УДК 514.743, 519.165

ОБОБЩЁННЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОВАРИАНТНЫХ РЯДОВ ТЕЙЛОРА

Поташов И.М.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 15.03.2022, после переработки 17.05.2023.

В статье мы рассматриваем алгоритм для вычисления ковариантных степенных разложений тензорных полей в координатах Ферми, определённых в некоторой окрестности параллелизуемого подмногообразия размерности m ($m = 0, 1, \ldots < n$, случай $m = 0$ соответствует точке), преобразуя соответствующие разложения в ковариантные ряды Тэйлора. Метод ковариантных рядов может быть полезен при решении некоторых задач в общей теории относительности, в частности, он удобен для вычисления компонент метрики пространства-времени, а также используется в теории квантовой гравитации. Рассматриваемый алгоритм является обобщением алгоритма из работы [14]. Для произвольного действительного аналитического тензорного поля коэффициенты этих рядов выражаются через его ковариантные производные, компоненты связности и ковариантные производные кривизны и кручения. Алгоритм вычисляет компоненты соответствующего многочлена Тейлора произвольного порядка для компонент поля и может быть применён в общем случае для неметрических связностей с ненулевым кручением. Показано, что алгоритм принадлежит классу сложности *LEXP*.

Ключевые слова: псевдоримановы многообразия, тензорные поля, ковариантные ряды Тейлора, вычислительная сложность алгоритмов.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 2. С. 51–66.
https://doi.org/10.26456/vtpmk670

Введение

Использование специальных систем координат при изучении моделей некоторых физических систем позволяет значительно упростить соответствующие уравнения и интерпретацию результатов. Например, в современных теориях гравитации и решении задач, связанных со слабой симметрией пространства-времени, используются римановы нормальные координаты. В работах [1,2] впервые доказана возможность разложения метрики в ряды Тейлора с тензорными коэффициентами в нормальных координатах, центрированных в точке. В работе [3] было показано, что частные производные в коэффициентах рядов Тейлора можно выразить через ковариантные производные данного тензорного поля и поля кривизны, взятые в начале системы нормальных координат. В дальнейшем понятие нормальных координат рассматривалось и уточнялось неоднократно [4–8]. В этих работах получены разложения метрики в римановых нормальных координатах.

Обобщением системы координат Римана является система координат Ферми, в которой результат, полученный для нормальной окрестности с центром в точке, обобщён для нормальной окрестности подмногообразия. В частности, координаты Ферми используются в общей теории относительности для трубчатых окрестностей времениподобных геодезических [9, 10]. Существует несколько подходов построения нормальных координат и вычисления коэффициентов ковариантных рядов. Ряд подходов требует наличия метрики на многообразии для построения ковариантных рядов [11–13], однако в общем случае достаточно наличие связности, возможно, с ненулевым кручением [4].

Явные формулы для ковариантных рядов являются достаточно громоздкими даже для многообразий без кручения, и вычисление коэффициентов рядов — достаточно трудная задача, поскольку требует выполнения большого количества арифметических операций даже для членов небольших порядков и небольших размерностей основного многообразия. В связи с этим возникает задача разработки эффективных алгоритмов для решения этой проблемы и дальнейшая их реализация на ЭВМ [8]. Один из таких алгоритмов был рассмотрен в работе [14] для системы римановых нормальных координат. Цель этой статьи — обобщить данный алгоритм для системы нормальных координат Ферми и получить оценку его сложности.

Метод ковариантных рядов может быть на практике использован при решении ряда задач в общей теории относительности. В частности, при помощи этого метода удобно вычислять компоненты метрики пространства-времени в нормальной окрестности мировой линии или гиперповерхности [4, 10], что может быть полезно при изучении взаимодействия двух гравитирующих объектов, например, нейтронных звёзд или чёрных дыр, поскольку в этом случае оба объекта оказывают влияние на геометрию пространства-времени из-за наличия массы и протяжённости, что затрудняет вычисление компонент тензорных величин, характеризующих модель пространства-времени.

Другим возможным направлением использования метода ковариантных рядов в общей теорий относительности является численное решение уравнений Эйнштейна. В этом случае применяется тот же подход, что и при решении систем дифференциальных уравнений методом рядов: для искомых функций записываются разложения в ряды с точностью до некоторого порядка с учётом их асимптотики и начальных условий, затем полученные разложения подставляются в рассматриваемые уравнения. Приравняв коэффициенты при соответствующих членах рядов в уравнениях, мы получим соотношения, позволяющие вычислить коэффициенты рядов искомых функций.

Помимо теории относительности, ковариантные ряды применяются в теории квантового поля в искривлённом пространстве для вычисления коэффициентов Адамара и де Витта, а также ряда других величин [15].

Работа включает три раздела и заключение. В *разделе 1* описывается математический аппарат, ключевые понятия и подход к построению ковариантного разложения. *Раздел 2* состоит из двух подразделов. В *первом подразделе* приводится явный вид ковариантных разложений тензорных полей. Во *втором подразделе* даётся описание алгоритма вычисления коэффициентов тензорных рядов. Оценка сложности алгоритма по количеству выполняемых операций, а также сравнение алгоритма с его упрощённой версией и аналогом даны в *разделе 3*.

1. Основные понятия и обозначения

В дальнейшем в статье мы будем придерживаться символики и обозначений из работ [4, 14]. Пусть H — ориентируемое, связное, параллелизуемое в классе аналитических векторных полей многообразие, $\dim H = n + m$, где $n > 0$, $m \geqslant 0$; $M \subset H$ — ориентируемое подмногообразие, $\dim M = m$ (если $m = 0$, то M — это точка); ∇ — аффинная связность на H, интерпретируемая в терминах ковариантного дифференцирования.

Греческими буквами α, β, γ мы будем обозначать индексы, принимающие значения от 1 от n, латинскими буквами a, b — индексы со значениями от $n+1$ до $n+m$, и латинскими буквами i, j, k, l — индексы со значениями от 1 до $n+m$ независимо от того, имеются ли подындексы у заданных индексов или нет. Для обозначения суммирования мы будем использовать нотацию Эйнштейна, то есть у повторяющихся косых индексов всюду подразумевается суммирование.

