

УДК 539.3

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫПРЯМЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНОЙ ИЗОТРОПИИ<sup>1</sup>

Белкин А.Э.

Тульский государственный университет, г. Тула

---

*Поступила в редакцию 14.03.2023, после переработки 29.03.2023.*

---

В статье рассмотрена математическая модель деформации тела из несжимаемого трансверсально-изотропного нелинейно-упругого материала. Особое внимание в статье уделяется векторной характеристике трансверсально-изотропного тела, указывающей направление оси трансверсальной изотропии, а также изменению данной характеристики при деформации. Отмечается, что при деформации определённого вида трансверсально-изотропный материал ведёт себя как материал Трелоара. Исследуется частный случай задачи о деформации несжимаемого трансверсально-изотропного нелинейно-упругого цилиндрического слоя, для этого случая получено точное аналитическое решение задачи.

**Ключевые слова:** трансверсальная анизотропия, нелинейность, большие деформации.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 2. С. 17–27.*  
<https://doi.org/10.26456/vtpmk687>

### Введение

В последние несколько десятков лет многие работы, выполненные в рамках теории больших деформаций [1, 5, 6], были посвящены нелинейно-упругим трансверсально-изотропным материалам [2–4]. Тела, внутренняя структура которых состоит из волокон, часто демонстрируют нелинейное поведение. В нелинейной теории упругости описание деформации материала задаётся через функцию энергии деформации, которая зависит от инвариантов деформации. Наличие волокнистой структуры влияет на энергию деформации, изменяя способность тела деформироваться в направлении трансверсальной изотропии.

Так как трансверсально-изотропные нелинейно-упругие материалы представляют собой важный класс материалов, интересным является получение аналитических решений некоторых классов задач для тел, изготовленных из этих материалов. Особенно актуален вопрос об изменении векторной характеристики трансверсальной изотропии тела при деформации.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке проекта РНФ № 22-11-00110.

© Белкин А.Э., 2023

В данной работе рассматривается математическая модель деформации нелинейно-упругого трансверсально-изотропного тела [2, 3] и ее применение к решению конкретной задачи – задачи о выпрямлении сектора кругового цилиндра.

### 1. Математическая модель нелинейно-упругого трансверсально-изотропного материала

Нелинейно-упругий трансверсально-изотропный материал является частным случаем анизотропного нелинейно-упругого материала, описываемого, к примеру, в работах [2, 3]. Его определяющее соотношение имеет вид

$$\mathbf{T} = \chi_U(U, V) \mathbf{F} + \chi_V(U, V) \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} - p \mathbf{I}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{a}$  – вектор, характеризующий направление оси трансверсальной изотропии в деформированном состоянии;  $\mathbf{I}$  – единичный тензор;  $\mathbf{T}$  – тензор истинных напряжений Коши;  $\mathbf{F} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T$  – мера деформации Фингера;  $p$  – множитель Лагранжа;  $\mathbf{P}$  – градиент деформации;  $\chi_U(U, V)$  и  $\chi_V(U, V)$  – функции, определяемые следующим образом:

$$\chi_U(U, V) = 2 \frac{\partial W(U, V)}{\partial U}, \quad \chi_V(U, V) = 2 \frac{\partial W(U, V)}{\partial V}. \quad (2)$$

Функция  $W(U, V)$  характеризует плотность энергии деформации упругого материала;  $U, V$  – функции, определяемые следующим образом:

$$U = \text{tr} \mathbf{F}, \quad V = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a},$$

где  $\text{tr} \mathbf{F}$  – след тензора. В случае рассматриваемой модели несжимаемого трансверсально-изотропного материала функция плотности энергии имеет вид [2, 3]:

$$W(U, V) = \frac{\mu}{2} \left[ (U - 3) + \gamma(V - 1)^2 \right], \quad (3)$$

$\mu$  и  $\gamma$  – заданные константы материала. С учётом (3) формулы (2) принимают вид

$$\chi_U(U, V) = \mu, \quad \chi_V(U, V) = 2\mu\gamma(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - 1). \quad (4)$$

Определяющее соотношение (1) можно переписать в виде:

$$\mathbf{T} = \mu \mathbf{F} + 2\mu\gamma(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 1) \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} - p \mathbf{I}. \quad (5)$$

