

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517.958:536.2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, СОДЕРЖАЩЕМ СФЕРИЧЕСКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

Сыромясов А.О., Еделева Ю.П.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,
г. Саранск

Поступила в редакцию 21.07.2023, после переработки 05.08.2023.

Точность описания термодинамических процессов, протекающих в дисперсных средах внутри сосудов или труб, повышается при учете термодинамического взаимодействия дисперсных частиц и стенок сосуда. В статье рассмотрена расположенная вблизи плоской стенки сферическая частица, не имеющая внутренних источников тепла, но искажающая распределение температуры в среде за счет разницы теплопроводностей (своей и среды). При этом оказывается удобным зеркально продолжить содержащее частицу полупространство и заменить исходную систему «плоскость + частица» другой – «две симметричные частицы». Для решения стационарного уравнения теплопроводности в полученном безграничном пространстве применяется метод мультипольных разложений; структура коэффициентов перед мультиполями определяется симметрией конфигурации частиц и граничных условий задачи. В работе также обсуждается возможность предельного перехода от системы «сфера большого радиуса + малая сфера» к системе «плоскость + частица» для решения исходной задачи в полупространстве.

Ключевые слова: термодинамическое взаимодействие, уравнение Лапласа, фиктивная частица, мультиполь, нелинейная тензорная функция.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 3. С. 5–18.
<https://doi.org/10.26456/vtprm692>

Введение

Большинство веществ, вовлеченных в различные технологические процессы, являются не чистыми, а дисперсными. Частицы примеси (часто имеющие форму, близкую к сферической, и размеры порядка нескольких мкм) возмущают распределение термодинамических, гидродинамических и электромагнитных полей

© Сыромясов А.О., Еделева Ю.П., 2023

в среде, влияя на ее осредненные свойства. Классическим примером служит результат А. Эйнштейна: помещенные в вязкую жидкость твердые сферы искривляют линии тока, что приводит к дополнительной диссипации энергии и росту эффективной вязкости суспензии [1]. Присутствие в сплошной среде включений, имеющих иное удельное сопротивление, искажает эквипотенциальные поверхности электрического поля; в итоге дисперсная среда приобретает эффективное сопротивление, отличное от сопротивления несущей фазы [2]. Аналогично обстоит дело и с распределением температуры в веществе, содержащем частицы взвеси иной теплопроводности. Более подробные математические модели учитывают взаимовлияние возмущений, порожденных разными инородными телами [3–5].

Упомянутые результаты относятся к дисперсным средам в безграничном пространстве. Однако в реальности объем, занятый средой, чем-либо отделен от окружающего мира: стенками трубы, сосуда и т.д. Известны оценки погрешности, возникающей вследствие замены конечного (хотя и большого) объема на бесконечный [6]. Очевидно, наибольшие искажения при распределении физических полей в суспензиях, эмульсиях и т.д. по сравнению с «безграничным случаем» возникают именно вблизи границ области, занятой веществом. Происходящее при этом взаимодействие стенок сосуда с дисперсной фазой представляет особый интерес, поскольку свойства этих стенок имеют существенное значение для процессов в дисперсной среде. Так, на течение по трубе вязкой жидкости с переменными свойствами критическое влияние оказывают неравномерность прогрева поверхности трубы и степень ее гладкости [7].

Ниже авторы моделируют термодинамическое взаимодействие одиночной частицы взвеси, помещенной в сплошную среду, с плоскостью. Предполагается, что в среде создан продольный или поперечный по отношению к плоскости градиент температуры, который в отсутствие инородного включения был бы постоянным. Сама частица не имеет внутренних источников тепла (в ней не происходят химические или ядерные реакции); искажение температурного поля возникает вследствие того, что теплопроводности частицы и среды различны.

В конце статьи решается задача о взаимодействии двух разноразмерных сферических включений, на поверхности которых заданы граничные условия двух разных типов, изучается предельный переход от этой проблемы к задаче о взаимодействии частицы с плоскостью.

1. Общая постановка задачи о нагреве инородной сферы в полупространстве

Будем рассматривать неподвижную среду с теплопроводностью $\kappa_f = \text{const}$, в которую помещена сферическая частица Ω радиуса a , имеющая теплопроводность $\kappa_p = \text{const}$. Пусть среда с частицей занимает полупространство, ограниченное плоскостью W . Для определенности будем полагать, что W совпадает с плоскостью Ox_1x_2 декартовой прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$, причем центр Ω лежит на оси Ox_3 на расстоянии $h > a$ от W (Рис. 1). Соответственно, вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ описывает положение произвольной точки пространства.

