omega = \hat{\xi}^2\hat{\Omega}\omega + \hat{\Omega}\hat{\xi}^2\omega + |\xi|^2\hat{\Omega}\omega + \hat{\omega}\hat{\xi}^2\omega, \quad (6.24)$$

т.к.  $\hat{\Omega}\Omega = \mathbf{0}$ ,  $\hat{\omega}\omega = \mathbf{0}$ . Таким образом, получаем:

$$-\left(\hat{\xi}\hat{\Omega}\hat{\xi}\sigma + \hat{\xi}^2\hat{\sigma} + \hat{\xi}\hat{\sigma}\hat{\xi}\omega\right) = -\hat{\Omega}\hat{\xi}^2\Omega - 2\hat{\xi}^2\hat{\Omega}\omega - 2\hat{\Omega}\hat{\xi}^2\omega - 2|\xi|^2\hat{\Omega}\omega - \hat{\xi}^2\hat{\sigma} - \hat{\omega}\hat{\xi}^2\omega. \quad (6.25)$$

Далее, суммируем равенство (6.25) по всем частицам тела и получаем:

$$\begin{aligned} -\mathbf{Q}_0 \int_V m\hat{\xi} \left(\hat{\Omega}\hat{\xi}\sigma + \hat{\xi}\hat{\sigma} + \hat{\sigma}\hat{\xi}\omega\right) dv = \\ = \hat{\Omega}\mathbf{J}_*\Omega + 2\mathbf{J}_*\hat{\Omega}\omega + 2\hat{\Omega}\mathbf{J}_*\omega - (2A_* + C_*)\hat{\Omega}\omega + \mathbf{J}_* \left(\hat{\Omega} + \hat{\omega}\right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

В равенстве (6.26) использовано свойство  $\hat{\omega}\mathbf{J}_*\omega = 0$ . Выполнив необходимые матрично-векторные умножения, получаем три скалярных уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \int_V m\hat{x}\ddot{x}dv = \\ = \mathbf{Q}_0 \left[ \begin{array}{l} (m_0R^2 + A_*)\ddot{\vartheta} - (m_0R^2 + A_*)\dot{\psi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta + h_c\dot{\psi} \sin\vartheta = 0 \\ (m_0R^2 + A_*)\ddot{\psi} \sin\vartheta + 2(m_0R^2 + A_*)\dot{\vartheta}\dot{\psi} \cos\vartheta - h_c\dot{\vartheta} = 0 \\ C_*(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\vartheta) = h_c \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Далее, поделим первые два уравнения (6.27) на момент инерции  $m_0R^2 + A_*$  и получаем в итоге уравнения Эйлера в проекции на нормальные оси  $C\xi\eta\nu$  (6.12), (6.13).

## 7. Интегралы уравнений Эйлера

Уравнения Эйлера (6.5) имеют три классических скалярных интеграла для симметричного относительно оси вращения тела (см., например, [7, т.2, стр.281], [8, т.2, стр. 150], [10, стр. 190-191], [18, стр. 227-228]):

$$\langle \mathbf{Jp}, \mathbf{Jp} \rangle = A^2p^2 + B^2q^2 + C_*^2r^2 = h_K = const, \quad (7.1)$$

где  $\mathbf{K}_0$  – вектор кинетического момента (5.4):

$$\langle \mathbf{Jp}, \mathbf{p} \rangle = Ap^2 + Bq^2 + C_*r^2 = h_E = const, \quad (7.2)$$

$$C_*r = C_* \left(\dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\varphi}\right) = h_c = const. \quad (7.3)$$

Здесь  $h_K, h_E, h_c$  – произвольные постоянные. Следует заметить, что интегралы (7.1) и (7.2) следуют из более общего векторного интеграла (6.3) [4]. Третий интеграл (7.3) также следует из более общего интеграла (6.3) (см. *Приложение, Раздел IX, Лемма 3*).

Поскольку движение тела рассматривается в центральном поле, то для этого случая существует еще один интеграл энергии. Чтобы его вывести, необходимо рассмотреть операцию скалярного произведения  $\langle \mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}} \rangle$  с последующим суммированием по всем частицам тела. Для этого воспользуемся ранее полученными представлениями векторов  $\mathbf{x}$  (2.2) и  $\ddot{\mathbf{x}}$  (4.25):

$$\int_V m \langle \mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}} \rangle dv = -\frac{\mu}{R^3} \int_V m \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle dv. \quad (7.4)$$

Преобразуем сначала правую часть равенства (7.4):

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}_c, \mathbf{x}_c \rangle + 2 \langle \mathbf{x}_c, \mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\xi} \rangle + \langle \mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\xi}, \mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\xi} \rangle = \langle \mathbf{x}_c, \mathbf{x}_c \rangle + 2 \langle \mathbf{x}_c, \mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\xi} \rangle + |\boldsymbol{\xi}|^2. \quad (7.5)$$

Теперь просуммируем выражение (7.5) по всем частицам тела с учетом того, что  $\int_V m \langle \mathbf{x}_c, \mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\xi} \rangle dv = 0$ :

$$\int_V m \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle dv = \int_V m \langle \mathbf{x}_c, \mathbf{x}_c \rangle dv + \int_V m |\boldsymbol{\xi}|^2 dv. \quad (7.6)$$

В свою очередь:

$$\int_V m \langle \mathbf{x}_c, \mathbf{x}_c \rangle dv = m_0 R^2, \quad \int_V m |\boldsymbol{\xi}|^2 dv = A_* + \frac{C_*}{2}. \quad (7.7)$$

Таким образом,

$$-\frac{\mu}{R^3} \int_V m \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle dv = -\frac{m_0 \mu}{R} (1 + \varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{2A_* + C_*}{2m_0 R^2}. \quad (7.8)$$

Следует заметить, что для тел лабораторных размеров в условиях Земли параметр  $\varepsilon$  является малым, т.е.  $\varepsilon \ll 1$ . Так, например, для диска радиусом  $r_0 = 1$  м с габаритно-массовыми характеристиками  $m_0 = 2450$  кг,  $A_* = 637$  кг · м<sup>2</sup>,  $C_* = 1225$  кг · м<sup>2</sup> величина  $\varepsilon$  пренебрежительно мала:  $\varepsilon \approx 1,2 \cdot 10^{-14}$  (см. Пример 1, Глава V). Таким образом, величиной  $\varepsilon$  можно пренебречь и равенство (7.8) в этом случае существенно упрощается:

$$-\frac{\mu}{R^3} \int_V m \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle dv \approx -\frac{m_0 \mu}{R}. \quad (7.9)$$