Тензорные поля кривизны и кручения, ковариантные производные и компоненты связности обозначим и определим стандартным образом:

$$R(Z,X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z\,, \quad T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],$$

$$R(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j, \mathrm{e}_k) = R^l_{ijk}\mathrm{e}_l, \quad T(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) = T^k_{ij}\mathrm{e}_k,$$

$$\nabla_k = \nabla_{\mathrm{e}_k}, \quad \nabla_i X = X^j_{;i}\mathrm{e}_j, \quad \nabla_i \mathrm{e}_j = \Gamma^k_{ij}\mathrm{e}_k.$$

Для каждой точки $p \in M$ касательное пространство $\mathbb{T}_p(H)$ может быть представлено в виде суммы $\mathbb{T}_p(M) \oplus N_p$, где N_p — нормальное (или трансверсальное, если метрика на H не задана) пространство по отношению к $\mathbb{T}_p(M)$. Пусть $[\mathrm{e}_\alpha]_1^n$ и $[\mathrm{e}_\alpha]_{n+1}^{n+m}$ — базисы N_p и $\mathbb{T}_p(M)$ соответственно, и объединение этих базисов образует базис $\mathbb{T}_p(H)$. Соответствующие 1-формы дуального базиса на H мы обозначим через e^i.

2. Ковариантные ряды Тейлора в нормальной окрестности подмногообразия

2.1 Ковариантные ряды для произвольного тензорного поля

Пусть p и q — точки на H, $p \in M$, c — геодезическая с краевыми условиями $c(0) = p$, $c(1) = q$, имеющая касательный вектор $X = X^\alpha \mathrm{e}_\alpha \in N_p$ (будем считать, что c — единственная геодезическая с данными краевыми условиями). Тогда $X^1, \ldots, X^n$ — нормальные координаты точки q (экспоненциальное отображение). Пусть Q — произвольное тензорное поле типа (s, r). Тогда разложение поля Q в ковариантный ряд Тейлора имеет вид [4]:

$$(Q^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r})_q = \sum_{\sigma+|\mu|+|\nu|\geqslant 0} \frac{1}{\sigma!} X^{\gamma_1}\ldots X^{\gamma_\sigma}(Q^{l_1\ldots l_s}_{k_1\ldots k_r;\gamma_1\ldots\gamma_\sigma})_p \underset{(\mu_1)}{u}{}^{k_1}_{i_1}\cdots \underset{(\mu_r)}{u}{}^{k_r}_{i_r} \underset{(\nu_1)}{v}{}^{j_1}_{l_1}\cdots \underset{(\nu_s)}{v}{}^{j_s}_{l_s}, \tag{1}$$

где $\sigma, \mu_1, \ldots, \mu_r, \nu_1, \ldots, \nu_s \geqslant 0$, $|\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_r$, $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_s$, элементы квадратных матриц $\underset{(\mu)}{u}$, $\underset{(\mu)}{v}$ размерности $n+m$ являются однородными многочленами степени μ от координат X^α и определяются при всех $\alpha = 1, \ldots, n$, $a = n+1, \ldots, n+m$, i, $k = 1, \ldots, n+m$ следующими соотношениями:

$$\underset{(0)}{u}{}^k_i = \underset{(0)}{v}{}^k_i = \delta^k_i; \tag{2}$$

$$\underset{(1)}{u}{}^k_\alpha = \frac{1}{2} X^\beta (T^k_{\beta\alpha})_p\,, \quad \underset{(1)}{u}{}^k_a = X^\beta(\Gamma^k_{\beta a} + T^k_{\beta a})_p\,; \tag{3}$$

$$\underset{(\mu)}{u}{}^k_i = \frac{1}{\mu+\epsilon(i)} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{1}{(\sigma-1)!} X^{\alpha_1}\ldots X^{\alpha_\sigma} (T^k_{\alpha_1 l\,;\,\alpha_2\ldots\alpha_\sigma})_p \underset{(\mu-\sigma)}{u}{}^l_i + \tag{4}$$

$$+\frac{1}{(\mu+\epsilon(i))(\mu+\epsilon(i)-1)} \sum_{\sigma=2}^{\mu} \frac{1}{(\sigma-2)!} X^{\alpha_1}\ldots X^{\alpha_\sigma} (R^k_{\alpha_1\alpha_2 l\,;\,\alpha_3\ldots\alpha_\sigma})_p \underset{(\mu-\sigma)}{u}{}^l_i\,,$$

$$\mu \geqslant 2\,,\ \epsilon(\alpha) = 1\,,\ \epsilon(a) = 0\,;$$

$$\underset{(\mu)}{v}{}^k_i = -\sum_{\sigma=1}^{\mu} \underset{(\mu-\sigma)}{v}{}^k_l \underset{(\sigma)}{u}{}^l_i = \sum_{\sigma_1+\ldots+\sigma_\tau=\mu} (-1)^\tau \underset{(\sigma_1)}{u}{}^k_{l_1} \underset{(\sigma_2)}{u}{}^{l_1}_{l_2} \cdots \underset{(\sigma_\tau)}{u}{}^{l_{\tau-1}}_i\,, \tag{5}$$

$$\mu \geqslant 1\,,\ \sigma_1, \ldots, \sigma_\tau \geqslant 1\,,\ 1 \leqslant \tau \leqslant \mu.$$

Обратим внимание на то, что при $m \geqslant 2$ разложения содержат члены с компонентами связности $(\Gamma^k_{\beta a})_p$. Для случая нормальной окрестности ($m = \dim M = 0$) все компоненты связности равны нулю. Если $m = 1$ и M не является компактным, то, выбирая векторы $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ параллельными вдоль M, мы также можем обратить в нуль все компоненты связности. В частности, это возможно сделать для мировой линии частицы в общей теории относительности.

