

**АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ  
В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С АБСОЛЮТНО ТВЁРДЫМИ  
ВКЛЮЧЕНИЯМИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ**

**Бирюков Д.Р.**

Тульский государственный университет, г. Тула

---

*Поступила в редакцию 12.03.2023, после переработки 27.03.2023.*

---

Статья представляет собой первую часть построения универсального алгоритма решения задачи дифракции звука на системе упругих неоднородных анизотропных тел. В ней поставлена вариация данной задачи в первом приближении – это задача об определении давления в жидкой области при заданном распределении давления на её внешней границе. Жидкость, которой заполнена область, считается идеальной. Подразумевается, что давление как внутри жидкости, так и на её границе, совершает гармонические колебания (установившиеся). Внутри области расположено произвольное количество твёрдых односвязных тел. Требуется определить давление жидкости с учётом влияния твёрдых тел. Для решения задачи используется метод конечных элементов, алгоритм применения которого подробно описан. Жидкая область разбивается на тетраэдральные элементы, внутри которых неизвестное давление аппроксимируется с помощью функций формы и введённой локальной системы координат. Для каждого тетраэдрального элемента строится локальная матрица на основе преобразованного однородного уравнения Гельмгольца, которому удовлетворяет давление внутри жидкости ввиду того факта, что поле колебаний является установившимся. Локальные матрицы элементов позволяют сформировать разреженную глобальную матрицу для системы уравнений, решение которой определяет искомые значения давления в узлах сетки. В работе подробно описывается вычисление элементов локальных матриц с учётом жидких и абсолютно твёрдых границ тетраэдральных элементов; учёт закреплений (обусловленных заданным колебанием давления на границе идеальной жидкой области), в том числе преобразование всех элементов локальных матриц и правых частей систем линейных алгебраических уравнений при учёте закреплений; объединение локальных матриц и соответствующих им правых частей уравнений в глобальную разреженную матрицу. Шаги алгоритма универсальны для широкого класса задач. Представлен способ дальнейшего обобщения задачи на случай включения в жидкую область упругих тел со сложной внутренней структурой.

**Ключевые слова:** идеальная жидкость, гармонические колебания, метод конечных элементов, дифракция.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 2. С. 37–50.*  
<https://doi.org/10.26456/vt.pmk689>

## Введение

Метод конечных элементов [1, 2] представляет собой один из наиболее универсальных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных. В рамках механики сплошной среды и математической физики метод конечных элементов часто и широко используется для решения задачи гидродинамики (и, в частности, гидроакустики) и теории упругости. К примеру, в работах [3–5] метод конечных элементов рассматривается применительно к задачам акустики.

Решению задач, связанных со взаимодействием колебаний жидкости с телами сложной формы (а также со сложной структурой свойств материала) посвящено существенно меньше работ, чем исследованиям аналогов данных тел с простыми формой и свойствами. Актуальность использования метода конечных элементов в данной сфере состоит в том, что его применение способствует анализу влияния сложности формы тела, особенностей материала и жидкой среды на распространяющиеся в ней колебания.

Данная работа является первой частью исследования, посвящённого построению универсального алгоритма решения задачи дифракции звука в области, содержащей произвольную совокупность упругих тел. Предполагается, что каждое из этих тел имеет сколь угодно сложную структуру, в том числе может быть неоднородным или анизотропным, иметь полости разных размеров и т.п. Границы жидкой области и абсолютно твёрдых тел могут иметь произвольную замкнутую форму, что делает описываемый алгоритм достаточно универсальным. В текущей работе, содержащей начальную стадию исследования, рассматривается первое приближение задачи. Структура тел в этом случае выбрана упрощённая: более точно, тела считаются абсолютно твёрдыми. Это позволяет исключить часть алгоритма, однако обобщение на случай неоднородных и анизотропных тел в дальнейшем не представляет особенной сложности. Условие рассеяния звука в первом приближении заменяется на условие известного распределённого давления на границе жидкой области.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается некоторая трёхмерная (вообще говоря, возможно аналогичное рассмотрение и двумерного случая) область  $Q$ , заполненная идеальной жидкостью с плотностью  $\rho$  и скоростью звука  $c$ , в которую помещено некоторое количество односвязных (то есть, не имеющих полостей) абсолютно твёрдых тел  $\{G_i\}_{i=1}^K$  (в частности, допускается вариант с отсутствием данных тел). Области  $G_i$  не имеют общих точек и границ, граница каждой области  $G_i$  является границей между ней и жидкой областью  $Q$ . Внешняя граница жидкой области  $Q$  будет обозначена

как  $\Gamma$ , граница между областью  $G_i$  и  $Q$  как  $\Gamma_i$ . Все границы  $\Gamma$ ,  $\Gamma_i$  могут иметь произвольную замкнутую форму.