При отсутствии инородного тела распределение температуры в среде задавалось бы функцией $T_\infty(\vec{x})$; обозначим через $T_W = T_\infty(x_1, x_2, 0)$ температуру, которую в этом случае имела бы плоскость W . Далее рассматривается практически

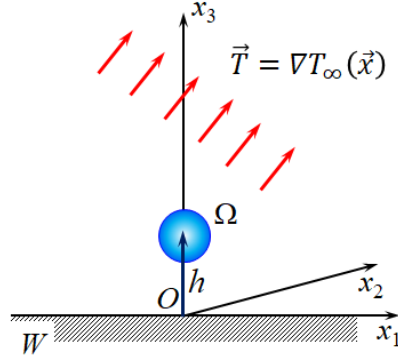


Рис. 1: Постановка задачи о термодинамическом взаимодействии сферы и плоскости

важный вариант, в котором вектор $\vec{T} = \nabla T_\infty$ постоянен, а изотермы представляют собой параллельные плоскости.

За счет того, что сфера Ω имеет иную теплопроводность, изотермы искажаются, а среда приобретает температуру $T_f(\vec{x})$, отличную от T_∞ . Вдали от частицы возмущения, вызванные ею, затухают:

$$T_f(\vec{x}) \rightarrow T_\infty(\vec{x}), \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \tag{1}$$

Будем предполагать, что температура ограничивающей плоскости по-прежнему равна T_W :

$$T_f(x_1, x_2, 0) = T_W. \tag{2}$$

Замечание 1. В реальности ситуация обратная: W поддерживается при такой температуре, чтобы индуцировать поле T_∞ . Например, если нагреть две параллельные плоскости до постоянных, но не равных друг другу температур, то будет обеспечен постоянный градиент температуры \vec{T} , перпендикулярный обеим плоскостям. В любом случае, распределения T_∞ и T_W должны быть согласованными.

Внутри сферы распределение температуры T_p не совпадает с T_f и зависит от $\vec{y} = \vec{x} - \vec{h}$, где \vec{y} откладывается от центра сферы, а сам центр, соответственно, имеет радиус-вектор $\vec{h} = (0, 0, h)$. Очевидно, T_p должна быть конечной величиной:

$$|T_p(\vec{y})| < +\infty, \quad \forall \vec{y} \in \Omega. \tag{3}$$

Внутренних источников тепла Ω не имеет, поэтому температуру и тепловой поток на ее поверхности заранее задать невозможно. Будем считать, что тепловой контакт частицы и среды идеален, тогда указанные величины обязаны быть непрерывны. Иными словами,

$$T_f = T_p, \quad \kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n} = \kappa_p \frac{\partial T_p}{\partial n}, \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega; \tag{4}$$

производная во втором равенстве берется по направлению внешней нормали \vec{n} к поверхности $\partial\Omega$, которая в данном случае задается равенством $|\vec{x} - \vec{h}| = a$.

Наконец, поскольку среда неподвижна, а граничные условия (1), (2) и (4) стационарны, функции T_f и T_p являются гармоническими:

$$\Delta_x T_f = 0, \quad \Delta_y T_p = 0 \quad (5)$$

(индексы « x » и « y » при операторе Δ показывают, по компонентам какого вектора вычисляется лапласиан).

Итак, необходимо найти функции T_f и T_p , удовлетворяющие уравнениям (5) и дополнительным условиям (1)–(4) при $\nabla T_\infty = \text{const}$.

2. Введение фиктивной частицы и мультипольное разложение решения

Попытка решения описанной задачи сталкивается с тем, что поверхность $\partial\Omega$ является конечной, а W – бесконечной, и поэтому затруднительно представить искомые функции в виде, позволяющем удовлетворить оба граничных условия (2) и (4) одновременно. Метод отражений, применяемый в подобных случаях, приводит к очень громоздким результатам [8]. Поэтому применим метод, предложенный в [9]. Вместо взаимодействия сферы Ω и плоскости W будем рассматривать взаимодействие двух идентичных сфер – Ω и M , расположенных симметрично относительно W ; центр зеркальной (фиктивной) частицы M находится в точке с радиус-вектором $-\vec{h}$. Общий подход к моделированию термодинамического взаимодействия двух сферических включений (возможно, разных радиусов) в безграничной среде был описан в [10].

В силу (5) и (1) температуру вне частиц можно разложить по мультиполям – базисным гармоническим функциям специального вида:

$$\begin{aligned} T_f(\vec{x}) = & T_\infty(\vec{x}) + [H_j^{\text{ext}}(\Omega)L_j(\vec{x} - \vec{h}) + F_{jk}^{\text{ext}}(\Omega)L_{jk}(\vec{x} - \vec{h}) + \\ & + G_{jkl}^{\text{ext}}(\Omega)L_{jkl}(\vec{x} - \vec{h}) + \dots] + [H_j^{\text{ext}}(M)L_j(\vec{x} + \vec{h}) + \\ & + F_{jk}^{\text{ext}}(M)L_{jk}(\vec{x} + \vec{h}) + G_{jkl}^{\text{ext}}(M)L_{jkl}(\vec{x} + \vec{h}) + \dots], \end{aligned} \quad (6)$$

где используется соглашение Эйнштейна: если индексы повторяются, по ним происходит суммирование в пределах от 1 до 3. Мультиполи $L_{i\dots j}$ определяются как

$$L_{i\dots j}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \dots \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right), \quad L_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|},$$

коэффициенты $H_j^{\text{ext}}(\Omega)$, $F_{jk}^{\text{ext}}(\Omega)$, ... не зависят от положения точки.