Теперь уже можно преобразовать левую часть равенства (7.4):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}} \rangle = & \langle \mathbf{x}_c, \ddot{\mathbf{x}}_c \rangle + \left\langle \mathbf{x}_c, \mathbf{Q}_0 \left( \hat{\Omega} \hat{\sigma} + \dot{\hat{\sigma}} + \hat{\sigma} \hat{\omega} \right) + \boldsymbol{\xi} \right\rangle + \\ & \langle \mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\xi}, \ddot{\mathbf{x}}_c \rangle + \left\langle \mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\xi}, \mathbf{Q}_0 \left( \hat{\Omega} \hat{\sigma} + \dot{\hat{\sigma}} + \hat{\sigma} \hat{\omega} \right) \boldsymbol{\xi} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.10)$$

В процессе суммирования все слагаемые, которые являются линейными функциями относительно компонент вектора  $\boldsymbol{\xi}$ , равны нулю:

$$\int_V m \left\langle \mathbf{x}_c, \mathbf{Q}_0 \left( \hat{\Omega} \hat{\sigma} + \dot{\hat{\sigma}} + \hat{\sigma} \hat{\omega} \right) \boldsymbol{\xi} \right\rangle dv = 0, \quad \int_V m \langle \mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\xi}, \ddot{\mathbf{x}}_c \rangle dv = 0. \quad (7.11)$$

Из формул (4.10) и (4.27) следует, что

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_c, \ddot{\mathbf{x}}_c \rangle &= \langle \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}, \mathbf{Q}_0 (\hat{\Omega}^2 + \dot{\hat{\Omega}}) \mathbf{R} \rangle = - \langle \mathbf{R}, \hat{\Omega} \hat{\mathbf{R}} \Omega \rangle - \langle \mathbf{R}, \hat{\mathbf{R}} \dot{\Omega} \rangle = \\ &= \langle \hat{\Omega} \mathbf{R}, \hat{\mathbf{R}} \Omega \rangle + \langle \hat{\mathbf{R}} \mathbf{R}, \dot{\Omega} \rangle = - \langle \hat{\mathbf{R}} \hat{\Omega} \mathbf{R}, \Omega \rangle = \langle \hat{\mathbf{R}}^2 \Omega, \Omega \rangle \end{aligned} \quad (7.12)$$

В преобразованиях (7.1) были использованы свойства несимметричной перестановки операторов (3.2), а также свойство (3.3)  $\langle \hat{\mathbf{R}} \mathbf{R}, \dot{\Omega} \rangle = 0$ . Далее, суммируем выражение  $\langle \mathbf{x}_c, \ddot{\mathbf{x}}_c \rangle$ , по всему объему тела:

$$\int_V m \langle \mathbf{x}_c, \ddot{\mathbf{x}}_c \rangle dv = \int_V m \langle \hat{\mathbf{R}}^2 \Omega, \Omega \rangle dv = -m_0 R^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2). \quad (7.13)$$

Теперь воспользуемся свойством (3.2) перестановки кососимметричных матриц и векторов при умножении  $\hat{\Omega} \hat{\sigma} \xi = -\hat{\Omega} \hat{\xi} \sigma$ ,  $\hat{\sigma} \xi = -\hat{\xi} \sigma$ ,  $\hat{\sigma} \hat{\omega} \xi = -\hat{\sigma} \hat{\xi} \omega$  и вычислим последнее слагаемое в правой части (7.10):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Q}_0 \xi, \mathbf{Q}_0 (\hat{\Omega} \hat{\sigma} + \dot{\hat{\sigma}} + \hat{\sigma} \hat{\omega}) \xi \rangle &= \langle \xi, (\hat{\Omega} \hat{\sigma} + \hat{\sigma} \hat{\omega}) \xi \rangle = \\ &= \langle \xi, -(\hat{\Omega} \hat{\xi} \sigma + \hat{\xi} \sigma + \hat{\sigma} \hat{\xi} \omega) \rangle = - \langle \xi, \hat{\Omega} \hat{\xi} \sigma \rangle - \langle \xi, \hat{\xi} \sigma \rangle - \langle \xi, \hat{\sigma} \hat{\xi} \omega \rangle. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Заметим при этом, что

$$\langle \xi, \hat{\xi} \sigma \rangle = - \langle \hat{\xi} \xi, \sigma \rangle \equiv 0. \quad (7.15)$$

Здесь использованы свойства (3.3) и (3.7). Далее преобразуем каждое слагаемое в правой части (7.14), используя свойство (3.7):

$$\begin{aligned} - \langle \xi, \hat{\Omega} \hat{\xi} \sigma \rangle &= \langle \hat{\Omega} \xi, \hat{\xi} \sigma \rangle = - \langle \hat{\xi} \Omega, \hat{\xi} \sigma \rangle = \\ &= \langle \hat{\xi}^2 \Omega, \sigma \rangle = \langle \hat{\xi}^2 \Omega, \Omega \rangle + \langle \hat{\xi}^2 \Omega, \omega \rangle. \end{aligned} \quad (7.16)$$

И аналогично:

$$- \langle \xi, \hat{\sigma} \hat{\xi} \omega \rangle = \langle \hat{\sigma} \xi, \hat{\xi} \omega \rangle = - \langle \hat{\xi} \sigma, \hat{\xi} \omega \rangle = \langle \hat{\xi}^2 \sigma, \omega \rangle = \langle \hat{\xi}^2 \Omega, \omega \rangle + \langle \hat{\xi}^2 \omega, \omega \rangle. \quad (7.17)$$

Таким образом:

$$\langle \mathbf{Q}_0 \xi, \mathbf{Q}_0 (\hat{\Omega} \hat{\sigma} + \dot{\hat{\sigma}} + \hat{\sigma} \hat{\omega}) \xi \rangle = - \langle \hat{\xi}^2 \Omega, \Omega \rangle - 2 \langle \hat{\xi}^2 \Omega, \omega \rangle - \langle \hat{\xi}^2 \omega, \omega \rangle. \quad (7.18)$$

Теперь просуммируем выражение (7.18) по всему объему тела:

$$\begin{aligned} \int_V m \langle \hat{\xi}^2 \Omega, \Omega \rangle dv &= - \langle \mathbf{J}_* \Omega, \Omega \rangle = \\ &= - \left\langle \begin{bmatrix} A_* \Omega_1 \\ A_* \Omega_2 \\ C_* \Omega_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} \right\rangle = -A_* (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - C_* \Omega_3^2. \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$2 \int_V m \langle \hat{\xi}^2 \Omega, \omega \rangle dv = -2 \left\langle \begin{bmatrix} A_* \Omega_1 \\ A_* \Omega_2 \\ C_* \Omega_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \right\rangle = -2C_* \Omega_3 \dot{\varphi}. \quad (7.20)$$

$$\int_V m \langle \hat{\xi}^2 \omega, \omega \rangle dv = -\langle \mathbf{J}_* \omega, \omega \rangle = -C_* \dot{\varphi}^2. \quad (7.21)$$