В задаче предполагается, что по внешней границе  $\Gamma$  области  $Q$  задано распределение давления

$$p|_{\Gamma} = P_{\Gamma}(x, y, z) e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

где  $x, y, z$  – координаты введённой глобальной прямоугольной декартовой системы;  $\omega$  – циклическая частота колебательного воздействия внешней среды. Также предполагается, что во внутренности области  $Q$  распространяются установившиеся колебания (вызванные воздействием (1) из внешней среды)

$$p = P(x, y, z) e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

удовлетворяющие однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta P + k^2 P = 0, \quad (3)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $k = \frac{\omega}{c}$  – волновое число.

В задаче требуется определить поле давления  $P$  внутри области  $Q$ , содержащей абсолютно твёрдые включения  $G_i$ , при заданном давлении  $P_{\Gamma}$  на внешней границе.

На Рис. 1 изображён один из возможных случаев геометрии задачи, в двумерном аналоге текущей постановки (при решении задачи используется трёхмерная постановка).

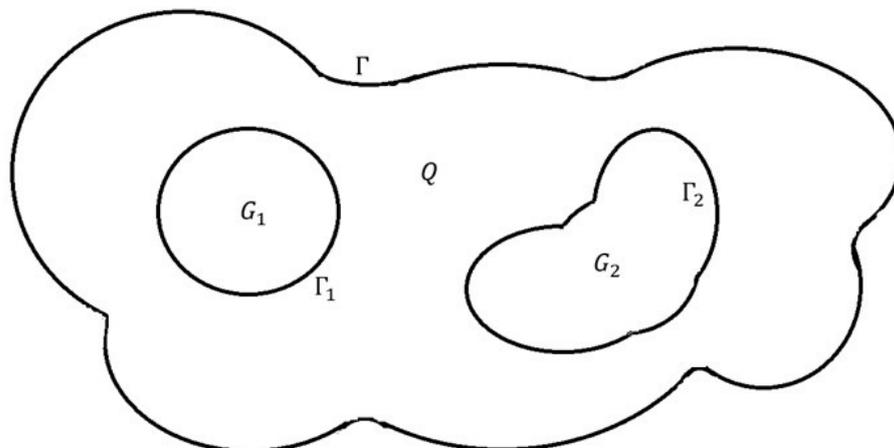


Рис. 1: Иллюстрация к одному из возможных реализаций двумерного аналога постановки задачи

## 2. Описание конечно-элементной сетки и используемых обозначений

Для решения задачи используется метод конечных элементов (МКЭ) – численный метод решения дифференциальных уравнений, заключающийся в разбиении

области, в которой ищется решение, на подобласти (конечные элементы) и аппроксимацией искомой функции некоторой функцией заданного вида внутри каждого элемента.

Для использования МКЭ в области  $Q$  вводится конечно-элементная сетка:

$$Q = \bigcup_{i=1}^{K_e} E_i. \quad (4)$$

В качестве формы каждого из элементов  $E_i$  выбран тетраэдр, порядок каждого элемента выбран равным 1. Вершины элементов – узлы. Множество всех узлов сетки обозначим  $U$ . Для множества узлов, находящихся на границе  $\Gamma$ , введём обозначение  $U_\Gamma$ ; для множества узлов, находящихся на границе  $\Gamma_i$ , введём обозначение  $U_i$ . Заметим, что, вследствие постановки задачи, все множества узлов  $U_\Gamma, U_1, U_2, \dots, U_K$  попарно не пересекаются. Также следует ввести дополнительное требование для конечно-элементной сетки, согласно которому, каждое из множеств узлов  $U_\Gamma, U_1, U_2, \dots, U_K$  должно быть непустым. Наконец, множество узлов, находящихся во внутренности множества  $Q$ , обозначим

$$U_M = U \setminus \left( U_\Gamma \cup \left( \bigcup_{i=1}^K U_i \right) \right). \quad (5)$$

Заметим, что сетка не охватывает пространство внутри абсолютно твёрдых включений  $G_i$ . Все узлы, входящие в тело  $G_i$ , должны находиться на границе  $\Gamma_i$ . Данное требование необходимо для применения метода, описываемого в данной работе. Вообще говоря, модификация данного метода позволяет исключить упомянутое требование.