Температура внутри частицы также гармонична, но условие (1) заменяется на (3). Поэтому, аналогично (6),

$$\begin{aligned} T_p(\vec{y}) = & T_\infty(\vec{h}) + A_0^{\text{int}}(\Omega)L_0(\vec{y})|\vec{y}| + H_j^{\text{int}}(\Omega)L_j(\vec{y})|\vec{y}|^3 + F_{jk}^{\text{int}}(\Omega)L_{jk}(\vec{y})|\vec{y}|^5 + \\ & + G_{jkl}^{\text{int}}(\Omega)L_{jkl}(\vec{y})|\vec{y}|^7 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Тензорные коэффициенты $H_j^{\text{ext}}(\Omega)$, ..., $A_0^{\text{int}}(\Omega)$, $H_j^{\text{int}}(\Omega)$, ... должны быть найдены из граничных условий (4); при этом предполагается, что условие (2) удовлетворено автоматически за счет введения в рассмотрение сферы M . Искомые величины представляются в виде ряда по степеням параметра $\varepsilon = a/h < 1$, причем

чем выше предполагаемая точность решения (степень ε), тем выше оказывается ранг тензоров, задействованных в разложении.

В указанном виде решение задачи остается достаточно громоздким: тензор N -го ранга имеет 3^N компонент, так что общее количество неизвестных с повышением точности разложения растет в геометрической прогрессии. Для упрощения вычислений применяется теория нелинейных тензорных функций тензорного аргумента, изложенная, например, в [11]. Именно, геометрия задачи определяется векторами \vec{T} и \vec{h} а значит, коэффициенты разложения по мультиполям можно составить, вычисляя тензорные произведения только этих двух векторов.

Ниже с помощью указанных соображений решаются задачи о температуре с невозмущенным градиентом, направленным перпендикулярно плоскости или вдоль нее. В обоих случаях производится проверка, выполняется ли условие (2) для разложения (6), коэффициенты которого находятся с точностью ε^5 .

3. Полупространство с поперечным градиентом температуры

Пусть вектор $\vec{T} = (0, 0, T_3)$ перпендикулярен плоскости W и сонаправлен с Ox_3 . Тогда, исходя из (2), получим, что

$$T_\infty(\vec{x}) = T_W + T_3 x_3, \quad T_W = \text{const.} \quad (8)$$

Введем вектор $\vec{b} = (0, 0, 1)$ – орт оси Ox_3 . Тогда $\vec{T} = T_3 \vec{b}$, $\vec{h} = h \vec{b}$, а значит, все тензорные коэффициенты можно составить, используя лишь вектор \vec{b} . Вследствие (1) и однородности (4) относительно набора (T_f, T_p) задача линейна по \vec{T} , а значит, эти коэффициенты содержат T_3 в качестве множителя:

$$\begin{aligned} A_0 &= T_3 AA, \\ H_j &= T_3 HA b_j, \\ F_{jk} &= T_3 FA b_j b_k, \\ G_{jkl} &= T_3 GA b_j b_k b_l, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Приведенные равенства справедливы независимо от того, к какой частице, Ω или M , они относятся и какое распределение температуры описывают: вне сферы Ω (величины, помеченные индексом «ext») или внутри нее (пометка «int»).

Можно показать, что в данном случае при

$$H_j^{\text{ext}}(M) = H_j^{\text{ext}}(\Omega), \quad F_{jk}^{\text{ext}}(M) = -F_{jk}^{\text{ext}}(\Omega), \quad G_{jkl}^{\text{ext}}(M) = G_{jkl}^{\text{ext}}(\Omega) \dots \quad (10)$$

равенство (2) выполняется точно. Действительно, подстановка (8), (9) и (10) в общее разложение (6) приводит к равенству

$$\begin{aligned} T_f(x_1, x_2, 0) &= T_W + T_3 \{ HA^{\text{ext}}(\Omega) [L_3(x_1, x_2, -h) + L_3(x_1, x_2, h)] + \\ &+ FA^{\text{ext}}(\Omega) [L_{33}(x_1, x_2, -h) - L_{33}(x_1, x_2, h)] + \\ &+ GA^{\text{ext}}(\Omega) [L_{333}(x_1, x_2, -h) + L_{333}(x_1, x_2, h)] - \dots \}. \end{aligned}$$

В силу того, что L_3, L_{333}, \dots нечетны по своему третьему аргументу, а L_{33}, L_{3333}, \dots – четны, множитель при T_3 в последнем выражении равен нулю, а значит, выполняется (2).