Следовательно, равенство (7.4), в конечном счете, выглядит так:

$$\int_V m \langle \mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}} \rangle dv = -(m_0 R^2 + A_*) (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2\Omega_3 C_* (\Omega_3 + \dot{\varphi}) - C_* \dot{\varphi}^2 = -\frac{m_0 \mu}{R}. \quad (7.22)$$

Обратим внимание на то, что выражение

$$(m_0 R^2 + A_*) (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + 2\Omega_3 C_* (\Omega_3 + \dot{\varphi}) + C_* \dot{\varphi}^2 = A (p^2 + q^2) + C_* r^2$$

является интегралом (7.2). Поэтому равенство (7.22) можно переписать так:

$$\int_V m \langle \mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}} \rangle dv = -A (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2\Omega_3 h_c - C_* \dot{\varphi}^2 = -\frac{m_0 \mu}{R}, \quad (7.23)$$

где  $A = m_0 R^2 + A_*$  (5.6).

Далее, установим связь между интегралом энергии (7.2) и выражением (7.23). Для этого умножим векторы  $\mathbf{Jp}$  и  $\mathbf{p}$  на матрицу  $\mathbf{Q}_\varphi^{-1}$  (4.1). В соответствии со свойством (3.5) скалярное произведение  $\langle \mathbf{Jp}, \mathbf{p} \rangle$ , от такой операции не меняется.

$$\langle \mathbf{Jp}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \mathbf{JQ}_\varphi \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \sigma, \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \sigma \rangle = \langle \mathbf{J}\sigma, \sigma \rangle. \quad (7.24)$$

Здесь были использованы равенства  $\mathbf{p} = \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \sigma$  (4.24) и  $\mathbf{Q}_\varphi \mathbf{JQ}_\varphi^{-1} = \mathbf{J}$  (5.7). Следовательно

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Jp}, \mathbf{p} \rangle &= \langle \mathbf{J}\sigma, \sigma \rangle = \langle \mathbf{J}\Omega, \Omega \rangle + 2 \langle \mathbf{J}\Omega, \omega \rangle + \langle \mathbf{J}\omega, \omega \rangle = \\ &= A (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + 2\Omega_3 h_c + C_* \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Теперь равенство (7.23) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \int_V m \langle \mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}} \rangle dv &= -\langle \mathbf{Jp}, \mathbf{p} \rangle = \\ &= -\left( A (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + 2\Omega_3 h_c + C_* \dot{\varphi}^2 \right) = -\frac{m_0 \mu}{R} = -h_E. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Заметим по условию задачи принято условие  $R = const$ . Значит, правая часть равенства (7.26) является интегралом энергии (7.2). При этом в равенстве (7.26) можно избавиться от знака «минус» в левой и правой части, т.е. можно равенство (7.26) переписать так:

$$\langle \mathbf{Jp}, \mathbf{p} \rangle = \left( A (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + 2\Omega_3 h_c + C_* \dot{\varphi}^2 \right) - \frac{m_0 \mu}{R} = h_E. \quad (7.26a)$$

Поскольку  $A = m_0 R^2 + A_*$  (5.6), то правую часть равенства (7.26a) можно переписать так:

$$m_0 V_c^2 - \frac{m_0 \mu}{R} + \delta = h_E, V_c^2 = R^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) = R^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta), \quad (7.27)$$

где

$$\delta = A_* \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta \right) + 2h_c \dot{\psi} \cos \vartheta + C_* \dot{\varphi}^2. \quad (7.28)$$

В интеграле энергии (7.27) параметр  $\delta$  (7.28) определяет некоторую поправку, которая определяет влияние массово-геометрических характеристик протяженного твердого тела на динамику движения, а  $V_c$  – скорость движения точечной массы  $m_0$  в центральном поле:

$$V_c = R \sqrt{\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (7.29)$$

Следует обратить внимание на то, что полученная формула (7.27) является «почти» классическим интегралом энергии в задаче движения точечной массы  $m_0$  в центральном поле. Оговорка «почти» возникает потому, что классический интеграл для точечной массы определяется равенством без параметра  $\delta$  (7.28).

$$m_0 V_c^2 - \frac{m_0 \mu}{R} = h_E. \quad (7.30)$$

В частности, равенство  $V_c = \sqrt{\frac{\mu}{R}}$  определяет условие первой космической скорости для точечной массы. Поэтому есть смысл оценить влияние поправки  $\delta$  (7.28), чтобы понять, в каком случае можно твердое тело заменять точечной массой  $m_0$ , а в каком случае необходимо учитывать влияние поправки  $\delta$  (7.28) на динамику движения. Для оценки влияния параметра  $\delta$  (7.28) предлагается воспользоваться уже вычисленными параметрами (см. **Пример 1, Глава V**) в задаче движения железного диска по круговой орбите на высоте 200 км над Землей. В этом случае основные параметры движения определяются числовыми параметрами (5.20), (5.21), (5.22):

$$R \approx 6571 \cdot 10^3 \text{ м}, \quad \mu \approx 3.98 \cdot 10^{14} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2}, \quad m_0 \approx 2450 \text{ кг}, \quad A_* \approx 637, \quad C_* \approx 1225. \quad (7.31)$$

В этих условиях линейная скорость полета определяется условием движения по круговой орбите:

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{R}} = R |\mathbf{\Omega}| \approx 7780.45 \text{ м/с}, \quad (7.32)$$

где  $|\mathbf{\Omega}|$  – усредненная угловая переносная скорость движения центра масс тела:

$$|\mathbf{\Omega}| \approx |\dot{\varphi}| \approx \sqrt{\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta} \approx 1.184 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}. \quad (7.33)$$

Без ограничения общности можно считать, что исходная орбитальная плоскость движения тела является плоскостью экватора, т.е. когда  $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$ . В этом случае угловая скорость движения по орбите определяется параметром  $\dot{\psi}$ . Для определенности положим, что и собственная угловая скорость вращения тела является незначительной, например,  $\dot{\psi} \approx \dot{\varphi} \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ . При этих условиях можно оценить величину константы  $h_c$  (7.3):

$$C_* \dot{\varphi} \approx h_c = 1.45. \quad (7.34)$$

При названных выше условиях  $\delta \approx 0.0026$  и в этом случае влияние нелинейной поправки на величину первой космической скорости крайне незначительно:

$$\frac{\delta}{m_0 V_c^2} \approx 1,76 \cdot 10^{-14}. \quad (7.35)$$

**Вывод 1.** При «малых» угловых скоростях вращения тела относительно собственного центра масс влияние нелинейности  $\delta$  (7.35) на величину орбитальной скорости движения центра масс тела оценивается пренебрежимо малой величиной порядка  $1.76 \cdot 10^{-14}$ .