Для всех элементов, как указано в (4), введена нумерация от 1 до  $K_e$ . Точно также, для всех узлов из  $U$  вводится нумерация от 1 до  $K_U$ . Глобальные декартовы координаты  $k$ -ого узла обозначаются  $x_k, y_k, z_k$ . Значение искомого давления  $P(x, y, z)$  в  $k$ -ом узле обозначим  $p_k$ .

Рассмотрим отдельный тетраэдральный элемент  $E_i$ . Помимо того, что все узлы из  $U$  имеют строгую нумерацию, узлы, являющиеся вершинами  $E_i$ , также должны иметь нумерацию внутри элемента – от 1 до 4. В дальнейшем для глобального номера  $j$ -ого узла  $i$ -ого элемента будет использоваться обозначение  $u_{ij}$  ( $i$  изменяется от 1 до  $K_e$ ;  $j$  изменяется от 1 до 4). Таким образом, глобальные координаты и искомое давление в  $j$ -ом узле  $i$ -ого элемента можно обозначить  $x_{u_{ij}}, y_{u_{ij}}, z_{u_{ij}}, p_{u_{ij}}$ , но для краткости записи вместо этого будем записывать  $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, p_{ij}$ .

С каждым элементом  $E_i$  связывается локальная прямоугольная декартова система координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  и набор функций формы  $\{N_j\}_{j=1}^4$ , где каждая из функций  $N_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  задаётся следующим образом:

$$N_1 = 1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3, \quad N_2 = \xi_1, \quad N_3 = \xi_2, \quad N_4 = \xi_3. \quad (6)$$

Функции (6) соответствуют тетраэдральной форме элемента. Заметим, что хотя каждому элементу соответствует своя локальная координатная система (и, следовательно, свои функции формы), координатные функции для любого элемента имеют вид (6), в связи с чем индекс элемента для них можно не указывать.

Связь глобальных декартовых координат и локальных для элемента  $E_i$  имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^4 x_{ij} N_j (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ y &= \sum_{j=1}^4 y_{ij} N_j (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ z &= \sum_{j=1}^4 z_{ij} N_j (\xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{aligned} \quad (7)$$

Давление  $P(x, y, z)$  внутри элемента  $E_i$  интерполируется по следующей формуле:

$$P(x, y, z) = \sum_{j=1}^4 p_{ij} N_j (\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (8)$$

Таким образом, определив значения давления  $p_{ij}$  в узлах сетки, можно определить давление внутри каждого элемента по формуле (8).

### 3. Преобразование уравнения Гельмгольца для построения матрицы элемента

Рассмотрим отдельный элемент  $E_i$ . Так как элемент заполнен идеальной жидкостью (участками твёрдых включений  $G_i$ , которые могут пересекаться с элементами, пренебрегаем), колебания в нём удовлетворяют уравнению Гельмгольца (3). Используя предложенный в [6–8] метод, домножим обе части (3) на  $N_j$  и проинтегрируем по объёму элемента  $G_i$ :

$$\int_{E_i} N_j (\Delta P + k^2 P) dv = 0, \quad (9)$$

где  $dv$  – элементарный объём. Описанная процедура выполняется для каждой функции формы (6). Таким образом, для данного элемента получаем 4 уравнения вида (9), каждое из которых можно представить в виде:

$$\int_{E_i} (N_j \nabla (\nabla P) + N_{jk}^2 P) dv = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) можно преобразовать, используя формулу  $f \nabla g = \nabla (fg) - g \nabla f$ :

$$\int_{E_i} \nabla (N_j \nabla P) dv - \int_{E_i} (\nabla N_j) \cdot (\nabla P) dv + \int_{E_i} N_j k^2 P dv = 0. \quad (11)$$

Первый интеграл в равенстве (11) можно преобразовать в интеграл по поверхности, используя формулу Гаусса-Остроградского:

$$\int_{\partial E_i} (N_j \nabla P) \cdot \bar{n} ds - \int_{E_i} (\nabla N_j) \cdot (\nabla P) dv + \int_{E_i} N_j k^2 P dv = 0, \quad (12)$$

где  $\partial E_i$  – поверхность элемента  $E_i$ ;  $\bar{n}$  – вектор внешней нормали к поверхности  $\partial E_i$ ;  $ds$  – элементарная площадь.