Подстановка (6)–(10) в (4) после разложения по ε и приведения подобных слагаемых по степеням координат y_1, y_2, y_3 дает

$$\begin{aligned}
 HA^{\text{ext}}(\Omega) &= a^3 \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \varepsilon^3\right), \\
 FA^{\text{ext}}(\Omega) &= a^4 \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{2\kappa_p + 3\kappa_f} \varepsilon^4, \\
 GA^{\text{ext}}(\Omega) &= a^5 \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{3\kappa_p + 4\kappa_f} \varepsilon^5, \\
 AA^{\text{int}}(\Omega) &= -a \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \cdot \left(\frac{1}{4} \varepsilon^2 + \frac{1}{16} \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \varepsilon^5\right), \\
 HA^{\text{int}}(\Omega) &= -\frac{\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \left(3 + 3 \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \varepsilon^3\right), \\
 FA^{\text{int}}(\Omega) &= -\frac{1}{a} \cdot \frac{\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \cdot \frac{15}{32} \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{2\kappa_p + 3\kappa_f} \varepsilon^4, \\
 GA^{\text{int}}(\Omega) &= -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \cdot \frac{7}{48} \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{3\kappa_p + 4\kappa_f} \varepsilon^5.
 \end{aligned} \tag{11}$$

На Рис. 2 приведены изотермы T_f и T_p в плоскости Ox_1x_3 при следующих значениях параметров задачи: $T_W = 0$, $T_3 = 3$, $\kappa_f = 1$, $\kappa_p = 5$, $a = 1$, $h = 3$; окружность изображает поверхность частицы.

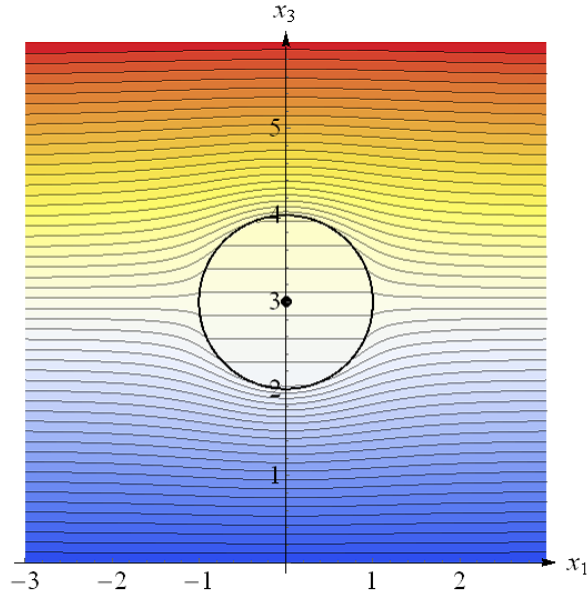


Рис. 2: Распределение температуры в плоскости Ox_1x_3 в случае, когда \vec{T} перпендикулярен W

Как видно, одна из построенных изотерм совпадает с плоскостью W ($x_3 = 0$), что иллюстрирует выполнение условия (2).

4. Полупространство с продольным градиентом температуры

Перейдем к варианту, в котором \vec{T} направлен вдоль плоскости W ; без ограничения общности будем считать, что он имеет координаты $(T_1, 0, 0)$. Тогда

$$T_\infty(\vec{x}) = T_0 + T_1 x_1, \quad T_W(\vec{x}) = T_\infty(\vec{x}). \quad (12)$$

Постоянная T_0 есть условный «нуль» температуры; она не влияет на значения других параметров задачи. Изотермами T_∞ в данном случае служат плоскости $x_1 = \text{const}$, перпендикулярные W .

В дополнение к \vec{b} введем вектор $\vec{c} = (1, 0, 0)$, так что $\vec{T} = T_1 \vec{c}$. Повторяя рассуждения предыдущего раздела, получим, что коэффициенты мультипольного разложения температуры можно сконструировать, вычисляя тензорные произведения векторов \vec{b} и \vec{c} . Как и ранее, упрощающим соображением служит линейность задачи по \vec{T} . В обсуждаемом случае она приводит к тому, что каждый коэффициент содержит множитель T_1 , а \vec{c} входит во все тензорные произведения исключительно в первой степени:

$$\begin{aligned} A_0 &= T_1 AB, \\ H_j &= T_1 HB c_j, \\ F_{jk} &= T_1 FB c_j b_k, \\ G_{jkl} &= T_1 GB c_j b_k b_l, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Вместо (10) предположим, что

$$H_j^{\text{ext}}(M) = -H_j^{\text{ext}}(\Omega), \quad F_{jk}^{\text{ext}}(M) = F_{jk}^{\text{ext}}(\Omega), \quad G_{jkl}^{\text{ext}}(M) = -G_{jkl}^{\text{ext}}(\Omega) \dots \quad (14)$$

Аналогично предыдущему разделу, нетрудно показать, что при выбранной $T_\infty(\vec{x})$ такие соотношения между тензорными коэффициентами приводят к точному выполнению (2) на всей плоскости W .