**Вывод 2.** В этом случае и полный вектор кинетического момента тела  $\mathbf{K}_0$  (фактически с точностью до  $10^{-14}$ ) совпадает с кинетическим моментом точечной массы  $\mathbf{K}_c$ , ибо влияние поправки  $\mathbf{K}_\omega$  (5.25) для протяженного тела является крайне незначительным.

Однако, при «больших» значениях собственной угловой скорости  $\dot{\varphi}$  тела наблюдается линейный рост величины добавочного вектора  $\mathbf{K}_\omega$  (5.23). Более того, величина  $\delta$  (7.28) растет с квадратичной скоростью относительно  $\dot{\varphi}$ .

**Вывод 3.** В классическом случае движения точечной массы в центральном поле вектор кинетического момента перпендикулярен плоскости орбиты, по которой движется эта массивная точка. Поскольку величина добавочного вектора  $|\mathbf{K}_\omega| \approx A_* (|\boldsymbol{\Omega}| + |\boldsymbol{\omega}|)$  (5.23) пропорциональна модулю угловой скорости вращения  $|\boldsymbol{\omega}|$  относительно центра масс, то наклонение орбиты будет также подвергаться динамическому изменению.

Поскольку вектор кинетического момента в инерциальном пространстве перпендикулярен плоскости орбиты. Таким образом, изменения в интеграле кинетического момента и в интеграле энергии неминуемо изменяют параметры движения по орбите вращающегося твердого тела.

## 8. Новые динамические эффекты при движении вращающегося твердого тела в центральном поле

В классической механике отсутствуют однозначные критерии, в каких случаях твердое тело можно заменять точечной массой, а в каких случаях этого не следует делать. Принято считать, что к последней ситуации относятся случаи, когда тело вращается относительно неподвижной точки (физические маятники, классические волчки и пр.). Математической моделью движения для названных случаев являются динамические уравнения Л. Эйлера. В задаче о движении вращающегося тела в центральном поле эти уравнения с точностью до  $10^{-14}$  подтверждают аксиому классической механики о возможности замены твердого протяженного тела точечной массой, при условии, что угловая скорость вращения тела относительно собственного центра масс «не велика» (7.33). В этом случае интеграл энергии (7.27) и вектор кинетического момента тела (5.18) (7.35) с точностью до  $10^{-14}$  совпадают с «точечной моделью». Однако, наличие нелинейных функций  $f_\vartheta, f_\psi$  (6.13) способно разрушить картину классического орбитального движения при «очень больших скоростях  $\dot{\varphi}$  собственного вращения». Поскольку угловая скорость вращения тела  $\dot{\varphi}$  теоретически ничем не ограничена, то влияние нелинейностей  $f_\vartheta, f_\psi$  (6.13) на движение центра масс тела может быть сколь угодно большим.

Для того, чтобы оценить влияние угловой скорости  $\dot{\varphi}$  вращения на динамику движения центра масс тела, воспользуемся полным векторным интегралом (5.18) для уравнений Эйлера (6.12)

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}_0 \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}. \quad (8.1)$$

Здесь  $\mathbf{C}$  – векторная константа (6.3). В развернутом виде вектор  $\mathbf{K}_0$  выглядит так:

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} A\dot{\vartheta} \cos \psi - A\dot{\psi} \sin \vartheta \sin \psi \cos \vartheta + C_* \left( \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \right) \sin \psi \sin \vartheta \\ A\dot{\vartheta} \sin \psi + A\dot{\psi} \sin \vartheta \cos \psi \cos \vartheta - C_* \left( \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \right) \cos \psi \sin \vartheta \\ A\dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C_* \left( \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \right) \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}. \quad (8.2)$$

Далее, разрешаем уравнения (8.2) относительно переменных  $\{\dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}\}$  и получаем в итоге систему уравнений первого порядка для уравнений Эйлера-Пуансо (6.5), (6.11), (6.12):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \frac{C_1 \cos \psi + C_2 \sin \psi}{A} \\ \dot{\psi} &= \frac{-C_1 \cos \vartheta \sin \psi + C_2 \cos \vartheta \cos \psi + C_3}{A \sin \vartheta} \\ \dot{\varphi} &= \frac{(C_* \cos^2 \vartheta + A \sin^2 \vartheta)(C_1 \sin \psi - C_2 \cos \psi)}{A C_* \sin \vartheta} + \frac{(A - C_*) \cos \vartheta C_3}{A C_*} \end{aligned} \right\}. \quad (8.3)$$

Произвольные константы  $C_1, C_2, C_3$  определяются из начальных условий задачи. Рассмотрим еще раз **Пример 1 (см. Глава V)** о движении шара по круговой орбите на высоте 500 км над Землей. Физические параметры движения диска определены уже известными величинами (5.20)-(5.22). Без ограничения общности условимся, что плоскость орбиты движения диска совпадает с плоскостью экватора. Это значит, что в начальный момент движения

$$\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}, \psi(0) = 0, \dot{\vartheta}(0) = 0, \dot{\psi}(0) = 0.00118. \quad (8.4)$$

Подставляем значения (8.4) в уравнения (8.3) и получаем значения констант  $C_1, C_2, C_3$  (6.3):

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\omega_0 C_*, \quad C_3 = A\dot{\psi}(0), \quad (8.5)$$

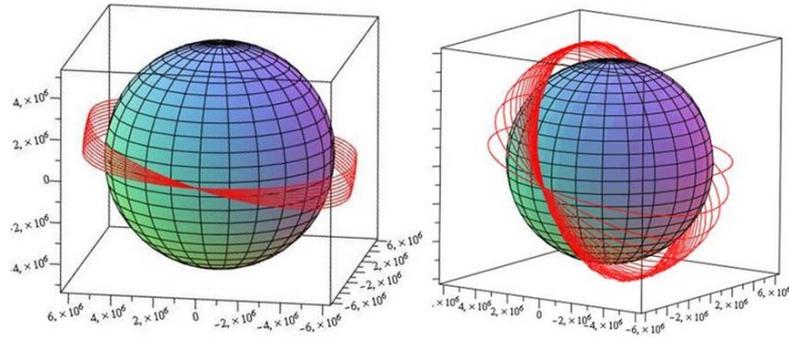
где  $\omega_0 = \dot{\varphi}(0)$ . При этих значениях констант уравнения (8.3) заметно упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \frac{-\omega_0 C_* \sin \psi}{A} \\ \dot{\psi} &= \frac{-\omega_0 C_* \cos \vartheta \cos \psi}{A \sin \vartheta} + \dot{\psi}(0) \\ \dot{\varphi} &= \frac{(C_* \cos^2 \vartheta + A \sin^2 \vartheta) \omega_0 \cos \psi}{A \sin \vartheta} + \frac{(A - C_*) \cos \vartheta \dot{\psi}(0)}{C_*} \end{aligned} \right\}. \quad (8.6)$$