Для каждого элемента на основе системы уравнений (12) строится система линейных алгебраических уравнений, в матричном виде записываемая как

$$M_i \bar{P}_i = \bar{F}_i, \quad (13)$$

где  $M$  – матрица элемента (4 строки, 4 столбца; каждая строка и столбец соответствуют одному узлу/координатной функции);  $\bar{P}_i = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4})^T$  – вектор неизвестных;  $\bar{F}_i$  – вектор правой части. Каждый элемент  $(M_i)_{jk}$  матрицы  $M_i$  получается из коэффициента при  $p_{ik}$  в уравнении (12), соответствующем функции формы  $N_j$ . Соответственно, правая часть  $\bar{F}_i$  в (13) получается из свободных членов в уравнении (12).

В дальнейшем из матриц  $M_i$  отдельных элементов  $E_i$  строится глобальная матрица путём суммирования элементов матриц  $M_i$  на пересечении соответствующих строк и столбцов. Учитывая это, можно заранее упростить уравнение (12). В частности, для первого слагаемого в (12) – интеграла по границе – можно не рассматривать участки границы между двумя жидкими элементами, так как при построении глобальной матрицы соответствующие элементы будут равны по величине и иметь противоположный знак – то есть, будут взаимно исключаться. Также, для элементов, участки границ которых лежат на границе  $\Gamma$ , первое слагаемое в (12) вносит вклад только для узлов, лежащих на  $\Gamma$ . Так как в дальнейшем для данных узлов будет производиться процедура закрепления, этот вклад не будет влиять на конечный результат. Таким образом, интеграл по поверхности в (12) достаточно рассматривать только по участкам границы между элементом  $E_i$  и абсолютно твёрдыми телами. В этом случае (12) переписывается так:

$$\int_{\partial' E_i} (N_j \nabla P) \cdot \bar{n} ds - \int_{E_i} (\nabla N_j) \cdot (\nabla P) dv + \int_{E_i} N_j k^2 P dv = 0, \quad (14)$$

где  $\partial' E_i$  – абсолютно твёрдый участок границы элемента  $E_i$ . Для элементов, не граничащих с абсолютно твёрдыми включениями, (14) имеет вид

$$- \int_{E_i} (\nabla N_j) \cdot (\nabla P) dv + \int_{E_i} N_j k^2 P dv = 0. \quad (15)$$

#### 4. Построение локальной матрицы элемента

Построим матрицу элемента, не имеющего абсолютно твёрдых границ. В этом случае матрица строится на основе (15). Для упрощения записи интегрирование будем выполнять по формуле прямоугольников, хотя допускается использование любой формулы численного интегрирования.

Давление  $P$  в формуле (15) представляется в виде (8). Таким образом, градиент  $\nabla P$ :

$$\nabla P = \sum_{j=1}^4 p_{ij} \nabla N_j. \quad (16)$$

Градиент функции формы  $\nabla N_j$  вычисляется следующим образом:

$$\nabla N_j = \left( \frac{\partial N_j}{\partial x}, \frac{\partial N_j}{\partial y}, \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) = \left( \sum_{l=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x}, \sum_{k=1}^l \frac{\partial N_j}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x}, \sum_{l=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial y} \right). \quad (17)$$

Производные  $\frac{\partial N_j}{\partial \xi_l}$  вычисляются на основе формул (6):

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} = -1, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi_1} = 1, \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial N_4}{\partial \xi_1} = 0,$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi_2} = -1, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi_2} = 1, \quad \frac{\partial N_4}{\partial \xi_2} = 0,$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi_3} = -1, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi_3} = 0, \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi_3} = 0, \quad \frac{\partial N_4}{\partial \xi_3} = 1.$$

Для вычисления производных  $\frac{\partial \xi_l}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi_l}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \xi_l}{\partial z}$  следует, воспользовавшись формулами (7), выразить локальные координаты  $\xi_l$  через глобальные координаты  $x, y, z$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} & x_{i4} \\ y_{i1} & y_{i2} & y_{i3} & y_{i4} \\ z_{i1} & z_{i2} & z_{i3} & z_{i4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Преобразуя (18), получаем:

$$\begin{pmatrix} x - x_{i1} \\ y - y_{i1} \\ z - z_{i1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i2} - x_{i1} & x_{i3} - x_{i1} & x_{i4} - x_{i1} \\ y_{i2} - y_{i1} & y_{i3} - y_{i1} & y_{i4} - y_{i1} \\ z_{i2} - z_{i1} & z_{i3} - z_{i1} & z_{i4} - z_{i1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Используя обратную матрицу, из (19) получаем:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i2} - x_{i1} & x_{i3} - x_{i1} & x_{i4} - x_{i1} \\ y_{i2} - y_{i1} & y_{i3} - y_{i1} & y_{i4} - y_{i1} \\ z_{i2} - z_{i1} & z_{i3} - z_{i1} & z_{i4} - z_{i1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - x_{i1} \\ y - y_{i1} \\ z - z_{i1} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Формула (20) позволяет непосредственно выразить локальные координаты  $\xi_k$  через  $x, y, z$  и получить соответствующие производные  $\frac{\partial \xi_l}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi_l}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \xi_l}{\partial z}$ .