Возникает проблема алгоритмического упрощения выражения (1). Число базисных одночленов в (1) совпадает с числом членов соответствующего ряда Тейлора. Наиболее сложный шаг — это вычисление коэффициентов одночленов в матрицах $\underset{(\mu)}{u}{}^k_i$; осуществление этого шага позволяет отделить одночлены в (1) известными способами. Далее мы ограничимся этими вычислениями.

2.2 Вычисление коэффициентов ковариантного ряда

Рассмотрим задачу вычисления элементов матриц $\underset{(\mu)}{u}{}^k_i$. Похожая задача была уже рассмотрена ранее в работе [14] в несколько упрощённом виде. В частности, в данной работе предполагалось, что коэффициенты связности равны нулю, и, как следствие, все коэффициенты матриц выражаются только через компоненты кривизны. Это справедливо для точки, а также для одномерного многообразия при специальном выборе координатного базиса [4]. В общем случае не всегда можно добиться равенства нулю всех компонент связности, и поэтому алгоритм и оценка его сложности нуждаются в уточнении.

Для простоты будем считать, что многообразие M является псевдоримановым, и на нём задана метрическая связность.

Из формулы (2) следует, что $\underset{(0)}{u}$ — единичная матрица, а из-за нулевого кручения метрической связности выражения (3) принимают вид

$$\underset{(1)}{u}{}^{k}_{\alpha} = 0\,, \quad \underset{(1)}{u}{}^{k}_{a} = X^{\beta}\Gamma^{k}_{\beta a}. \tag{6}$$

Для $\mu \geqslant 2$ получаем

$$\underset{(\mu)}{u}{}^{k}_{i} = \frac{1}{(\mu+\epsilon(i))(\mu+\epsilon(i)-1)}\sum_{\sigma=2}^{\mu}\frac{1}{(\sigma-2)!}X^{\alpha_1}\dots X^{\alpha_\sigma}(R^{k}_{\alpha_1\alpha_2 l\,;\,\alpha_3\dots\alpha_\sigma})_p\,\underset{(\mu-\sigma)}{u}{}^{l}_{i}. \tag{7}$$

Далее во всех формулах мы будем предполагать, что все компоненты связности, кривизны и её ковариантных производных взяты в точке p, и для краткости записи не будем использовать круглые скобки. Например, вместо $(R^{k}_{\alpha_1\alpha_2 l\,;\,\alpha_3\dots\alpha_\sigma})_p$ мы будем просто писать $R^{k}_{\alpha_1\alpha_2 l\,;\,\alpha_3\dots\alpha_\sigma}$.

Как было отмечено выше, каждый элемент матрицы $\underset{(\mu)}{u}{}^{i}_{k}$ — это однородный многочлен степени μ от переменных $X^1,\dots,X^n$, то есть он может быть записан в виде

$$\underset{(\mu)}{u}{}^{k}_{i} = \sum_{\substack{A_1+\dots+A_n=\mu\\ A_1,\dots,A_n\geqslant 0}} K^{k}_{i}(A_1,\,A_2,\dots,\,A_n)(X^1)^{A_1}(X^2)^{A_2}\dots(X^n)^{A_n}, \tag{8}$$

причём коэффициенты $K^k_i(A_1,\,A_2,\dots,\,A_n)$ можно выразить через компоненты кривизны и символы Кристоффеля. Вместо множества одночленов удобно рассмотреть множество соответствующих последовательностей степеней

$$S_\mu = \{(A_1,\dots,A_n)|A_1,\dots,A_n\geqslant 0, A_1+\dots+A_n=\mu\} = \{S_\mu[1],\dots,S_\mu[N]\}\,, \tag{9}$$

$$N = |S_\mu| = C^{\mu-1}_{n+\mu-1}.$$

Будем считать, что элементы множества S_μ упорядочены лексикографически.

2.2.1. Неприведённые слагаемые

Прежде сформулировать алгоритм вычисления коэффициентов K^k_i, рассмотрим подробно неприведённые слагаемые в формуле (7). Докажем следующие утверждения:

Утверждение 1. *Коэффициенты при неприведённых слагаемых элементов* $\underset{(\mu)}{u}{}^{k}_{\alpha}$ *($\mu \geqslant 2$) выражаются только через компоненты кривизны и их ковариантные производные, и сами слагаемые можно записать в виде*

$$X^{\alpha_1}X^{\alpha_2}\dots X^{\alpha_\mu}h(i;\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_\tau)\times \\ \times R^{k}_{\alpha_1\alpha_2 l_1;\alpha_3\dots\alpha_{\delta_1}}R^{l_1}_{\alpha_{\delta_1+1}\alpha_{\delta_1+2}l_2;\alpha_{\delta_1+3}\dots\alpha_{\delta_2}}\dots R^{l_{\tau-1}}_{\alpha_{\delta_{\tau-1}+1}\alpha_{\delta_{\tau-1}+2}i;\alpha_{\delta_{\tau-1}+3}\dots\alpha_\mu}, \quad (10)$$

где τ — число множителей в произведении компонент ковариантной производной, $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_\tau$ — количество индексов α соответственно в первом, втором,..., τ-ом множителе; $h(i;\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_\tau)$ — числовой коэффициент, зависящий от количества индексов α в каждом сомножителе и от нижнего индекса i.

Утверждение 2. *Коэффициенты при неприведённых слагаемых элементов* $\underset{(\mu)}{u}{}^{k}_{a}$ *($\mu \geqslant 2$) выражаются либо только через компоненты кривизны и их ковариантные производные, либо через компоненты кривизны, их ковариантные производные и символы Кристоффеля, причём сами слагаемые либо имеют вид* (10)*, либо имеют вид*

$$X^{\alpha_1}X^{\alpha_2}\dots X^{\alpha_\mu}h(i;\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_\tau)\times \\ \times R^{k}_{\alpha_1\alpha_2 l_1;\alpha_3\dots\alpha_{\delta_1}}\dots R^{l_{\tau-2}}_{\alpha_{\delta_{\tau-2}+1}\alpha_{\delta_{\tau-2}+2}l_{\tau-1};\alpha_{\delta_{\tau-2}+3}\dots\alpha_{\mu-1}}\Gamma^{l_{\tau-1}}_{\alpha_\mu i}. \quad (11)$$