Подставляя (6), (7), (12)–(14) в (4), раскладывая полученные равенства по степеням ε и приводя подобные слагаемые по комплексам вида $y_1^{n_1} y_2^{n_2} y_3^{n_3}$, найдем значения скалярных коэффициентов AB, HB, \dots с точностью до ε^5 :

$$\begin{aligned} HB^{\text{ext}}(\Omega) &= a^3 \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \cdot \left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \varepsilon^3\right), \\ FB^{\text{ext}}(\Omega) &= a^4 \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{2\kappa_p + 3\kappa_f} \varepsilon^4, \\ GB^{\text{ext}}(\Omega) &= a^5 \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \cdot \frac{3}{64} \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{3\kappa_p + 4\kappa_f} \varepsilon^5, \\ AB^{\text{int}}(\Omega) &= 0, \\ HB^{\text{int}}(\Omega) &= -\frac{\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \left(3 + \frac{3}{8} \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \varepsilon^3\right), \\ FB^{\text{int}}(\Omega) &= -\frac{1}{a} \cdot \frac{\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{2\kappa_p + 3\kappa_f} \varepsilon^4, \\ GB^{\text{int}}(\Omega) &= -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \cdot \frac{7}{64} \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{3\kappa_p + 4\kappa_f} \varepsilon^5. \end{aligned} \quad (15)$$

Распределение температуры в плоскости Ox_1x_3 вблизи Ω представлено на Рис. 3. Физические и геометрические параметры системы не изменились: $\kappa_f = 1$, $\kappa_p = 5$, $a = 1$, $h = 3$; величина невозмущенного градиента температуры $T_3 = 3$.

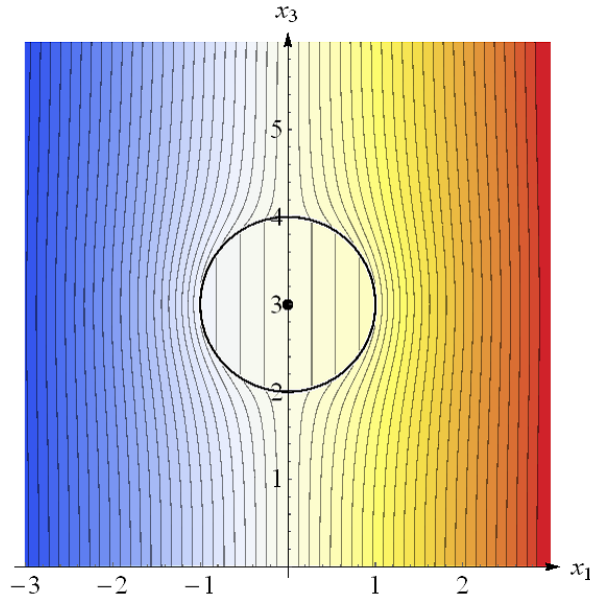


Рис. 3: Распределение температуры в плоскости Ox_1x_3 в случае, когда \vec{T} параллелен W

На этом рисунке видно, что изотермы T_f перпендикулярны плоскости W даже при наличии в среде инородного включения.

5. Предельные переходы в системе «сфера + плоскость»

Сначала установим наличие предельного перехода в решениях (9)–(11) и (13)–(15) при удалении инородной сферы от плоскости. Для этого предположим, что радиус частицы a фиксирован, а расстояние $h \rightarrow \infty$. Тогда $\varepsilon \rightarrow 0$, а значит,

$$\begin{aligned} HA^{\text{ext}}(\Omega) &\rightarrow a^3 \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f}, & HB^{\text{ext}}(\Omega) &\rightarrow a^3 \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f}, \\ HA^{\text{int}}(\Omega) &\rightarrow -\frac{3\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f}, & HB^{\text{int}}(\Omega) &\rightarrow -\frac{3\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f}, \end{aligned}$$

остальные скалярные множители в тензорных коэффициентах обращаются в нуль. Эти значения соответствуют известному решению задачи об одиночной сфере в бесконечной среде с линейным на бесконечности распределением температуры [12]. Тем самым, как и следовало ожидать, при удалении от плоскости частица перестает «видеть» ее.

Более сложен вопрос о термодинамическом взаимодействии двух разноразмерных частиц, на поверхности которых заданы граничные условия разных типов.

Так, рассмотрим две сферы – Ω радиуса a и W радиуса R , причем $R \gg a$. Предположим, что они помещены в безграничную среду, в которой на бесконечности задан постоянный градиент температуры \vec{T} , направленный вдоль оси Ox_3 , на которой лежат центры обеих сфер (Рис. 4).