Анализируя (5), можно заметить, что в случае, если вектор  $\mathbf{A}$  имеет единичную длину, определяющее соотношение для рассматриваемого материала сводится к определяющему соотношению для материала Трелоара, которое имеет вид

$$\mathbf{T} = \mu \mathbf{F} - p \mathbf{I}. \quad (6)$$

Вообще говоря, если в некоторой задаче рассматривается последовательность состояний, то в начальном состоянии вектор трансверсальной изотропии  $\mathbf{A}$  считается нормированным, то есть имеющим единичную длину. Сохранение вектором

$\mathbf{A}$  единичной длины в последующих состояниях, соответствующее вырождению в них формулы (5) до вида (6), придаёт материалу свойства изотропии.

## 2. Постановка задачи о выпрямлении цилиндрической пластины

Рассмотрим следующий пример задачи о деформации нелинейно-упругого трансверсально-изотропного тела. В пространстве расположен цилиндрический слой – сектор полого кругового цилиндра с внешним радиусом  $D$  и внутренним радиусом  $d$ . Слой состоит из несжимаемого нелинейного-упругого трансверсально-изотропного материала, удовлетворяющего определяющему соотношению (5). Данный слой в процессе, рассматриваемом в задаче, переходит из начального состояния (в котором он, собственно, представляет собой сектор полого цилиндра) в конечное путём выпрямления.

В начальном состоянии вводятся декартова прямоугольная система координат  $(x, y, z)$  и цилиндрическая система координат  $(r, \varphi, \varepsilon)$ . Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами выглядит следующим образом:

$$x = r \sin \varphi, \quad y = \varepsilon, \quad z = r \cos \varphi. \quad (7)$$

Слой характеризуется материальными константами  $\mu$  и  $\gamma$ . В начальном состоянии вектор трансверсальной изотропии слоя имеет вид

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_\varepsilon \mathbf{e}_\varepsilon,$$

где  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\varepsilon$  – орты цилиндрической системы координат:

$$\mathbf{e}_r = \cos(\varphi) \mathbf{i}_x + \sin(\varphi) \mathbf{i}_y, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \mathbf{i}_x + \cos(\varphi) \mathbf{i}_y, \quad \mathbf{e}_\varepsilon = \mathbf{i}_z.$$

Векторы  $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$  – орты прямоугольной декартовой системы координат начального состояния.

Переход в конечное состояние описывается уравнениями:

$$X = f(r), \quad Y = \alpha \varepsilon, \quad Z = \tau \varphi. \quad (8)$$

Формулы (8) описывают выпрямление цилиндрического слоя, после которого он принимает вид прямоугольной плиты. В (8)  $(X, Y, Z)$  – прямоугольная декартова система координат в конечном состоянии. Числа  $\alpha, \tau$  – параметры деформации, определяющие зависимость положения точек слоя по осям  $Y, Z$  от первоначальных координат  $\varepsilon, \varphi$ . Функция  $f$  – неизвестная функция, определяющая деформацию слоя в радиальном направлении и подлежащая определению в процессе решения задачи.

Целью является определение напряжений  $\mathbf{T}$  в слое в конечном состоянии.

## 3. Образ вектора трансверсальной изотропии в конечном состоянии

Основной характеристикой деформации, соответствующей переходу из начального в конечное состояние, является [7] градиент деформации  $\mathbf{P}$ . Вследствие (7) и (8), градиент деформации имеет вид:

$$\mathbf{P} = \frac{d(X, Y, Z)}{d(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \frac{df}{dr} \sin \varphi & 0 & \frac{df}{dr} \cos \varphi \\ 0 & \alpha & 0 \\ \frac{\tau \cos \varphi}{r} & 0 & -\frac{\tau \sin \varphi}{r} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Вектор  $\mathbf{A}$  в начальном состоянии может быть записан в прямоугольной системе координат:

$$\mathbf{A} = (A_r \cos(\varphi) - A_\varphi \sin(\varphi)) \mathbf{i}_x + (A_r \sin(\varphi) + A_\varphi \cos(\varphi)) \mathbf{i}_y + A_\varepsilon \mathbf{i}_z. \quad (10)$$