В слагаемом вида (11) *имеется только один символ Кристоффеля в конце.*

Утверждения 1 и 2 докажем при помощи метода математической индукции. Для доказательства базы индукции выпишем найдём явный вид $\underset{(2)}{u}{}^{k}_{i}$, $\underset{(3)}{u}{}^{k}_{i}$. Используя формулы (6) и (7), получаем следующие выражения:

$$\underset{(2)}{u}{}^{k}_{\alpha}=\frac{1}{6}X^{\alpha_1}X^{\alpha_2}R^{k}_{\alpha_1\alpha_2\alpha}, \qquad \underset{(3)}{u}{}^{k}_{\alpha}=\frac{1}{12}X^{\alpha_1}X^{\alpha_2}X^{\alpha_3}R^{k}_{\alpha_1\alpha_2\alpha;\alpha_3},$$

$$\underset{(2)}{u}{}^{k}_{a}=\frac{1}{2}X^{\alpha_1}X^{\alpha_2}R^{k}_{\alpha_1\alpha_2 a}, \quad \underset{(3)}{u}{}^{k}_{a}=\frac{1}{6}X^{\alpha_1}X^{\alpha_2}X^{\alpha_3}R^{k}_{\alpha_1\alpha_2 a;\alpha_3}+\frac{1}{6}X^{\alpha_1}X^{\alpha_2}X^{\alpha_3}R^{k}_{\alpha_1\alpha_2 j}\Gamma^{j}_{\alpha_3 a}.$$

Эти выражения соответствуют формулам формулам (10) или (11). Следовательно, база индукции доказана.

Далее рассмотрим индукционный переход. Предположим, что утверждения 1 и 2 справедливы для матриц порядков 2, 3, ..., $\mu-1$. Чтобы доказать справедливость утверждений для матриц порядка μ, рассмотрим слагаемые под знаком суммы в формуле (7). Для $\sigma = 2, 3, \dots, \mu-2$ в силу индукционного предположения элементы $\underset{(\mu-\sigma)}{u}{}^{l}_{\alpha}$ — это сумма слагаемых вида (10), а элементы $\underset{(\mu-\sigma)}{u}{}^{l}_{a}$ — это сумма слагаемых вида (10) и (11). Отметим, что если слагаемое вида (10) умножить на $X^{\alpha_1}X^{\alpha_2}\dots X^{\alpha_\sigma}R^{\alpha}_{\alpha_1\alpha_2 l;\alpha_3\dots\alpha_\sigma}$ с некоторым числовым коэффициентом, то мы получим слагаемое такого же вида. Аналогичное утверждение справедливо и для слагаемых вида (11). Суммирование по повторяющимся индексам также не приведёт к возникновению слагаемых других видов, отличных от указанных выше.

Отдельно рассмотрим в формуле (7) слагаемые под знаком суммы для $\sigma = \mu - 1$ и $\sigma = \mu$. В первом случае без учёта числовых коэффициентов получаем из формулы (6):

$$X^{\alpha_1} X^{\alpha_2} \dots X^{\alpha_{\mu-1}} R^k_{\alpha_1\alpha_2 l;\alpha_3\dots\alpha_{\mu-1}} \underset{(1)}{u}{}^l_\alpha = 0$$

и

$$X^{\alpha_1} X^{\alpha_2} \dots X^{\alpha_{\mu-1}} R^k_{\alpha_1\alpha_2 l;\alpha_3\dots\alpha_{\mu-1}} \underset{(1)}{u}{}^l_a = X^{\alpha_1} \dots X^{\alpha_\mu} R^k_{\alpha_1\alpha_2 l;\alpha_3\dots\alpha_{\mu-1}} \Gamma^l_{\alpha_\mu a},$$

что соответствует слагаемому (11).

Наконец, для $\sigma = \mu$ в обоих случаях мы получим слагаемое (следует из формулы (2))

$$X^{\alpha_1} X^{\alpha_2} \dots X^{\alpha_\mu} R^k_{\alpha_1\alpha_2 i;\alpha_3\dots\alpha_\mu},$$

что будет будет соответствовать виду (10).

Рассмотрев все неприведённые слагаемые в формуле (7), получаем, что они имеют вид (10) или (11), и это доказывает истинность утверждений 1 и 2.

Известно, что произведение $X^{\alpha_1} X^{\alpha_2} \dots X^{\alpha_n}$ приводится к стандартному виду $(X^1)^{A_1}(X^2)^{A_2} \dots (X^n)^{A_n}$ тогда и только тогда, когда последовательность индексов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ содержит ровно A_1 индексов 1, A_2 индексов 2,..., A_n индексов n. Отсюда следует, что коэффициент $K(A_1, A_2, \dots, A_n)$ — это сумма всех коэффициентов слагаемых (10) и (11), где последовательность индексов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ является перестановкой набора

$$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{A_1}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{A_2}, \dots, \underbrace{n, n, \dots, n}_{A_n}). \tag{12}$$

Для вычисления коэффициента одночлена с набором степеней $S_\mu[p] = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in S_\mu$, $1 \leqslant p \leqslant N$ удобно рассмотреть соответствующее множество перестановок набора (12):

$$S^p_\mu = \Big\{(\alpha_1, \dots, \alpha_\mu) \in \{1, 2, \dots, n\}^\mu\Big\} = \Big\{S^p_\mu[1], \dots, S^p_\mu[M]\Big\}, \tag{13}$$

$$M = \left|S^p_\mu\right| = \frac{\mu!}{A_1! A_2! \dots A_n!}.$$

2.2.2. Задача об определении числовых коэффициентов.