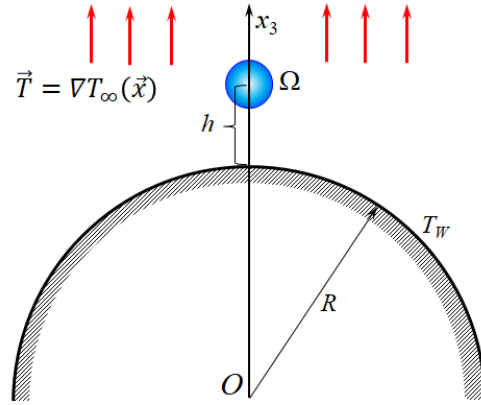


Рис. 4: Термодинамическое взаимодействие разноразмерных частиц

Как и ранее, будем считать, что теплопроводности включения Ω и среды составляют κ_p и κ_f , соответственно; распределение температуры внутри Ω и в самой среде гармонично, а на $\partial\Omega$ выполнены условия (4). Температура на поверхности W постоянна и равна T_W .

Возникает вопрос: существует ли вблизи поверхности W область, содержащая Ω , в которой можно пренебречь кривизной W ? Если такая область найдется, то ожидается, что распределение температуры в ней будет приближенно воспроизводить решение задачи о термодинамическом взаимодействии сферы Ω с плоскостью. Чтобы ответить на поставленный вопрос, сначала решим задачу о взаимодействии W и Ω при произвольном соотношении их радиусов.

Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре W . Вновь обозначим температуры внутри Ω и в среде через T_p и T_f , соответственно. Эти функции по-прежнему должны удовлетворять соотношениям (1), (3)–(5), причем температура «на бесконечности» равна

$$T_\infty(\vec{x}) = T_0 + T_3x_3. \tag{16}$$

Вместо (2) рассмотрим условие

$$T_f(\vec{x}) = T_W, \quad |\vec{x}| = R. \tag{17}$$

Замечание 2. Соотношение (17) означает, что поиски температуры внутри W лишены смысла. Согласно принципу максимума, свои наибольшее и наименьшее значения гармоническая функция, заданная внутри ограниченной области, принимает в точках на ее границе. Поэтому, если температура в W есть некая гармоническая функция, для которой выполнены условия непрерывности вида (4), то ее наибольшее и наименьшее значения совпадают, а значит, сама она постоянна.

Распределение T_p будем искать в виде (7), заменив $T_\infty(\vec{h})$ на $T_\infty(\vec{r})$; здесь и далее \vec{r} имеет длину $r = R + h$ и соединяет центры частиц W и Ω . Распределение

T_f имеет вид, аналогичный (6):

$$\begin{aligned} T_f(\vec{x}) = & T_\infty(\vec{x}) + [A_0^{\text{ext}}(\Omega)L_0(\vec{x} - \vec{r}) + H_j^{\text{ext}}(\Omega)L_j(\vec{x} - \vec{r}) + \\ & + F_{jk}^{\text{ext}}(\Omega)L_{jk}(\vec{x} - \vec{r}) + \dots] + [A_0^{\text{ext}}(W)L_0(\vec{x}) + \\ & + H_j^{\text{ext}}(M)L_j(\vec{x}) + F_{jk}^{\text{ext}}(W)L_{jk}(\vec{x}) + \dots]. \end{aligned} \quad (18)$$

Структура тензорных коэффициентов аналогична (9): только A_0 , H_3 , F_{33} ,... могут быть отличными от нуля. Будем искать их, исходя из граничных условий (4) и (17) в виде разложения по степеням параметра $\varepsilon_1 = a/r$. Приведем решение с точностью до ε_1^2 :

$$\begin{aligned} A_0^{\text{ext}}(\Omega) = 0, \quad H_3^{\text{ext}}(\Omega) &= T_3 a^3 \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} - (T_W - T_0)aR \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \varepsilon_1^2, \\ A_0^{\text{ext}}(M) &= (T_W - T_0)R - T_3 aR \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \varepsilon_1^2, \quad H_3^{\text{ext}}(M) = T_3 R^3, \\ A_0^{\text{int}}(\Omega) &= (T_W - T_0) \frac{R}{a} \varepsilon_1 - T_3 \cdot \frac{R^3}{a^2} \varepsilon_1^2, \\ H_3^{\text{int}}(\Omega) &= -T_3 \cdot \frac{3\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} + (T_W - T_0) \frac{R}{a^2} \cdot \frac{3\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \varepsilon_1^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Легко проверить, что при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ описанное распределение температуры сводится к сумме двух независимых задач об одиночных частицах с граничными условиями разных типов на поверхности.