Образ вектора  $\mathbf{A}$  в конечном состоянии обозначим  $\mathbf{a} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$ . Используя (9) и (10), можем определить компоненты  $\mathbf{a}$  в системе координат  $(X, Y, Z)$ :

$$\mathbf{a} = a_X \mathbf{i}_X + a_Y \mathbf{i}_Y + a_Z \mathbf{i}_Z,$$

$$a_X = \sin \varphi (A_r \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi) \frac{df}{dr} + \cos \varphi (A_r \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi) \frac{df}{dr},$$

$$a_Y = A_\varepsilon \alpha,$$

$$a_Z = (A_r \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi) \frac{\tau \cos \varphi}{r} - (A_r \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi) \frac{\tau \sin \varphi}{r}.$$

Векторы  $\mathbf{i}_X, \mathbf{i}_Y, \mathbf{i}_Z$  – орты прямоугольной декартовой системы координат конечного состояния. Путём упрощения последних выражений получаем:

$$\mathbf{a} = A_r \frac{df}{dr} \mathbf{i}_X + A_\varepsilon \alpha \mathbf{i}_Y + \frac{A_\varphi \tau}{r} \mathbf{i}_Z. \quad (11)$$

Определяющее соотношение (5) для конечного состояния записывается:

$$\mathbf{T} = \mu \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T + 2\mu\gamma (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 1) \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} - p \mathbf{I}. \quad (12)$$

Выражения  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$  и  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$ , участвующие в формуле (12), принимают, исходя из (11), вид:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = A_r^2 \left( \frac{df}{dr} \right)^2 + A_\varepsilon^2 \alpha^2 + \frac{A_\varphi^2 \tau^2}{r^2},$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} = \begin{pmatrix} A_r^2 \left( \frac{df}{dr} \right)^2 & A_r A_\varepsilon \alpha \frac{df}{dr} & \frac{A_r A_\varphi \tau \frac{df}{dr}}{r} \\ A_r A_\varepsilon \alpha \frac{df}{dr} & A_\varepsilon^2 \alpha^2 & \frac{A_\varphi A_\varepsilon \alpha \tau}{r} \\ \frac{A_r A_\varphi \tau \frac{df}{dr}}{r} & \frac{A_\varphi A_\varepsilon \alpha \tau}{r} & \frac{A_\varphi^2 \tau^2}{r^2} \end{pmatrix}.$$

#### 4. Кинематика перехода в конечное состояние

Единственной неизвестной характеристикой перемещения точек слоя во время деформации является функция  $f(r)$ . Её можно определить, используя условия несжимаемости материала слоя, согласно которому, должно выполняться равенство

$$\det \mathbf{P} = 1.$$

Используя (9), последнюю формулу можно переписать как:

$$\alpha\tau \frac{df}{dr} = -r. \quad (13)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (13) следует дополнить граничным условием для однозначного определения функции  $f(r)$ . Так как расположение центра системы координат  $(X, Y, Z)$ , вообще говоря, может быть произвольным, выберем его так, чтобы плоскость  $X = 0$  совпадала с плоскостью, в которую переходит  $r = d$ , что даст нам искомое граничное условие:

$$f(d) = 0. \quad (14)$$

Решение задачи (13)-(14):

$$f(r) = \frac{d^2 - r^2}{2\alpha\tau}.$$

В итоге, формулы (8) принимают вид:

$$X = \frac{d^2 - r^2}{2\alpha\tau}, \quad Y = \alpha\varepsilon, \quad Z = \tau\varphi. \quad (15)$$

В некоторых работах, к примеру, в [8], несжимаемый нелинейно-упругий слой, описываемый в соответствии с постановкой данной задачи, является одним из совокупности слоёв, образующих вместе составную плиту после одновременного выпрямления. В этом случае граничное условие претерпевает модификацию, принимая вид:

$$f(d) = F, \quad (16)$$

где  $X = F$  – координата (в конечном состоянии) границы соседнего слоя, соединяемой с границей  $r = d$  текущего рассматриваемого слоя. Решение задачи (13), (16) в таком случае имеет вид:

$$f(r) = F + \frac{d^2 - r^2}{2\alpha\tau}.$$

## 5. Определение напряжений в конечном состоянии

Согласно (12), формулы для вычисления нормальных компонент тензора напряжений имеют вид:

$$T_{11} = \mu(f'(r))^2 + 2\mu\gamma A_r^2 \left( A_r^2 (f'(r))^2 + \frac{A_\varepsilon^2 \tau^2}{r^2} + A_\varphi^2 \alpha^2 - 1 \right) (f'(r))^2 - p,$$

$$T_{22} = \alpha^2 \mu + 2A_\varepsilon^2 \alpha^2 \mu\gamma \left( A_r^2 (f'(r))^2 + A_\varepsilon^2 \alpha^2 + \frac{A_\varphi^2 \tau^2}{r^2} - 1 \right) - p,$$

$$T_{33} = \frac{\tau^2 \mu}{r^2} + \frac{2A_\varphi^2 \tau^2 \mu \gamma}{r^2} \left( A_r^2 (f'(r))^2 + A_\varepsilon^2 \alpha^2 + \frac{A_\varphi^2 \tau^2}{r^2} - 1 \right) - p.$$

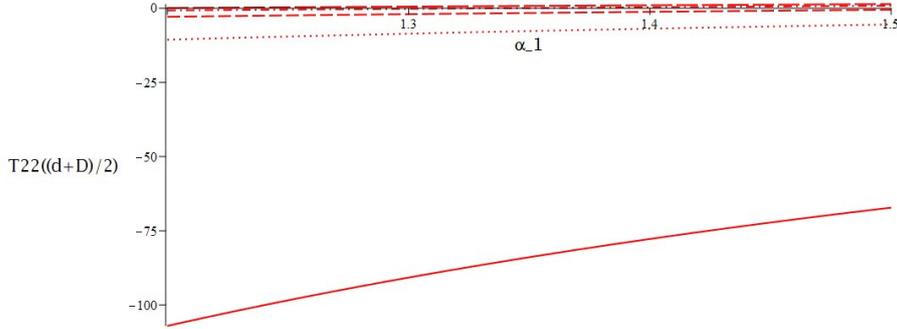
Давление  $p$  может быть вычислено из условия  $T_{11} = 0$ . В итоге  $T_{22}$  и  $T_{33}$  принимают вид:

$$\begin{aligned} T_{22} &= \alpha^2 \mu + 2A_\varepsilon^2 \alpha^2 \mu \gamma \left( A_r^2 (f'(r))^2 + A_\varepsilon^2 \alpha^2 + \frac{A_\varphi^2 \tau^2}{r^2} - 1 \right) - \mu (f'(r))^2 - \\ &\quad - 2\mu \gamma A_r^2 \left( A_r^2 (f'(r))^2 + A_\varepsilon^2 \alpha^2 + \frac{A_\varphi^2 \tau^2}{r^2} - 1 \right) (f'(r))^2, \\ T_{33} &= \frac{\tau^2 \mu}{r^2} + \frac{2A_\varphi^2 \tau^2 \mu \gamma}{r^2} \left( A_r^2 (f'(r))^2 + A_\varepsilon^2 \alpha^2 + \frac{A_\varphi^2 \tau^2}{r^2} - 1 \right) - p. \end{aligned}$$

Таким образом, последние формулы позволяют определить напряжения в каждой точке несжимаемого нелинейно-упругого трансверсально-изотропного слоя. Напряжение  $T_{11}$ , как указано выше, удовлетворяет условию равновесия, то есть,  $T_{11} = 0$ .