Вид слагаемых (10) и (11) зависит не только от набора индексов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, но и от количества и состава множителей, являющихся компонентами кривизны, её ковариантными производными и компонентами связности. Отсюда следует, что каждому такому произведению мы можем поставить в соответствие некоторое разбиение числа μ, при условии, что каждое слагаемое в разбиении по величине не меньше 2, а последнее слагаемое — не меньше 1, причём если последнее равно 1, то разбиение будет соответствовать слагаемым (11), а в противном случае — слагаемым вида (10). Формально данное множество разбиений можно задать в виде

$$C_\mu = \Big\{(\sigma_1, \dots, \sigma_\tau) \,|\, \sigma_1 + \dots + \sigma_\tau = \mu,\, \sigma_1, \dots, \sigma_{\tau-1} \geqslant 2,\, \sigma_\tau \geqslant 1, 1 \leqslant \tau \leqslant [(\mu+1)/2]\Big\}, \tag{14}$$

Найдём число элементов множества C_μ для оценки вычислительной сложности в следующем разделе:

$$N_1 = \left|C_\mu\right| = \sum_{\tau=1}^{[(\mu+1)/2]} C_{\mu-\tau}^{\tau-1} = F_\mu, \tag{15}$$

где F_μ — это μ-тый член последовательности Фибоначчи.

Также нам необходимо вычислить коэффициенты h для слагаемых в (10) и (11). В работе [14] коэффициенты h определялись при помощи функции, заданной на множестве C_μ и действующей на множестве рациональных чисел. В общем случае, коэффициент h также зависит от нижнего индекса элемента $\underset{(\mu)}{u}{}_i^k$. Иными словами, $h : \{1,\, 2,\, \ldots, n+m\} \times C_\mu \to \mathbb{Q}$.

Рассмотрим сначала, как вычислить коэффициенты h для $\underset{(\mu)}{u}{}_\alpha^k$. В силу утверждения 1, в этом случае слагаемые с компонентами связности будут отсутствовать, и поэтому естественно считать $h(\alpha;\sigma_1,\ldots,\sigma_{\tau-1},1)=0$. При $\sigma_\tau > 1$ мы можем, исходя из формулы (7) и вида слагаемого (10), определить коэффициент при помощи рекурсивной формулы:

$$\begin{aligned} h(\alpha;\,\sigma) &= \frac{1}{\sigma(\sigma+1)(\sigma-2)!}, \quad (\sigma > 1); \\ h(\alpha;\,\sigma_1,\ldots,\sigma_\tau) &= \frac{h(\alpha;\,\sigma_2,\ldots,\sigma_\tau)}{\left(\sum\limits_{s=1}^{\tau}\sigma_s\right)\left(\sum\limits_{s=1}^{\tau}\sigma_s+1\right)(\sigma_1-2)!}. \end{aligned} \tag{16}$$

Для $\underset{(\mu)}{u}{}_a^k$ коэффициент h также можно выразить в виде рекурсивной формулы:

$$\begin{aligned} h(a;\,\sigma) &= \frac{1}{\sigma!}, \quad (\sigma \geqslant 1); \\ h(a;\,\sigma_1,\ldots,\sigma_\tau) &= \frac{h(a;\,\sigma_2,\ldots,\sigma_\tau)}{\left(\sum\limits_{s=1}^{\tau}\sigma_s\right)\left(\sum\limits_{s=1}^{\tau}\sigma_s-1\right)(\sigma_1-2)!}. \end{aligned} \tag{17}$$

Записав формулы (16) и (17) в развёрнутом виде и объединив все рассмотренные выше случаи, получим следующее выражение для коэффициентов h:

$$h(i;\ \sigma_1,\ldots,\sigma_\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n,\ \sigma_\tau = 1; \\ \prod\limits_{r=1}^{\tau} \dfrac{\xi(\sigma_r+\sigma_{r+1}+\ldots+\sigma_\tau)}{(\sigma_r-2)!}, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n,\ \sigma_\tau > 1; \\ \prod\limits_{r=1}^{\tau-1} \dfrac{\eta(\sigma_r+\sigma_{r+1}+\ldots+\sigma_\tau)}{(\sigma_r-2)!}, & \text{если } n+1 \leqslant i \leqslant n+m,\ \sigma_\tau = 1; \\ \prod\limits_{r=1}^{\tau} \dfrac{\eta(\sigma_r+\sigma_{r+1}+\ldots+\sigma_\tau)}{(\sigma_r-2)!}, & \text{если } n+1 \leqslant i \leqslant n+m,\ \sigma_\tau > 1, \end{cases} \tag{18}$$

$$\xi(\sigma) = \frac{1}{\sigma(\sigma+1)}, \qquad \eta(\sigma) = \frac{1}{\sigma(\sigma-1)}.$$

2.2.3. Описание алгоритма

Для вычисления коэффициента $K_i^k(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ в (8) необходимо все слагаемые (10) и (11) привести к стандартному виду, а затем привести подобные слагаемые. Фактически эта задача сводится к суммированию слагаемых по двум множествам — множеству S_μ^p (9) и множеству C_μ (14). Таким образом, мы можем записать

$$K_i^k(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{t=1}^{M} \mathrm{INTSUM}\left(S_\mu^p[t]\right), \tag{19}$$

где INTSUM — процедура внутреннего суммирования или суммирования по элементам множества C_μ. Так как существует два вида слагаемых, то целесообразно суммирование слагаемых каждого вида осуществлять отдельно. Для этого разобьём множество C_μ на два подмножества:

$$C1_\mu = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_\tau) \in C_\mu | \sigma_\tau > 1\}, \qquad C2_\mu = C_\mu \backslash C1_\mu.$$

Тогда процедуру INTSUM можно определить следующим образом:

$$\mathrm{INTSUM}\left(S_\mu^p[t]\right) = \mathrm{SUM1}\left(S_\mu^p[t]\right) + \mathrm{SUM2}\left(S_\mu^p[t]\right), \tag{20}$$