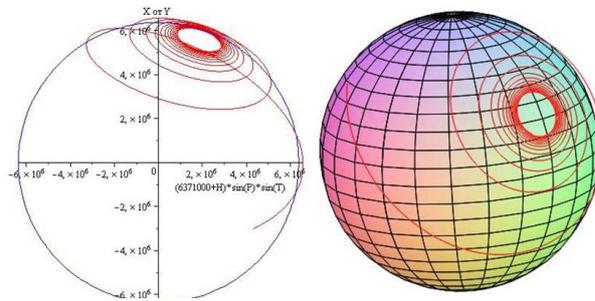
Из уравнений (8.6) видно, что в диапазоне  $0 < \psi < \pi$  угол  $\vartheta$  уменьшается от первоначального значения  $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$ , поскольку в этом случае  $\dot{\vartheta} < 0$ . При численном моделировании можно подобрать такие начальные значения  $\omega_0$ , при которых происходит трансформация орбиты тела, прецессия орбиты, изменение угла наклона орбиты. На рисунке 5 представлен один из вариантов изменения орбиты относительно изначальной. При численном моделировании движения тела по орбите были взяты параметры Земли и тела аналогичные представленных в Примере 1 Глава V.

Численное моделирование проводилось путем интегрирования дифференциальных уравнений (8.6) с помощью в программы Maple.

Хочется заметить, что в процессе моделирования был выявлен интересный эффект «сжатия» орбиты (рис. 6).



**Рис. 5:** При значениях начальной угловой скорости в диапазоне  $10^{10} < \omega_0 < 10^{12} \text{c}^{-1}$  наблюдается эффект изменения наклона орбиты. С увеличением значений  $\omega_0$  эффект трансформации орбиты усиливается



**Рис. 6:** Трансформация начальной круговой орбиты в экваториальной плоскости до сжимающейся спиралевидной орбиты типа «космическая воронка» при значениях начальной угловой скорости собственного вращения  $\omega_0 > 10^{13} \text{c}^{-1}$

Этот эффект изменения орбиты подтверждает и динамика изменения ориентации вектора кинетического момента  $\mathbf{K}_0$ . Такой эффект изменения круговой орбиты за счет вращения тела относительно центра масс корректирует классическое представление о движении в центральном поле. Описание результатов численного моделирования не позволяет остаться в допустимых рамках объёма статьи. Поэтому планируется к публикации отдельной статьей.

Важно отметить при этом, что плоскость «орбитальной воронки» не проходит через центр гравитационного поля. Разворот плоскости орбиты в инерциальном пространстве можно объяснить тем, что вектор кинетического момента  $\mathbf{K}_0$  (5.8) состоит из двух компонент:  $\mathbf{K}_c$  и  $\mathbf{K}_\omega$  (5.19). При этом длина вектора  $\mathbf{K}_\omega$  пропорциональна угловой скорости вращения тела, т.е.  $\mathbf{K}_\omega \approx A_* (|\Omega| + \omega_0)$  (5.23). Увеличение компонент вектора  $\mathbf{K}_\omega$  приводит к тому, что вектор  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_\omega$  (5.18) отклоняется от своей первоначальной ориентации вектора  $\mathbf{K}_c$  (вдоль оси  $OZ$ ).

Угол  $\alpha$  рассогласования между векторами  $\mathbf{K}_c$  и  $\mathbf{K}_\omega$  (5.19) можно оценить так:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\langle \mathbf{K}_c, \mathbf{K}_\omega \rangle}{|\mathbf{K}_c| \cdot |\mathbf{K}_\omega|} = \frac{|\mathbf{K}_c|^2 + \langle \mathbf{K}_c, \mathbf{K}_\omega \rangle}{|\mathbf{K}_c| \cdot |\mathbf{K}_\omega|} = \\ &= \frac{|\mathbf{K}_c|}{|\mathbf{K}_\omega|} + \frac{\langle \mathbf{K}_c, \mathbf{K}_\omega \rangle}{|\mathbf{K}_c| \cdot |\mathbf{K}_\omega|} = \frac{|\mathbf{K}_c|}{|\mathbf{K}_\omega|} \left( 1 + \frac{\langle \mathbf{K}_c, \mathbf{K}_\omega \rangle}{|\mathbf{K}_c|^2} \right). \end{aligned} \quad (8.7)$$

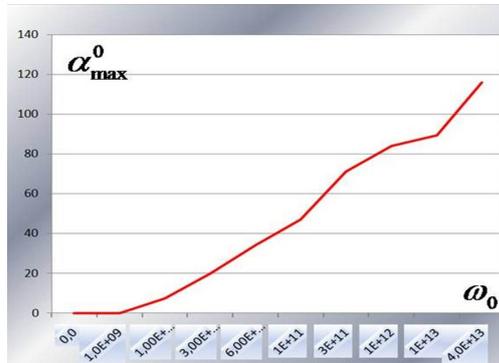
При этом

$$\langle \mathbf{K}_c, \mathbf{K}_\omega \rangle = \langle \mathbf{Q}_0 \mathbf{J}_R \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}_0 \mathbf{J}_* \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbf{J}_R \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{J}_* \boldsymbol{\sigma} \rangle = A_* m_0 R^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta). \quad (8.8)$$

Таким образом,

$$\frac{\langle \mathbf{K}_c, \mathbf{K}_\omega \rangle}{|\mathbf{K}_c|^2} = \frac{A_* m_0 R^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta)}{m_0^2 R^4 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta)} = \frac{A_*}{m_0 R^2} \approx 6 \cdot 10^{-15}. \quad (8.9)$$

Поскольку величина  $\mathbf{K}_0$  пропорциональна начальной угловой скорости  $\omega_0$ , то линейный рост  $|\mathbf{K}_0|$  приводит к тому, что  $\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} \frac{|\mathbf{K}_c|}{|\mathbf{K}_\omega|} \rightarrow 0$ . Это значит, что угол  $\alpha$  рассогласования между вектором  $\mathbf{K}_0$  (5.18) и вектором  $\mathbf{K}_c$  достигает  $90^\circ$ . Другими словами, плоскость орбиты способна развернуться из горизонтального положения в вертикальное. Численные исследования для 10 значений величин  $\omega_0$  в диапазоне  $10^9 c^{-1} < \omega_0 < 10^{13} c^{-1}$  показывают, что максимальный угол  $\alpha_{\max}^0$  (в градусах) рассогласования между векторами  $\mathbf{K}_c$  (5.19) и  $\mathbf{K}_0$  (5.18) увеличивается с ростом значений в диапазоне  $\omega_0 > 10^9 c^{-1}$  (Рис. 7). При этом в диапазоне  $10^9 < \omega_0 < 10^{13} c^{-1}$