Уравнение (15) принимает вид:

$$\begin{aligned} \int_{E_i} \left[ N_j k^2 \sum_{k=1}^4 (p_{ik} N_k) - \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial N_j}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x} \right) \sum_{k=1}^4 p_{ik} \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial N_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial N_j}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial y} \right) \sum_{k=1}^4 p_{ik} \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial N_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial N_j}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial z} \right) \sum_{k=1}^4 p_{ik} \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial N_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial z} \right) \right] dv = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Выберем в элементе  $E_i$  произвольную точку  $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$ , учитывая, что  $0 \leq \xi_1^* \leq 1, 0 \leq \xi_2^* \leq 1, 0 \leq \xi_3^* \leq 1, \xi_1^* + \xi_2^* + \xi_3^* \leq 1$ . Тогда для вычисления интеграла в левой части (21) можно использовать формулу численного интегрирования

$$\int_{E_i} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dv \approx f(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*) \cdot V_i, \quad (22)$$

где  $V_i$  – объём тетраэдрального элемента  $E_i$ :

$$V_i = \frac{1}{6} \cdot \det \begin{pmatrix} x_{i2} - x_{i1} & x_{i3} - x_{i1} & x_{i4} - x_{i1} \\ y_{i2} - y_{i1} & y_{i3} - y_{i1} & y_{i4} - y_{i1} \\ z_{i2} - z_{i1} & z_{i3} - z_{i1} & z_{i4} - z_{i1} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Таким образом, из (21) следует, что коэффициент при  $p_{ik}$  в уравнении, соответствующем функции формы  $N_j$ , равен:

$$a_{jk} = \left( N_j N_k k^2 - \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial N_j}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x} \right) \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial N_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x} \right) - \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial N_j}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial y} \right) \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial N_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial y} \right) - \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial N_j}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial z} \right) \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial N_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial z} \right) \right) V_i. \quad (24)$$

В формуле (24), в отличие от предыдущих формул, под  $N_j$ ,  $N_k$ ,  $\frac{\partial N_j}{\partial \xi_l}$ ,  $\frac{\partial N_k}{\partial \xi_l}$ ,  $\frac{\partial \xi_l}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi_l}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \xi_l}{\partial z}$  понимаются значения соответствующих функций формы и производных в точке  $(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$  элемента. В итоге, матрица элемента  $M_i$  имеет вид:

$$M_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Вектор свободных членов  $\overline{F}_i$ , в данном случае, является нулевым.

## 5. Абсолютно твердая граница элемента

Предположим, что одна из плоских границ элемента  $E_i$  является абсолютно твёрдой. Это возможно в случае, если 3 узла, лежащих на одной из граней  $E_i$ , входят в одно из множеств  $U_n$ . В этом случае вместо уравнения (15) используется уравнение (14), которое отличается наличием дополнительного слагаемого

$$\int_{\partial' E_i} N_j (\nabla P \cdot \overline{n}) ds. \quad (26)$$

Для удобства рассуждений считаем, что  $\partial' E_i$  совпадает с гранью, вершинами которой являются узлы  $u_{i1}$ ,  $u_{i2}$ ,  $u_{i3}$ . Данные рассуждения естественным образом обобщаются на случай произвольной грани элемента и на случай, когда твёрдая граница состоит из нескольких граней элемента.

Воспользуемся тем фактом, что граница  $\partial' E_i$  является абсолютно твёрдой. В этом случае выполняется условие  $\overline{v} \cdot \overline{n} = 0$ , где  $\overline{v}$  – скорость частиц жидкости (в данном случае на границе  $\partial' E_i$ ),  $\overline{n}$  – нормаль к границе  $\partial' E_i$ . В случае гармонических колебаний выполняется равенство

$$P = i\rho\omega\Psi, \quad (27)$$

где  $\Psi$  – потенциал скорости частиц жидкости (в данном случае на границе  $\partial' E_i$ ). Применяя к обеим частям равенства (27) оператор градиента, получаем:

$$\nabla P = i\rho\omega\nabla\Psi = i\rho\omega\overline{v}. \quad (28)$$

Домножим правую и левую части равенства (28) на вектор нормали  $\overline{n}$ :

$$\nabla P \cdot \overline{n} = i\rho\omega(\overline{v} \cdot \overline{n}) = 0. \quad (29)$$