где SUM1 и SUM2 — процедуры для вычисления сумм всех слагаемых вида (10) и (11) соответственно:

$$\mathrm{SUM1}\left(S_\mu^p[t]\right) = \sum_{C1_\mu} h(i;\, \sigma_1,\, \ldots,\, \sigma_\tau) R^k_{\alpha_1\alpha_2 l_1;\alpha_3\ldots\alpha_{\delta_1}} R^{l_1}_{\alpha_{\delta_1+1}\alpha_{\delta_1+2}l_2;\alpha_{\delta_1+3}\ldots\alpha_{\delta_2}} \cdots$$
$$\cdots R^{l_{\tau-1}}_{\alpha_{\delta_{\tau-1}+1}\alpha_{\delta_{\tau-1}+2}i;\alpha_{\delta_{\tau-1}+3}\ldots\alpha_{\delta_\tau}}, \tag{21}$$

$$\mathrm{SUM2}\left(S_\mu^p[t]\right) = \sum_{C2_\mu} h(i;\, \sigma_1,\, \ldots,\, \sigma_{\tau-1},\, 1) R^k_{\alpha_1\alpha_2 l_1;\alpha_3\ldots\alpha_{\delta_1}} R^{l_1}_{\alpha_{\delta_1+1}\alpha_{\delta_1+2}l_2;\alpha_{\delta_1+3}\ldots\alpha_{\delta_2}} \cdots$$
$$\cdots R^{l_{\tau-2}}_{\alpha_{\delta_{\tau-2}+1}\alpha_{\delta_{\tau-2}+2}l_{\tau-1};\alpha_{\delta_{\tau-2}+3}\ldots\alpha_{\mu-1}} \Gamma^{l_{\tau-1}}_{\alpha_\mu i}, \tag{22}$$

где $S_\mu^p[t] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ и $\delta_r \equiv \sum\limits_{s=1}^{r} \sigma_s$.

Схема алгоритма вычисления коэффициентов K_i^k в формуле (8) представлена на Рис. 1. Согласно данному алгоритму, для заданного порядка μ и размерности подмногообразия n сначала формируются множества S_μ и C_μ, определённые выше выражениями (9) и (14), а затем производится вычисление констант h по формуле (18). Вычисление коэффициента K_i^k для последовательности $S_\mu[p]$ осуществляется на p-ом витке внешнего цикла. В начале внешнего цикла формируется множество перестановок S_μ^p, определённое формулой (12). Ковариантные производные кривизны и компоненты связности для перестановки $S_\mu^p[t]$ вычисляются при помощи специальной рекурсивной процедуры. Пусть, например,

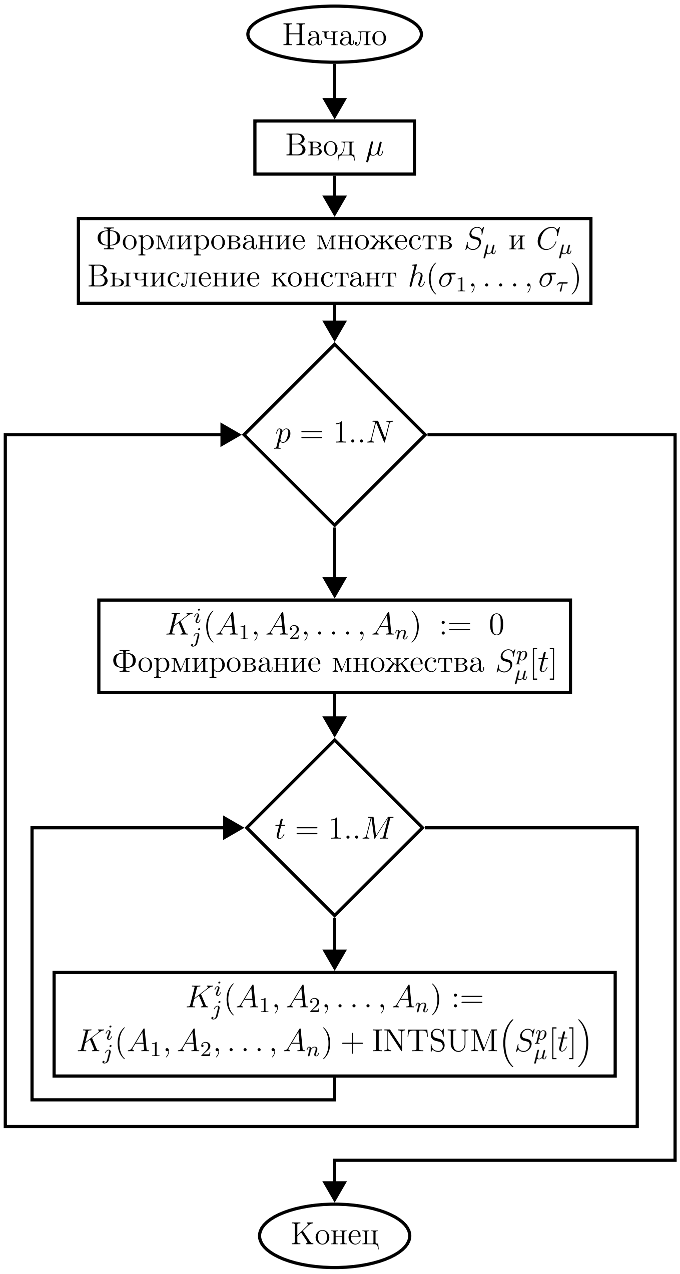

Рис. 1: *Блок-схема алгоритма*

$n = 3$, $\mu = 4$, и $S_4[7] = (1, 2, 1)$. Тогда $C_\mu = \big\{(4),\ (3, 1),\ (2, 2)\big\}$ и, таким образом, если $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (2, 1, 2, 3)$, процедура вычислит явные значения $R^k_{21i;23}$, $R^k_{21j;2}$, Γ^j_{3i}, R^k_{21j} и R^j_{23i}. Во внутреннем витке суммирование идёт по формулам (19)—(22).

3. Оценка вычислительной сложности алгоритма

Проведём оценку вычислительной сложности алгоритма, описанного в предыдущем разделе. При оценке сложности мы будем учитывать только операции умножения, поскольку при вычислениях на ЭВМ умножение и деление считаются более сложными по сравнению со сложением и вычитанием, и две последние операции часто не учитывают.