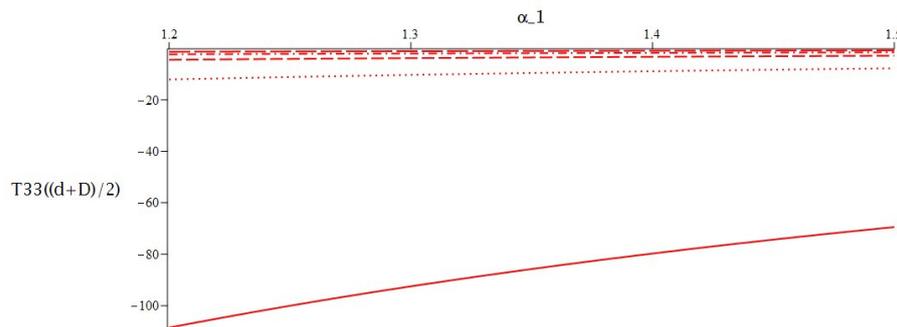
## 6. Численные исследования

Результаты численных исследований, представленных ниже, демонстрируют зависимость напряжений в конечном состоянии в центре слоя от параметров деформаций. Каждый график в данном подпункте изображает зависимость напряжения в точке слоя  $(d + D)/2$  от одного из параметров деформации –  $\alpha$ . При этом, разные графики на одном рисунке соответствуют различным значениям параметра  $\tau$ . На Рис. 1 и Рис. 2 изображены графики значений соответственно  $T_{22}$  и  $T_{33}$  при  $A_\varphi = 1$ ,  $A_r = A_\varepsilon = 0$ .



**Рис. 1:** Зависимости напряжений  $T_{22}$  в центральной точке слоя в конечном состоянии от параметра  $\alpha$  при различных значениях  $\tau$

Сплошному графику соответствует  $\tau = 0, 1$ , точечному –  $\tau = 0, 3$ , пунктирному с короткими штрихами –  $\tau = 0, 5$ , точно-пунктирному –  $\tau = 0, 7$ , пунктирному с



**Рис. 2:** Зависимости напряжений  $T_{33}$  в центральной точке слоя в конечном состоянии от параметра  $\alpha$  при различных значениях  $\tau$

длинными штрихами –  $\tau = 0,9$ . Параметр  $\alpha$  изменяется от 0,1 до 1,5. Параметры материала  $\mu = 1$ ,  $\gamma = 1$ . Размеры слоя  $d = 0,5$ ,  $D = 2$ .

### Заключение

Рассмотрена математическая модель деформации тела из несжимаемого трансверсально-изотропного нелинейно-упругого материала. Эта модель содержит векторную характеристику трансверсально-изотропного тела, которая указывает направление оси трансверсальной изотропии, причем при деформации происходит изменение величины и направления данного вектора. Отмечен тот факт, что при деформации определённого вида трансверсально-изотропный материал ведёт себя как материал Трелоара, причём это зависит от преобразования вектора трансверсальной изотропии. Исследован частный случай задачи о деформации несжимаемого трансверсально-изотропного нелинейно-упругого цилиндрического слоя. Для этого случая построено точное аналитическое решение задачи. Приведены некоторые результаты расчетов.

Результаты исследования могут быть полезны в дальнейшем при их применении к решению задач теории наложения больших деформаций [8–12].

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. Левину Владимиру Анатольевичу и д.ф.-м.н. Зингерману Константину Моисеевичу за помощь в подготовке работы.

### Список литературы

- [1] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [2] Merodio J., Ogden R.W. Mechanical response of fiber-reinforced incompressible non-linearly elastic solids // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2005. № 40. Pp. 213–227.
- [3] Merodio J., Ogden R.W. Material instabilities in fiber-reinforced nonlinearly elastic solids under plane deformation // Archives of Mechanics. 2002. № 54. Pp. 525–552.

- [4] O'Shea D.J., Attard M.M., Kellermann D.C. Hyperelastic constitutive modelling for transversely isotropic composites and orthotropic biological tissues // *International Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 169. Pp. 1–20.
- [5] Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity*. Oxford University Press, 1975.
- [6] Mooney M. A theory of large elastic deformation // *Journal of Applied Physics*. 1940. Vol. 11. Pp. 582–592. <https://doi.org/10.1063/1.1712836>
- [7] Левин В.А., Зингерман К.М., Белкин А.Э. Некоторые результаты точного решения задачи теории многократного наложения больших деформаций о соединении предварительно нагруженных криволинейных слоёв из нелинейно упругого материала // *Материалы конференции "Ломоносовские чтения-2021"*.
- [8] Levin V.A., Tarasiev G.S. Superposition of large elastic deformations in the space of final-states // *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1980. Vol. 251, № 63. ID 66.
- [9] Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution to the problem of biaxial loading of a micropolar elastic plate made by joining two prestrained arc-shaped layers under large strains // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2021. Vol. 88. ID 104237.
- [10] Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51. Pp. 1403–1409.
- [11] Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. Multiple joined prestressed orthotropic layers under large strains // *International Journal of Engineering Science*. 2018. Vol. 133. Pp. 47–59.
- [12] Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. Vol. 67-68. Pp. 244–249.