Попытаемся выполнить предельный переход от системы двух разноразмерных сферических частиц к системе «сфера + плоскость». Учитывая, что искомая область находится вблизи поверхности W , выполним замену $x_3 = R + z_3$, где $z_3 \ll R$. Далее зафиксируем a , h , заменим ε_1 на $a/(R + h)$ и устремим R к бесконечности:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} T_f &= T_W + 3T_3 z_3 + \frac{3a^3(\kappa_p - \kappa_f)}{\kappa_p + 2\kappa_f} T_3 \cdot \frac{h - z_3}{[x_1^2 + x_2^2 + (h - z_3)^2]^{3/2}}, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} T_p &= T_W + 3T_3 h + \frac{9\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} T_3 y_3. \end{aligned}$$

Тем самым, получено решение задачи об одиночной частице Ω в безграничной среде, в которой градиент температуры на бесконечности составляет $3\vec{T}$ (вместо исходного \vec{T}), а условный нуль температуры равен T_W .

Последний результат является достаточно неожиданным: при неограниченном увеличении радиуса большей частицы она не «превращается в плоскость», а исчезает, при этом градиент температуры утраивается.

Оказывается, это явление наблюдается и в отсутствие меньшей частицы Ω . Действительно, если в среду с изначально линейным распределением температуры (16) поместить частицу радиуса R с постоянной температурой поверхности T_W , то искаженное поле температуры будет задаваться формулой

$$T_f(\vec{x}) = T_0 + T_3 x_3 + (T_W - T_0)R L_0(\vec{x}) + R^3 T_3 L_3(\vec{x}), \quad (20)$$

следующей из (19) при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Если $x_3 = R + z_3$ и $R \rightarrow \infty$, это поле переходит в $T_W + 3T_3 x_3$, т.е. воспроизводит обнаруженный ранее эффект.

Объяснением феномена служит то, что в задаче о сфере даже очень большого радиуса заданная T_∞ есть температура далеко от поверхности сферы. Предельный переход при $R \rightarrow \infty$ позволяет локально «выпрямить» сферу, но изначальные условия «на бесконечности» при этом заменяются условиями на внешней границе той (небольшой) области, внутри которой кривизной W можно пренебречь.

При попытке смоделировать градиент температуры, параллельный плоскости, несоответствие температурных полей вблизи границы полупространства и сферы большого радиуса проявляется еще сильнее: в окрестности точки $\vec{x} = (R, 0, 0)$ распределение (20) переходит просто в $T_f = T_W$.

Итак, предельный переход от системы двух сфер к системе «сфера + плоскость» отсутствует.

Заключение

В настоящей статье задача о термодинамическом взаимодействии плоскости и одиночного сферического включения, помещенного в сплошную среду с постоянным градиентом температуры, решается методом фиктивной частицы. Авторами рассмотрены два основных случая, в которых заданный на удалении от инородной сферы градиент температуры перпендикулярен и параллелен плоскости.

Замена системы «плоскость + сфера» на систему двух идентичных сфер позволяет искать распределение температуры в виде ряда по гармоническим мультиполям. Подбор соотношений между коэффициентами разложения, отвечающими реальной и фиктивной частице, обеспечивает выполнение граничных условий на плоскости, а использование теории нелинейных тензорных функций сокращает количество неизвестных коэффициентов.

Обсуждена проблема предельного перехода от описания системы двух разноразмерных частиц к моделированию взаимодействия сферы и плоскости. Получено, что при внешнем расположении сфер указанный переход невозможен.

Список литературы

- [1] Эйнштейн А. Новое определение размеров молекул // Собр. науч. трудов. Т. III. Работы по кинетической теории, теории излучения и основам квантовой механики. Под ред. И. Е. Тамма, Я. А. Смородинского, Б. Г. Кузнецова. М.: Наука, 1966. С. 75–91.
- [2] Максвелл Дж.К. Трактат об электричестве и магнетизме. М.: Наука, 1989.
- [3] Batchelor G.K., Green J.T. The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field // *Journal of Fluid Mechanics*. 1972. Vol. 56, № 2. Pp. 375–400.
- [4] Бердичевский А.Л. Об эффективной теплопроводности сред с периодически расположенными включениями // Доклады АН СССР. 1979. Т. 247, № 6. С. 1363–1367.
- [5] Chiu C.-L., Fan C.-M., Chu C.R. Numerical analysis of two spheres falling side by side // *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34, № 7.

- [6] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 352 с.
- [7] Thakur R., Sharma A., Govindarajan R. Early evolution of optimal perturbations in a viscosity-stratified channel // *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 914.
- [8] Сенницкий В.Л. О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки // *Прикладная математика и техническая физика*. 2000. Т. 41, № 1. С. 57–62.
- [9] Баранов В.Е., Мартынов С.И. Моделирование динамики частиц в вязкой жидкости при наличии плоской стенки // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2010. Т. 50, № 9. С. 1669–1686.
- [10] Сыромясов А.О. Термодинамическое взаимодействие сферических частиц в среде с постоянным градиентом температуры // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*. 2011. № 4. С. 1158–1160.
- [11] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. СПб.: Лань, 2004. 528 с.
- [12] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. 736 с.

Образец цитирования

Сыромясов А.О., Еделева Ю.П. Распределение температуры в полупространстве, содержащем сферическое включение // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2023. № 3. С. 5–18. <https://doi.org/10.26456/vtprm692>

Сведения об авторах

1. Сыромясов Алексей Олегович

доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва.