Суммирование в формулах (19) и (20) осуществляется по двум направлениям — по элементам множества S_μ, а также по элементам C_μ. Более того, в каждом слагаемом в (21) и (22) осуществляется суммирование по повторяющимся индексам $l_1, l_2, \ldots, l_{\tau-1}$, что даёт $(n+m)^{\tau-1}$ операций умножения. Общее число операций умножения в (21) и (22) складывается из числа N_1 операций умножения на коэффициенты h и числа N_2 операций суммирования по повторяющимся индексам. Исходя из (13) и (15) и применяя производящие функции для сумм (в частности, формулу Бине для чисел Фибоначчи), находим:

$$N_1 = F_\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^\mu - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^\mu\right] \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{1+4(n+m)}}{2}\right)^\mu,$$

$$N_2 + 1 = \sum_{\tau=1}^{[(\mu+1)/2]} C_{\mu-\tau}^{\tau-1}(n+m)^{\tau-1} = \\ = \frac{\left(1+\sqrt{1+4(n+m)}\right)^\mu}{2^\mu\sqrt{1+4(n+m)}} - \frac{\left(1-\sqrt{1+4(n+m)}\right)^\mu}{2^\mu\sqrt{1+4(n+m)}}.$$

Отсюда получаем оценку

$$N_1 + N_2 = O\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+4(n+m)}}{2}\right)^\mu\right), \quad \mu\to\infty, \quad n+m \text{ фиксировано.}$$

Для числа операций умножения в правой части формулы (19) и для общего числа операций умножения при вычислении всех коэффициентов $K_i^\alpha(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ мы имеем соответствующие оценки:

$$(N_1+N_2)\cdot M = (N_1+N_2)\cdot\frac{\mu!}{A_1!\ldots A_n!},$$

$$(N_1+N_2)\cdot \sum_{\substack{A_1+\dots+A_n=\mu\\ A_1,\ldots,A_n\geqslant 0}} \frac{\mu!}{A_1!\ldots A_n!} = (N_1+N_2)\cdot n^\mu.$$

В итоге мы получаем $O\left(\left(\frac{n+n\sqrt{1+4(n+m)}}{2}\right)^\mu\right)$ для оценки вычислительной сложности алгоритма по количеству операций. Этот алгоритм принадлежит классу *LEXP* $\equiv$ *E* $\subset$ *EXPTIME*. Для упрощённой версии алгоритма ранее была получена схожая оценка [14]. Таким образом, обобщённый алгоритм и его упрощённая версия принадлежат одному классу сложности.

Для решения задач по вычислению ковариантных разложений также можно использовать полурекурсивный метод Аврамиди [15]. В указанной работе не приводится оценок вычислительной сложности алгоритма, однако можно утверждать, что представленная в статье зависимость времени исполнения компьютерной программы от порядка разложения имеет экспоненциальный характер. Используя методы регрессионного анализа, мы получаем, что наиболее подходящей функцией, выражающей зависимость времени работы программы (таблица II, общий случай в [15]) является функция $t(n) = 0,0005e^{0,6009n}$ (n — порядок разложения), и коэффициент детерминации при этом равен $R^2 = 0,9975$. На этом основании мы можем предположить, что рассматриваемый аналог также принадлежит к экспоненциальному классу сложности.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что представленный обобщённый алгоритм принадлежит тому же классу сложности, что и некоторые его аналоги, однако уникальность алгоритма заключается в том, что он не требует наличия метрики на основном многообразии, что требует использование иных подходов.

Заключение

В этой статье мы рассмотрели алгоритм вычисления коэффициентов ковариантных рядов Тейлора в нормальных координатах Ферми на псевдоримановом многообразии, а также оценили его вычислительную сложность по количеству выполняемых операций.

Рассмотренный в работе алгоритм может быть реализован на ЭВМ, в частности, в системе компьютерной алгебры Maple [16]. Для классических ЭВМ из-за экспоненциальной сложности возможности применения данного алгоритма несколько ограничены, но алгоритм может быть использован для исследования простейших физических систем в общей теории относительности. Например, описанный алгоритм был использован при вычислении компонент ковариантного разложения метрики пространства-времени Шварцшильда в трубчатой окрестности круговой орбиты. Полученные результаты представлены в приложении работы [10]. Одним из возможных путей уменьшения сложности алгоритма является использование симметрий кривизны, а также выбор подходящего координатного базиса.

Для исследования более сложных систем и получения более точных результатов описанный алгоритм может быть реализован на суперкомпьютерах, а в будущем, возможно, будет реализован на квантовых ЭВМ.

Список литературы

[1] Veblen O., Thomas T.Y. The geometry of paths // Transactions of the American Mathematical Society. 1923. Vol. 25. Pp. 551–608.

[2] Eisenhart L.P. Riemannian Geometry. Princeton: Princeton University Press, 1926. 272 p.

[3] Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука.

[4] Цирулёв А.Н. Аналитическое продолжение тензорных полей вдоль геодезических ковариантными рядами Тейлора // Теоретическая и математическая физика. 1995. Т. 102, № 3. С. 245–250. https://doi.org/10.1007/BF01017874

[5] Mueller U., Schubert C., Ven A. A closed formula for the Riemann normal coordinate expansion // General Relativity and Gravitation. 1999. Vol. 31. Pp. 1759–1768. https://doi.org/10.1023/A:1026718301634

[6] Higashijima K., Itou E., Nitta M. Normal Coordinates in Kähler Manifolds and the Background Field Method // Progress of Theoretical Physics. 2002. Vol. 108. Pp. 185–202. https://doi.org/10.1143/PTP.108.185

[7] Iliev B.Z. Handbook of Normal Frames and Coordinates. Berlin: Birkhäuser Verlag, 2006. 73 p.

[8] Brewin L. Riemann normal coordinate expansions using Cadabra // Classical and Quantum Gravity. 2009. Vol. 26, № 17. ID 175017. https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/17/175017

[9] Klein D., Collas P. Exact Fermi coordinates for a class of space-times // Journal of Mathematical Physics. 2010. Vol. 51. ID 022501. https://doi.org/10.1063/1.3298684

[10] Potashov I.M. Covariant series in the normal neighborhood of a submanifold [Electronic resource] // Mathematical Modelling and Geometry. 2021. URL: https://mmg.tversu.ru/images/publications/2021-921.pdf.