Вследствие равенства (29), интеграл (26) равен нулю. Таким образом, наличие у элемента абсолютно твёрдой границы не вносит вклада в матрицу элемента. Следует отметить, что данный факт не означает, что абсолютно твёрдые включения не оказывают влияния на решение. Наличие твёрдых тел влияет на построение глобальной матрицы. При отсутствии любого твёрдого тела  $G_q$  на его месте были бы жидкие элементы, локальные матрицы которых вносили бы вклад в глобальную. Таким образом, отсутствие упомянутых жидких элементов и является влиянием твёрдого тела.

## 6. Учетывание закреплений значения давления на границе

Из предыдущих пунктов следует, что матрица любого жидкого элемента, как окружённого другими жидкими элементами, так и имеющего твёрдые границы, имеет вид (25). Элементы матрицы имеют вид (24). Без учёта закреплений, задаваемых в рамках решаемой нами задачи заданным распределённым давлением (1), правая часть системы (13) является нулевой. После построения глобальной матрицы правая часть также останется нулевой, вследствие чего давление в каждом узле (то есть, решение системы) будет равно нулю.

Закрепление производится для каждого узла, входящего в  $U_\Gamma$ . Если  $k$ -ый узел находится на границе  $\Gamma$ , давление в данном узле известно изначально:  $p_k = P_\Gamma(x_k, y_k, z_k)$ . Следовательно, данная переменная перестаёт быть неизвестной, и число уравнений в СЛАУ должно быть уменьшено. Закрепление значения переменной в узле можно производить и после формирования глобальной матрицы, но в случае мелкой сетки обработка глобальной матрицы большого размера может быть невыгодной по времени (в случае реализации алгоритма на ЭВМ). Закрепления такого типа можно учесть ещё на этапе построения локальной матрицы элемента, что более удобно.

Предположим, для некоторого элемента  $E_i$  построена локальная матрица (25), а значение давления в узле с глобальным номером  $k = u_{iJ}$  (то есть, в  $J$ -ом узле данного элемента) закреплено и равно  $p_k = p_{iJ}$ . Чтобы учесть данный факт, следует преобразовать матрицу  $M_i$  и вектор правой части  $\bar{F}_i$ .

Пусть  $M_i = (a_{jk})$ ,  $j, k = 1, 2, 3, 4$  – матрица до закрепления, связанного с  $J$ -ой строкой;  $\tilde{M}_i = (b_{jk})$ ,  $j, k = 1, 2, 3, 4$  – эта же матрица после закрепления  $p_{iJ}$ . Вектор  $\bar{F}_i = (A_j)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  – вектор правой части до закрепления, связанного с  $J$ -ой строкой матрицы;  $\tilde{\bar{F}}_i = (B_j)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  – этот же вектор после закрепления  $p_{iJ}$ . Опишем выражение значений  $b_{jk}$  и  $B_j$  через  $a_{jk}$  и  $A_j$ .

Во-первых, преобразуется  $J$ -ая строка матрицы  $M_i$ . Элемент матрицы на пересечении  $J$ -ых строки и столбца сохраняет своё значение, в то время как все остальные элементы строки принимают значение 0:

$$b_{Jk} = \delta_{Jk} \cdot a_{Jk}, \quad (30)$$

где  $\delta_{r_1 r_2}$  – символ Кронекера, равный 1 при  $r_1 = r_2$  и 0 при  $r_1 \neq r_2$ .  $J$ -ая компонента вектора правой части принимает значение такое, чтобы при решении СЛАУ выполнялось условие закрепления:

$$B_J = a_{JJ} \cdot p_{iJ}. \quad (31)$$

Далее преобразуется каждая другая  $j$ -ая строка матрицы, где  $j \neq J$ . Элемент матрицы на пересечении  $j$ -ой строки и  $J$ -ого столбца принимает значение 0, остальные же элементы строки сохраняют своё значение:

$$b_{jk} = (1 - \delta_{Jk}) \cdot a_{jk}. \quad (32)$$

$j$ -ая компонента вектора правой части изменяется по правилу:

$$B_j = A_j - a_{jJ} \cdot p_{iJ}. \quad (33)$$

Выполнение преобразований (30), (31), (32), (33) для каждой из компонент  $b_{jk}$ ,  $B_j$  осуществляет вышеназванное закрепление. При необходимости выполнить несколько закреплений преобразования матрицы для каждого узла выполняются в любой последовательности. Другими словами, сперва все преобразования (30), (31), (32), (33) выполняются для одной закрепляемой строки, затем – для второй, и так далее. Порядок закрепляемых строк не влияет на итоговый результат.