Россия, 430005, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1, Мордовский государственный университет. E-mail: syal1@yandex.ru

2. Еделева Юлия Павловна

магистрант факультета математики и информационных технологий Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва.

Россия, 430005, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1, Мордовский государственный университет. E-mail: edelewa.yulia@yandex.ru

TEMPERATURE DISTRIBUTION IN A HALF-SPACE CONTAINING SPHERICAL INCLUSION

Syromiasov A.O., Edeleva Yu.P.
Ogarev Mordovia State University, Saransk

Received 21.07.2023, revised 05.08.2023.

Description of thermodynamic processes in disperse media placed in containers and tubes becomes more precise if thermodynamic interaction of disperse particles and container walls is taken into account. The paper deals with spherical particle without internal heat sources. This particle is placed near a plane wall and distorts temperature distribution in a medium because of difference in heat conduction coefficients. Authors obtain that it is convenient to use reflection and continue the half-space bounded by the wall, thus replacing system “plane + sphere” by another one: “two symmetric spheres”. To solve Laplace equation in unbounded space authors use multipole expansion; structure of coefficients in this expansion depends on symmetry of particles’ configuration and of boundary conditions. The paper also discusses possibility of limit transition from system “a large sphere + a small sphere” to system “plane + sphere” in order to solve a problem about a spherical particle in a half-space.

Keywords: thermodynamic interaction, Laplace equation, fictitious particle, multipole, nonlinear tensor function.

Citation

Syromiasov A.O., Edeleva Yu.P., “Temperature distribution in a half-space containing spherical inclusion”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 3, 5–18 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk692>

References

- [1] Ejnshjtejn A., “A new definition of the size of molecules”, *Sobr. nauch. trudov. T. III. Raboty po kineticheskoy teorii, teorii izlucheniya i osnovam kvantovoj mekhaniki [Collected Scientific Works, vol. III. Works on kinetic theory, radiation theory and fundamentals of quantum mechanics]*, eds. I. E. Tamma, Ya. A. Smorodinskogo, B. G. Kuznetsova, Nauka Publ., Moscow, 1966, 75–91.
- [2] Maksvell Dzh.K., *A treatise on electricity and magnetism*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (in Russian).
- [3] Batchelor G.K., Green J.T., “The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field”, *Journal of Fluid Mechanics*, **56**:2 (1972), 375–400.

- [4] Berdichevskij A.L., “On the effective thermal conductivity of media with periodically located inclusions”, *Doklady AN SSSR [Reports of the USSR Academy of Sciences]*, **247**:6 (1979), 1363–1367 (in Russian).
- [5] Chiu C.-L., Fan C.-M., Chu C.R., “Numerical analysis of two spheres falling side by side”, *Physics of Fluids*, **34**:7 (2022).
- [6] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P., *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov [Averaging of processes in periodic environments. Mathematical problems of mechanics of composite materials]*, Nauka Publ., Moscow, 1984 (in Russian), 352 pp.
- [7] Thakur R., Sharma A., Govindarajan R., “Early evolution of optimal perturbations in a viscosity-stratified channel”, *Journal of Fluid Mechanics*, **914** (2021).
- [8] Sennitskij V.L., “On the force interaction of a ball and a viscous liquid in the presence of a wall”, *Prikladnaya matematika i tekhnicheskaya fizika [Applied Mathematics and technical physics]*, **41**:1 (2000), 57–62 (in Russian).
- [9] Baranov V.E., Martynov S.I., “Modeling of particle dynamics in a viscous liquid in the presence of a flat wall”, *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoy fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]*, **50**:9 (2010), 1669–1686 (in Russian).
- [10] Syromyasov A.O., “Thermodynamic interaction of spherical particles in a medium with a constant temperature gradient”, *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo [Bulletin of the Nizhny Novgorod University named after N. I. Lobachevsky]*, 2011, № 4, 1158–1160 (in Russian).
- [11] Sedov L.I., *Mechanics of Continuous Media. V. 1*, World Scientific Publishing Company, New Jersey, 1997, 528 pp.
- [12] Landau L.D., Lifshitz E.M., *Fluid Mechanics*, 2nd ed., Butterworth–Heinemann, Waltham, Massachusetts, 1986, 736 pp.

Author Info

1. Syromiasov Aleksei Olegovich

Associate Professor at the department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Ogarev Mordovia State University.

*Russia, 430005, Saransk, Bolshevistskaya str., 68/1,
Ogarev Mordovia State University. E-mail: syal1@yandex.ru*

2. Edeleva Yuliya Pavlovna

Master Student at the Faculty of Mathematics and Information Technologies, National Research Mordovia State University.

*Russia, 430005, Saransk, Bolshevistskaya str., 68/1,
Ogarev Mordovia State University. E-mail: edelewa.yulia@yandex.ru*