[11] Manasse F.K., Misner C.W. Fermi normal coordinates and some basic concepts in differential geometry // Journal of Mathematical Physics. 1963. Vol. 4. Pp. 735–745.

[12] Marzlin K.-P. On the physical meaning of Fermi coordinates // General Relativity and Gravitation. 1994. Vol. 26. Pp. 619–636. https://doi.org/10.1007/BF02108003

[13] Mukhopadhyay P. All order covariant tubular expansion // Reviews in Mathematical Physics. 2013. Vol. 26, № 1. ID 1350019.

[14] Potashov I.M., Tsirulev A.N. Computational Algorithm for Covariant Series Expansions in General Relativity // European Physical Journal Web of Conferences. 2018. Vol. 173. ID 03021. URL: https://doi.org/10.1051/epjconf/201817303021

[15] Ottewill A. C., Wardell B. Transport equation approach to calculations of Hadamar Green functions and non-coincident DeWitt coefficients // Physical Review D. 2011. Vol. 84. ID 104039.

[16] Поташов И.М. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015618712. Вычисление компонент ковариантного ряда Тейлора метрики пространства-времени. 2015.

Образец цитирования

Поташов И.М. Обобщённый алгоритм вычисления коэффициентов ковариантных рядов Тейлора // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 2. С. 51–66. https://doi.org/10.26456/vtpmk670

Сведения об авторах

1. **Поташов Иван Михайлович**
ассистент кафедры общей математики и математической физики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

GENERALIZED ALGORITHM OF COMPUTATION OF COEFFICIENTS OF THE COVARIANT TAYLOR SERIES

Potashov I.M.
Tver State University, Tver

Received 15.03.2022, revised 17.05.2023.

In this article we deal with the algorithm for computing covariant power expansions of tensor fields in Fermi coordinates, introduced in some neighborhood of a parallelized m-dimensional submanifold ($m = 0, 1, \ldots < n$, $m = 0$ corresponds to a point), by transforming the expansions to the corresponding Taylor series. The method of covariant series can be useful in solution of some problems of general relativity, in particular, it is convenient for computing of the spacetime metric components, and also it is used in the theory of quantum gravity. The algorithm under consideration is the generalization of one from the Ref. [14]. For an arbitrary real analytic tensor field, the coefficients of such series are expressed in terms of its covariant derivatives, the connection components and covariant derivatives of the curvature and the torsion. The algorithm computes the corresponding Taylor polynomials of arbitrary orders for the field components and is applicable to connections that are, in general, nonmetric and not torsion-free. It is shown that this algorithm belongs to the complexity class *LEXP*.

Keywords: pseudo-Riemannian manifolds, tensor fields, covariant Taylor series, computational complexity of algorithms.

Citation

Potashov I.M., "Generalized algorithm of computation of coefficients of the covariant Taylor series", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 2, 51–66 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk670

References

[1] Veblen O., Thomas T.Y., "The geometry of paths", *Transactions of the American Mathematical Society*, **25** (1923), 551–608.

[2] Eisenhart L.P., *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1926, 272 pp.

[3] Petrov A.Z., *Novye metody v obshchej teorii otnositelnosti [New methods in general relativity]*, Nauka Publ., Moscow (in Russian).

[4] Tsirulyov A.N., "Analytic continuation of tensor fields along geodesics by covariant Taylor series", *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika [Theoretical and mathematical physics]*, **102**:3 (1995), 245–250 (in Russian), https://doi.org/10.1007/BF01017874.

[5] Mueller U., Schubert C., Ven A., "A closed formula for the Riemann normal coordinate expansion", *General Relativity and Gravitation*, **31** (1999), 1759–1768, https://doi.org/10.1023/A:1026718301634.

[6] Higashijima K., Itou E., Nitta M., "Normal Coordinates in Kähler Manifolds and the Background Field Method", *Progress of Theoretical Physics*, **108** (2002), 185–202, https://doi.org/10.1143/PTP.108.185.

[7] Iliev B.Z., *Handbook of Normal Frames and Coordinates*, Birkhäuser Verlag, Berlin, 2006, 73 pp.

[8] Brewin L., "Riemann normal coordinate expansions using Cadabra", *Classical and Quantum Gravity*, **26**:17 (2009), 175017, https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/17/175017.

[9] Klein D., Collas P., "Exact Fermi coordinates for a class of space-times", *Journal of Mathematical Physics*, **51** (2010), 022501, https://doi.org/10.1063/1.3298684.

[10] Potashov I.M., *Covariant series in the normal neighborhood of a submanifold*, Mathematical Modelling and Geometry, 2021, https://mmg.tversu.ru/images/publications/2021-921.pdf.

[11] Manasse F.K., Misner C.W., "Fermi normal coordinates and some basic concepts in differential geometry", *Journal of Mathematical Physics*, **4** (1963), 735–745.

[12] Marzlin K.-P., "On the physical meaning of Fermi coordinates", *General Relativity and Gravitation*, **26** (1994), 619–636, https://doi.org/10.1007/BF02108003.

[13] Mukhopadhyay P., "All order covariant tubular expansion", *Reviews in Mathematical Physics*, **26**:1 (2013), 1350019.

[14] Potashov I.M., Tsirulev A.N., "Computational Algorithm for Covariant Series Expansions in General Relativity", *European Physical Journal Web of Conferences*, **173** (2018), 03021, https://doi.org/10.1051/epjconf/201817303021.

[15] Ottewill A. C., Wardell B., "Transport equation approach to calculations of Hadamar Green functions and non-coincident DeWitt coefficients", *Physical Review D*, **84** (2011), 104039.

[16] Potashov I.M., *Svidetelstvo o gosudarstvennoj registratsii programmy dlya EVM №2015618712. Vychislenie komponent kovariantnogo ryada Tejlora metriki prostranstva-vremeni*, 2015 (in Russian).

Author Info

1. **Potashov Ivan Mikhailovich**
Assistant at General Mathematics and Mathematical Physics department,
Tver State University.

Russia, 170100, Tver, 33, Zhelyabova str., TSU.