**Рис. 7:** Максимальный угол (в градусах)  $\alpha_{\max}^0$  рассогласования между изначальным положением вектора  $\mathbf{K}_0$  (перпендикулярно плоскости экватора) увеличивается пропорционально росту значений в диапазоне  $\omega_0$ . При этом угол  $\alpha_{\max}^0$  может превышать величину  $90$  градусов

угол  $\alpha_{\max}^0$  слабо изменяется по времени движения, а при значениях  $\omega_0 > 10^{13} c^{-1}$  колебания значений  $\alpha_{\max}^0$  становятся существенными. Это значит, что центр масс тела движется лишь по поверхности сферы радиуса  $R = const$ .

Необходимость сохранения всех этих условий движения приводит к тому, что радиус окружности  $\rho$  («орбитальной воронки») начинает уменьшаться до величины, при которой сохраняется линейная первая космическая скорость (7.29):

$$\rho^2 (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) = \frac{\mu}{R} = const. \quad (8.10)$$

Исследования показывают, что динамические уравнения Эйлера (8.6) начинают формировать «орбитальную воронку» при наличии начальной угловой скорости собственного вращения в диапазоне  $\omega_0 > 10^{12} c^{-1}$ . С увеличением значений параметра  $\omega_0$  скорость уменьшения радиуса «воронки» только существенно возрастает (Рис. 8).

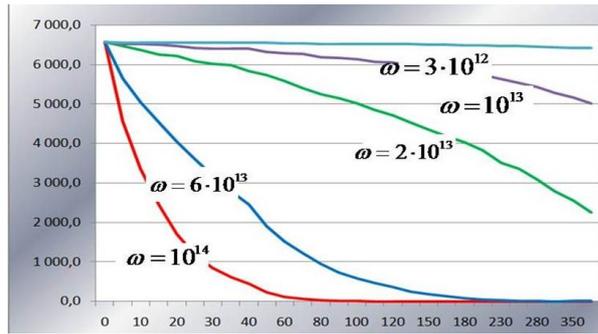


Рис. 8: Динамика сжатия радиуса  $\rho$  (км) орбиты в форме «воронки» для вращающегося диска в диапазоне угловых скоростей  $10^{12} \leq \omega_0 \leq 10^{14} c^{-1}$

## 9. Приложение

**Лемма 1.** Компоненты кососимметричной матрицы  $\hat{\mathbf{p}}$  (4.20), определяются по формуле:

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{Q}}. \quad (9.1)$$

Другими словами, компоненты вектора  $\mathbf{p}$  (4.20) угловой скорости в проекции на связанные с телом оси являются компонентами кососимметричной матрицы  $\hat{\mathbf{p}}$ .

*Доказательство.* Давайте обозначим строки матрицы  $\mathbf{Q}$  (4.4) векторами  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}. \quad (9.2)$$

Столбцы этой же матрицы  $\mathbf{Q}$  (4.4) обозначим векторами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ :

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}. \quad (9.3)$$

Векторы  $\alpha, \beta, \gamma$  (9.2) подчиняются уравнениям Пуассона (см. например, [8, т.2, стр. 187], [9, стр. 154 [12, стр. 48], ], [19, стр.34 ], [20, стр. 92]):

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = -[\mathbf{p}, \alpha] &= \begin{bmatrix} r\alpha_2 - q\alpha_3 \\ -r\alpha_1 + p\alpha_3 \\ q\alpha_1 - p\alpha_3 \end{bmatrix}, \\ \frac{d\beta}{dt} = -[\mathbf{p}, \beta] &= \begin{bmatrix} r\beta_2 - q\beta_3 \\ -r\beta_1 + p\beta_3 \\ q\beta_1 - p\beta_3 \end{bmatrix}, \\ \frac{d\gamma}{dt} = -[\mathbf{p}, \gamma] &= \begin{bmatrix} r\gamma_2 - q\gamma_3 \\ -r\gamma_1 + p\gamma_3 \\ q\gamma_1 - p\gamma_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Из структуры векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  (9.3) и равенств (9.4) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}}{dt} &= \begin{bmatrix} -r\alpha_2 + q\alpha_3 \\ -r\beta_2 + q\beta_3 \\ -r\gamma_2 + q\gamma_3 \end{bmatrix} = -r\mathbf{j} + q\mathbf{k}, \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} &= \begin{bmatrix} r\alpha_1 - p\alpha_3 \\ r\beta_1 - p\beta_3 \\ r\gamma_1 - p\gamma_3 \end{bmatrix} = r\mathbf{i} - p\mathbf{k}, \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \begin{bmatrix} -q\alpha_1 + p\alpha_3 \\ -q\beta_1 + p\beta_3 \\ -q\gamma_1 + p\gamma_3 \end{bmatrix} = -q\mathbf{i} + p\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Для матрицы  $\mathbf{Q}^{-1}$  строками являются векторы  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  (9.3). Таким образом:

$$\mathbf{Q}^{-1}\dot{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{i}, \frac{d\mathbf{i}}{dt} \rangle & \langle \mathbf{i}, \frac{d\mathbf{j}}{dt} \rangle & \langle \mathbf{i}, \frac{d\mathbf{k}}{dt} \rangle \\ \langle \mathbf{j}, \frac{d\mathbf{i}}{dt} \rangle & \langle \mathbf{j}, \frac{d\mathbf{j}}{dt} \rangle & \langle \mathbf{j}, \frac{d\mathbf{k}}{dt} \rangle \\ \langle \mathbf{k}, \frac{d\mathbf{i}}{dt} \rangle & \langle \mathbf{k}, \frac{d\mathbf{j}}{dt} \rangle & \langle \mathbf{k}, \frac{d\mathbf{k}}{dt} \rangle \end{bmatrix}. \quad (9.6)$$