## 7. Формирование глобальной матрицы и вычисление неизвестных

После формирования локальных матриц  $M_i$  и векторов свободных членов  $\bar{F}_i$  для каждого элемента на их основе строится глобальная матрица  $M_{glob}$  и вектор  $\bar{F}_{glob}$ . Каждый элемент  $(M_{glob})_{JS}$  глобальной матрицы представим в виде:

$$(M_{glob})_{JS} = \sum_{i=1}^{K_e} \left[ \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \left( \delta_{J u_{ij}} \cdot \delta_{S u_{ik}} \cdot (M_i)_{jk} \right) \right]. \quad (34)$$

Другими словами, каждая ячейка на пересечении строки  $J$  и столбца  $S$  матрицы  $M_{glob}$  получается суммированием ячеек матриц  $M_i$  на пересечении строки  $j$ , соответствующей узлу  $J$  (если таковой узел входит в элемент  $E_i$ ) и столбца  $k$ , соответствующего узлу  $S$  (если таковой узел входит в элемент  $E_i$ ).

Аналогично, каждая компонента  $(\bar{F}_{glob})_J$  вектора свободных членов  $\bar{F}_{glob}$  представима в виде:

$$(\bar{F}_{glob})_J = \sum_{i=1}^{K_e} \left[ \sum_{j=1}^4 \left( \delta_{J u_{ij}} \cdot (\bar{F}_i)_j \right) \right]. \quad (35)$$

После формирования матрицы  $M_{glob}$  по формуле (34) и вектора  $\bar{F}_{glob}$  по формуле (35) решается следующая СЛАУ:

$$M_{glob} \cdot (p_1, p_2, p_3, \dots, p_{K_U})^T = \bar{F}_{glob}. \quad (36)$$

Решение СЛАУ (36) позволяет отыскать значения давления в каждом узле множества  $U$ . Ввиду того, что большинство элементов матрицы  $M_{glob}$  являются нулевыми (так как взаимодействуют друг с другом только узлы, находящиеся в одном элементе), матрица  $M_{glob}$  является разреженной, что значительно упрощает решение СЛАУ (36). После определения давления в узлах, определить его значение внутри любой точки любого элемента можно с помощью интерполяции (8). Таким образом, получено решение поставленной задачи.

## 8. План обобщения алгоритма на случай тел сложной структуры

Описанный алгоритм предполагает, что расположенные в жидкости тела являются абсолютно твёрдыми. В следующих частях исследования данное ограничение будет снято. В этом случае пространство внутри каждого тела также подвергается разбиению на конечные элементы. Элементы жидкости и элементы твёрдых тел имеют общие границы, и условие равенства нулю нормальной скорости жидкости на такой границе заменяется на равенство нормальных скоростей жидкости и упругого тела. В этом случае интеграл (26) уже не является нулевым и вносит вклад в матрицу элемента, граничащего с телом. Так как внутри тела отсутствует потенциал смещений (поле смещений упругого тела не является потенциальным), требуется рассматривать в узлах тела значения компонент смещений вместо значения потенциала. Таким образом, в узлах на границе между жидкостью и телом должны рассматриваться значения как потенциала, так и компонент смещений. Интеграл (26) тогда служит для выражения связи между потенциалом и смещением на границе.

### Заключение

В работе описано решение задачи об определении давления в идеальной жидкости, частицы которой совершают гармонические колебания, при заданном распределении давления по границе области. Решение задачи получено с помощью одного из численных методов – метода конечных элементов. Гибкость данного метода позволяет в дальнейшем обобщить постановку задачи и применять описанный алгоритм (с некоторыми модификациями) для более сложных задач, к примеру, для задачи дифракции звуковых волн на совокупности тел сложной формы и со сложной структурой, в том числе для неоднородных и анизотропных тел.

### Благодарности

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н., проф. Скобельцыну Сергею Алексеевичу за помощь в подготовке материала.

### Список литературы

- [1] Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
- [2] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с.
- [3] Gan H., Levin P.L., Ludwig R. Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain // Journal of the Acoustical Society of America. 1993. Vol. 94, № 3. Pp. 1651–1662.
- [4] Harari I., Hughes T.J.R. Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1991. Vol. 87. Pp. 59–96.

- [5] Ihlenburg F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer Publishing Company, Inc., 2013. 226 p.
- [6] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.
- [7] Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Witt R.J. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. New York: John Wiley and Sons, 2002. 736 p.
- [8] Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. М.: Физматлит, 2007. 392 с.