#### Образец цитирования

Белкин А.Э. Моделирование выпрямления нелинейно-упругого цилиндрического слоя с учетом изменения направления трансверсальной изотропии // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2023. №2. С.17–27. <https://doi.org/10.26456/vtpmk687>

**Сведения об авторах****1. Белкин Антон Эдуардович**

аспирант кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.

*Россия, 300012, г. Тула, проспект Ленина, 95, ТГУ.*

*E-mail: [antonedurd2020@mail.ru](mailto:antonedurd2020@mail.ru)*

# MODELING OF RECTIFICATION OF A NONLINEAR-ELASTIC CYLINDRICAL LAYER TAKING INTO ACCOUNT THE CHANGE IN THE DIRECTION OF TRANSVERSAL ISOTROPY

**Belkin A.E.**

Tula State University, Tula

---

*Received 14.03.2023, revised 29.03.2023.*

---

The article considers a mathematical model of the deformation of a body made of an incompressible transversally isotropic nonlinear elastic material. Particular attention is paid to the vector characteristic of a transversally isotropic body, which indicates the direction of the axis of transversal isotropy, as well as to the change in this characteristic during deformation. It is noted that under deformation of a certain type, a transversely isotropic material behaves like a Treloar material. A special case of the problem of deformation of an incompressible transversally isotropic nonlinear elastic cylindrical layer is studied, and an exact analytical solution of the problem is obtained for this case.

**Keywords:** transversal anisotropy, non-linearity, large deformations.

## Citation

Belkin A.E., “Modeling of rectification of a nonlinear-elastic cylindrical layer taking into account the change in the direction of transversal isotropy”, *Vestnik TsvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 2, 17–27 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk687>

## References

- [1] Lurie A.I., *Nelinejnaya teoriya uprugosti [Nonlinear theory of elasticity]*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (in Russian), 512 pp.
- [2] Merodio J., Ogden R.W., “Mechanical response of fiber-reinforced incompressible non-linearly elastic solids”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005, № 40, 213–227.
- [3] Merodio J., Ogden R.W., “Material instabilities in fiber-reinforced nonlinearly elastic solids under plane deformation”, *Archives of Mechanics*, 2002, № 54, 525–552.
- [4] O’Shea D.J., Attard M.M., Kellermann D.C., “Hyperelastic constitutive modelling for transversely isotropic composites and orthotropic biological tissues”, *International Journal of Solids and Structures*, **169** (2019), 1–20.
- [5] Treloar L.R.G., *The Physics of Rubber Elasticity*, Oxford University Press, 1975.

- [6] Mooney M., “A theory of large elastic deformation”, *Journal of Applied Physics*, **11** (1940), 582–592, <https://doi.org/10.1063/1.1712836>.
- [7] Levin V.A., Zingerman K.M., Belkin A.E., “Nekotorye rezultaty tochnogo resheniya zadachi teorii mnogokratnogo nalozheniya bolshikh deformatsij o soedinenii predvaritelno nagruzhennykh krivolinejnykh slojov iz nelinejno uprugogo materiala”, *Materialy konferentsii "Lomonosovskie chteniya-2021"* (in Russian).
- [8] Levin V.A., Tarasiev G.S., “Superposition of large elastic deformations in the space of final-states”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **251**:63 (1980), 66.
- [9] Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M., “An exact solution to the problem of biaxial loading of a micropolar elastic plate made by joining two prestrained arc-shaped layers under large strains”, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **88** (2021), 104237.
- [10] Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M., “The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains”, *International Journal of Solids and Structures*, **51** (2014), 1403–1409.
- [11] Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M., “Multiple joined prestressed orthotropic layers under large strains”, *International Journal of Engineering Science*, **133** (2018), 47–59.
- [12] Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M., “An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains”, *International Journal of Solids and Structures*, **67-68** (2015), 244–249.

#### Author Info

1. **Belkin Anton Eduardovich**

Postgraduate student at the Department of Applied Mathematics and Informatics, Tula State University.

Russia, 300012, Tula, 95 Lenina av., Tula State University.

E-mail: [antonedurd2020@mail.ru](mailto:antonedurd2020@mail.ru)