Примечание: в матрице (9.6) угловые скобки  $\langle \cdot \rangle$  означают операцию скалярного произведения векторов. Далее, заменим векторы  $\frac{d\mathbf{i}}{dt}, \frac{d\mathbf{j}}{dt}, \frac{d\mathbf{k}}{dt}$  в матрице (9.6) их правыми частями (9.5):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}^{-1}\dot{\mathbf{Q}} &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{i}, (r\mathbf{j} - q\mathbf{k}) \rangle & \langle \mathbf{i}, (-r\mathbf{i} + p\mathbf{k}) \rangle & \langle \mathbf{i}, (q\mathbf{i} - p\mathbf{j}) \rangle \\ \langle \mathbf{j}, (r\mathbf{j} - q\mathbf{k}) \rangle & \langle \mathbf{j}, (-r\mathbf{i} + p\mathbf{k}) \rangle & \langle \mathbf{j}, (q\mathbf{i} - p\mathbf{j}) \rangle \\ \langle \mathbf{k}, (r\mathbf{j} - q\mathbf{k}) \rangle & \langle \mathbf{k}, (-r\mathbf{i} + p\mathbf{k}) \rangle & \langle \mathbf{k}, (q\mathbf{i} - p\mathbf{j}) \rangle \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Здесь использовано свойство ортогональности векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  (9.3):

$$\langle \mathbf{i}, \mathbf{i} \rangle = \langle \mathbf{j}, \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle = 1, \langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{i}, \mathbf{k} \rangle = 0. \quad (9.8)$$

Лемма 1 доказана.  $\square$

**Лемма 2.** Проекция вектора  $\dot{\mathbf{p}}$  на нормальные оси  $C\xi\eta\nu$  определяется равенством:

$$\mathbf{Q}_\varphi \dot{\mathbf{p}} = \dot{\hat{\Omega}} + \hat{\omega} - \hat{\omega}\Omega. \quad (9.9)$$

*Доказательство.* Давайте продифференцируем вектор  $\mathbf{Q}_\varphi \mathbf{p}$  (4.24).

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{Q}_\varphi \mathbf{p})}{dt} &= \dot{\mathbf{Q}}_\varphi \mathbf{p} + \mathbf{Q}_\varphi \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}_\varphi \left( \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \dot{\mathbf{Q}}_\varphi \mathbf{p} + \dot{\mathbf{p}} \right) = \mathbf{Q}_\varphi (\hat{\omega} \mathbf{p} + \dot{\mathbf{p}}) = \\ &= \mathbf{Q}_\varphi \hat{\omega} \mathbf{Q}_\varphi^{-1} \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{p} + \mathbf{Q}_\varphi \dot{\mathbf{p}} = \hat{\omega} \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{p} + \mathbf{Q}_\varphi \dot{\mathbf{p}} = \hat{\omega} (\Omega + \omega) + \mathbf{Q}_\varphi \dot{\mathbf{p}} = \\ &= \hat{\omega}\Omega + \mathbf{Q}_\varphi \dot{\mathbf{p}} = \dot{\hat{\Omega}} + \hat{\omega} \end{aligned} \quad (9.10)$$

В операциях использовано свойство  $\mathbf{Q}_\varphi \hat{\omega} \mathbf{Q}_\varphi^{-1} = \hat{\omega}$  и тождество  $\hat{\omega}\omega = 0$ . Следовательно  $\mathbf{Q}_\varphi \dot{\mathbf{p}} = \dot{\hat{\Omega}} + \hat{\omega} - \hat{\omega}\Omega$ . Лемма 2 доказана.  $\square$

**Лемма 3.** Из векторного интеграла  $\mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{p} = \mathbf{C}$  и, соответственно, из уравнений (8.3) следует классический интеграл (6.5с):

$$Cr = C \left( \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \right) = const. \quad (9.11)$$

*Доказательство.* Из уравнений (8.3) получается, что

$$Cr = (\sin \vartheta \sin \psi) C_1 + (-\sin \vartheta \cos \psi) C_2 + \cos \vartheta C_3 = const. \quad (9.12)$$

Далее продифференцируем последнее равенство:

$$\begin{aligned} C\dot{r} &= \dot{\vartheta} \cos \vartheta (C_1 \sin \psi - C_2 \cos \psi) + \\ &+ \dot{\psi} \sin \vartheta (C_1 \cos \psi + C_2 \sin \psi) - C_3 \dot{\vartheta} \sin \vartheta = 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Далее, в последнем равенстве подставим вместо параметров  $\dot{\vartheta}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\varphi}$  их значения из правых частей уравнений (8.3). Получаем в итоге:

$$\begin{aligned} C\dot{r} &= \frac{C_1^2}{A} ((\cos \psi \sin \psi \cos \vartheta - \cos \psi \sin \psi \cos \vartheta)) + \\ &+ \frac{C_1 C_2}{A} (\cos \vartheta \sin^2 \psi - \cos \vartheta \sin^2 \psi + \cos \vartheta \cos^2 \psi - \cos \vartheta \cos^2 \psi) + \\ &+ \frac{C_2^2}{A} (\sin \psi \cos \psi \cos \vartheta - \sin \psi \cos \psi \cos \vartheta) \equiv 0 \end{aligned} \quad (9.14)$$

Таким образом, получилось равенство  $C\dot{r} = 0$ . Отсюда следует интеграл (9.11).  $\square$

## Список литературы

- [1] Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972. 360 с.
- [2] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1968.
- [3] Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1977. 360 с.
- [4] Оникеев В.Н., Оникеев И.В. Векторные интегралы уравнений Эйлера, Пуассона и Вольтерра-Жуковского // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 62–75. <https://doi.org/10.26456/vtprm641>
- [5] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974. 432 с.
- [6] Оникеев В.Н. Великая тайна Леонарда Эйлера. СПб.: Издательство Профессинал, 2007. 520 с.
- [7] Лагранж Ж.Л. Аналитическая механика. М.: Издательство Гостехиздат, 1950.
- [8] Аппель П. Теоретическая механика. М.: Физматгиз, Наука, 1960.
- [9] Козлов В.В. Общая теория вихрей. Ижевск: Издательский дом Удмуртский университет, 1998. 238 с.
- [10] Маркеев А.П. Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. 572 с.
- [11] Амеликин Н.И. Динамика твёрдого тела. М.: МФТИ, 2010.
- [12] Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.
- [13] Клейн Ф. Математическая теория волчка. М., 2013.
- [14] Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
- [15] Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 527 с.
- [16] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: Издательство ВИНТИ, 1985.
- [17] Скарборо Д.Б. Гироскоп. Теория и применения // . 1961.
- [18] Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Издательство МГУ, 2000. 719 с.
- [19] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Издательство Факториал, 1995.

- [20] Борисов А.В., Мамаев И.С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: Издательский дом Удмуртский университет, 1999.

#### Образец цитирования

Оникийчук В.Н., Оникийчук И.В. О динамических эффектах движения центра масс вращающегося твердого тела в центральном поле // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 1. С. 49–83. <https://doi.org/10.26456/vtпmk654>

#### Сведения об авторах

1. **Оникийчук Валерий Николаевич**

доцент Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, Мытищинский филиал; доцент Московского государственного областного технологического университета им. А.А. Леонова.