#### Образец цитирования

Бирюков Д.Р. Алгоритм исследования гармонических колебаний в идеальной жидкости с абсолютно твёрдыми включениями с помощью метода конечных элементов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 2. С. 37–50. <https://doi.org/10.26456/vtprmk689>

#### Сведения об авторах

**1. Бирюков Данила Русланович**

аспирант кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.

*Россия, 300012, г. Тула, проспект Ленина, 95, ТГУ.*

*E-mail: [danilabirukov@rambler.ru](mailto:danilabirukov@rambler.ru)*

# ALGORITHM FOR STUDYING HARMONIC OSCILLATIONS IN AN IDEAL FLUID WITH ABSOLUTELY SOLID INCLUSIONS USING THE FINITE ELEMENT METHOD

**Biryukov D.R.**

Tula State University, Tula

---

*Received 12.03.2023, revised 27.03.2023.*

---

The current work is the first part of constructing a universal algorithm for solving the problem of sound diffraction on a system of elastic inhomogeneous anisotropic bodies. In the current work, a variation of this problem is posed in the first approximation - this is the problem of determining the pressure in a liquid region for a given pressure distribution on its outer boundary. The fluid that fills the area is considered ideal. It is understood that the pressure both inside the liquid and at its boundary performs harmonic oscillations (steady-state). An arbitrary number of solid simply connected bodies are located inside the region. It is required to determine the pressure of the liquid, taking into account the influence of solids. To solve the problem, the finite element method is used, the application algorithm of which is described in detail. The liquid region is divided into tetrahedral elements, inside which the unknown pressure is approximated using the shape functions and the introduced local coordinate system. For each tetrahedral element, a local matrix is constructed based on the transformed homogeneous Helmholtz equation, which is satisfied by the pressure inside the liquid due to the fact that the oscillation field is steady. Local matrices of elements make it possible to form a sparse global matrix for a system of equations, the solution of which determines the required pressure values at the grid nodes. The paper describes in detail the calculation of the elements of local matrices, taking into account liquid and absolutely solid boundaries of tetrahedral elements; taking into account pinnings (due to a given pressure fluctuation at the boundary of an ideal liquid region), including the transformation of all elements of local matrices and the right parts of systems of linear algebraic equations when taking into account pinnings; the union of local matrices and the corresponding right-hand sides of equations into a global sparse matrix. The described steps of the algorithm are universal for a wide class of problems. Also, a method for further generalization of the problem to the case of inclusion of elastic bodies with a complex internal structure into the liquid region is described.

**Keywords:** ideal fluid, harmonic oscillations, finite element method, diffraction.

## Citation

Biryukov D.R., "Algorithm for Studying Harmonic Oscillations in an Ideal Fluid with Absolutely Solid Inclusions Using the Finite Element Method", *Vestnik TsvGU*.

*Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 2, 37–50 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtprm689>

### References

- [1] Zenkevich O., Morgan K., *Konechnye elementy i approksimatsiya [Finite elements and approximation]*, Mir Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 318 pp.
- [2] Zenkevich O., *Metod konechnykh elementov v tekhnike [The finite element method in engineering]*, Mir Publ., Moscow, 1975 (in Russian), 543 pp.
- [3] Gan H., Levin P.L., Ludwig R., “Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain”, *Journal of the Acoustical Society of America*, **94**:3 (1993), 1651–1662.
- [4] Harari I., Hughes T.J.R., “Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **87** (1991), 59–96.
- [5] Ihlenburg F., *Finite element analysis of acoustic scattering*, Springer Publishing Company, Inc., New York, 2013, 226 pp.
- [6] Rektoris K., *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike i tekhnike [Variational methods in mathematical physics and technology]*, Mir Publ., Moscow, 1985 (in Russian), 589 pp.
- [7] Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Witt R.J., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 2002 (in Russian), 736 pp.
- [8] Levin V.A., Kalinin V.V. Zingerman K.M., Vershinin A.V., *Razvitie defektov pri konechnykh deformatsiyakh. Kompyuternoe i fizicheskoe modelirovanie*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2007 (in Russian), 392 pp.

### Author Info

1. **Biryukov Danila Ruslanovich**

Postgraduate student at the Department of Applied Mathematics and Informatics, Tula State University.

*Russia, 300012, Tula, Prospekt Lenina, 95, Tula State University.*

*E-mail: [danilabirukov@rambler.ru](mailto:danilabirukov@rambler.ru)*