*Россия, 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1.*

*E-mail: [valeryonikiychuk@yandex.ru](mailto:valeryonikiychuk@yandex.ru)*

2. **Оникийчук Игорь Валерьевич**

руководитель проектов АО «Технологическая Компания «Центр».

*Россия, 109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 43, корп 3..*

*E-mail: [ionikv@inbox.ru](mailto:ionikv@inbox.ru)*

# ON THE DYNAMIC EFFECTS OF THE MOTION OF THE CENTER OF MASS OF A ROTATING SOLID BODIES IN THE CENTRAL FIELD

Onikiychuk V.N.<sup>\*,\*\*</sup>, Onikiychuk I.V.<sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Bauman Moscow State Technical University, Mytishchi Branch, Mytishchi

<sup>\*\*</sup>A.A. Leonov Moscow State Regional Technological University, Korolev

<sup>\*\*\*</sup>JSC “Technological Company “Center”, Moscow

---

*Received 10.07.2022, revised 10.11.2022.*

---

A model of motion of a solid rotating body in a central gravitational field is proposed, which takes into account the mass-geometric characteristics of the body and the factor of rotation of the body relative to its own center of mass. The axis of rotation of the body (relative to the center of mass) is the line connecting the center of mass of the body and the center of the inertial coordinate system (the center of the gravitational field). The distance from the center of mass of the body to the beginning of the inertial system is constant during movement. In this case, the mathematical model of motion is Euler’s dynamic equations for a rigid body with a fixed point (the classic “Euler-Poinsot case”). The Euler-Poinsot equations are presented in projection on inertial axes, on normal axes, and also in classical form - in projection on axes connected with a body. It is established that at a “small” angular velocity of rotation relative to the center of mass, the motion of a body with a high degree of accuracy coincides with the classical model of the motion of a point mass in the central.

**Keywords:** central field, gravitational field, Newton’s law, Euler equation, Euler-Poinsot case, energy integral, kinetic moment vector, orbital plane.

## Citation

Onikiychuk V.N., Onikiychuk I.V., “On the dynamic effects of the motion of the center of mass of a rotating solid bodies in the central field”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 1, 49–83 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtprm654>

## References

- [1] Beletskij V.V., *Ocherki o dvizhenii kosmicheskikh tel [Essays on the motion of cosmic bodies]*, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, Moscow, 1972 (in Russian), 360 pp.
- [2] Duboshin G.N., *Nebesnaya mekhanika. Osnovnye zadachi i metody [Celestial mechanics. Main tasks and methods]*, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, Moscow, 1968 (in Russian).

- [3] Aksenov E.P., *Teoriya dvizheniya iskusstvennykh sputnikov Zemli [Theory of motion of artificial Earth satellites]*, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, Moscow, 1977 (in Russian), 360 pp.
- [4] Onikijchuk V.N., Onikijchuk I.V., “Vector integrals of the Euler, Poisson and Volterra-Zhukovsky equations”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 3, 62–75 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtprm641>.
- [5] Arnold V.I., *Matematicheskie metody klassicheskoy mekhaniki [Mathematical methods of classical mechanics]*, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, Moscow, 1974 (in Russian), 432 pp.
- [6] Onikijchuk V.N., *Velikaya tajna Leonarda Ejlera [The Great Mystery of Leonhard Euler]*, Professional Publishing House, SPb., 2007 (in Russian), 520 pp.
- [7] Lagranzh Zh.L., *Analiticheskaya mekhanika [Analytical mechanics]*, Gostekhizdat Publishing House, Moscow, 1950 (in Russian).
- [8] Appel P., *Teoreticheskaya mekhanika [Theoretical mechanics]*, Fizmatgiz, Nauka, Moscow, 1960 (in Russian).
- [9] Kozlov V.V., *Obshchaya teoriya vikhrej [General theory of vortices]*, Publishing House Udmurt University, Izhevsk, 1998 (in Russian), 238 pp.
- [10] Markeev A.P., *Teoreticheskaya mekhanika, Regular and Chaotic Dynamics Publ.*, Izhevsk, 1999 (in Russian), 572 pp.
- [11] Amelkin N.I., *Dinamika tvyordogo tela [Solid body dynamics]*, MIPT, Moscow, 2010 (in Russian).
- [12] Borisov A.V., Mamaev I.S., *Dinamika tverdogo tela [Solid body dynamics]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Izhevsk, 2001 (in Russian), 384 pp.
- [13] Klein F., *Mathematical Theory of the Top*, New York, 1897.
- [14] Zhuravlev V.F., *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki [Fundamentals of theoretical mechanics]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2001 (in Russian), 320 pp.
- [15] Magnus K., *Girooskop. Teoriya i primeneniye [Gyroscope. Theory and application]*, Mir Publ., Moscow, 1974 (in Russian), 527 pp.
- [16] Arnold V.I., Kozlov V.V., Nejshtadt A.I., “Mathematical aspects of classical and celestial mechanics”, *Sovremennye problemv matematiki. Fundamentalnye napravleniya [Modern problems of mathematics. Fundamental directions]*, VINITI Publ., Moscow, 1985 (in Russian).
- [17] Scarborough J.B., “The Gyroscope. Theory and Applications”, 1957, 247 pp.
- [18] Golubev Yu.F., *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki [Fundamentals of theoretical mechanics]*, MSU Publishing House, Moscow, 2000 (in Russian), 719 pp.

- [19] Trofimov V.V., Fomenko A.T., *Algebra i geometriya integriruemyykh gamiltonovykh differentsialnykh uravnenij [Algebra and geometry of integrable Hamiltonian differential equations]*, Factorial Publishing House, Moscow, 1995 (in Russian).
- [20] Borisov A.V., Mamaev I.S., *Puassonovy struktury i algebry Li v gamiltonovoj mekhanike [Poisson structures and Lie algebras in Hamiltonian mechanics]*, Publishing House Udmurt University, Izhevsk, 1999 (in Russian).

#### Author Info

1. **Onikiychuk Valery Nikolaevich**

Associate Professor of the Bauman Moscow State Technical University, Mytishchi Branch; Associate Professor of the Moscow State Regional Technological University named after A.A. Leonov.

*Russia, 141005, Moscow region, Mytishchi, 1st Institutskaya str., 1.*

*E-mail: [valeryonikiychuk@yandex.ru](mailto:valeryonikiychuk@yandex.ru)*

2. **Onikiychuk Igor Valeryevich**

Project Manager of JSC "Technological Company "Center".

*Russia, 109316, Moscow, Volgogradsky Prospekt, 43, building 3..*

*E-mail: [ionikv@inbox.ru](mailto:ionikv@inbox.ru)*