УДК 519.2

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕЗЕРВА ОРГАНИЗАЦИИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ РИСКУ[1]

Бенинг В.Е.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
Институт проблем информатики Российской академии наук, г. Москва

Поступила в редакцию 16.07.2023, после переработки 25.08.2023.

В работе рассмотрено асимптотическое поведение резерва организации, подверженной риску в случае, когда число факторов, приводящих к убытку, случайно. Рассмотрено конкретное рапределение убытков, близкое к распределению Бёрра. Проведено асимптотическое сравнение деятельности таких организаций в терминах необходимого добавочного числа таких факторов. Рассмотрены два примера, иллюстрирующие полученные результаты. Первый пример касается максимальных потерь, а во втором примере рассматриваются усечённые биномиальное и распределение Пуассона, описывающие число случайных факторов, приводящих к потерям.

Ключевые слова: резерв страховой компании, выборка случайного объёма, распределение Бёрра, асимптотические разложения, усечённые биномиальное и распределение Пуассона, максимальная порядковая статистика, асимптотический дефект.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 4. С. 25–42.
https://doi.org/10.26456/vtpmk696

Введение

Всюду ниже под организацией, подверженной риску, будем понимать страховую компанию (фирму), а под факторами риска ее клиентов, страхующих свои потери. Хотя, например, под такой организацией можно рассматривать лечебное учереждение, а под факторами риска – ее больных (в случайном числе, например, в условиях пандемии).

Итак, рассмотрим простейшую модель страхования, в которой в течение разных отчётных периодов одинаковой длины (скажем, месяцев или лет) происходит разное число страховых событий (страховых выплат или заключений страховых контрактов). Подобного рода ситуации возникают, например, в медицине, когда число пациентов с тем или иным заболеванием варьируется от года к году, в технике, когда при испытании на надежность (скажем, при определении наработки

[1]Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2022-284.

на отказ) разных партий приборов, число отказавших приборов в разных партиях будет разным и заранее неопределённым. В таких ситуациях «число клиентов, которые доступны страховой компании», разумно считать случайной величиной. В силу указанных обстоятельств вполне естественным становится изучение асимптотического поведения деятельности страховой компании в случае, когда число клиентов случайно. На естественность такого подхода, в частности, обратили внимание авторы работ [1-5].

В работе [17] рассматривалось распределение с функцией распределения (ф.р.) вида (распределение Бёрра)

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1 + x^c)^k}, \quad x > 0, \quad c > 0, \quad k > 0.$$

При этом постоянные c и k характеризуют скорость убывания «хвостов» этого распределения (она может быть достаточно медленной, то есть с большой вероятностью возможны «большие» риски). Применению этого распределения, например, посвящёны раздел 6 работы [17], работа [20], оно также рассмотрено в книге [18] (стр. 242). В настоящей работе рассмотрено (технически более удобное) распределение, близкое (в смысле асимптотического поведения «хвостов») к распределению Бёрра, и имеющее ф.р. вида

$$F_\gamma(x) = 1 - \frac{\gamma^r}{x^r}, \quad x \geq \gamma > 0, \; r > 0,$$

при этом параметры $\gamma > 0$ и $r > 0$ могут быть сколь угодно малы.

Для этого случая в работе изучается асимптотическое поведение необходимого резерва страховой компании в случае, когда число клиентов страховой фирмы детерминированно или случайно. Результаты подобного типа содержатся в работах [11] – [16]. Получены асимптотические разложения (а.р.) необходимого резерва страховой компании. Проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых компаний в терминах необходимого добавочного числа клиентов (асимптотический дефект). Рассмотрены два примера, иллюстрирующие полученные результаты. Первый пример касается максимальных потерь (максимальная порядковая статистика), а во втором рассматриваются усечённые биномиальное и распределение Пуассона.

1. Асимптотический дефект и его свойства

Рассмотрим две статистические процедуры Π_n^* и Π_n с мерами качества π_n^* и π_n соответственно. Здесь n – число наблюдений $X_1, \ldots, X_n$, на которых основаны эти процедуры. При этом предпологается, что статистическая процедура Π_n^* является в некотором смысле «оптимальной», а процедура Π_n – конкурирующей. Например, в задаче статистического оценивания в качестве меры качества обычно выступает среднеквадратичное отклонение оценки от оцениваемой функции, тогда $\pi_n^* \leq \pi_n$, а в задаче проверки статистичеких гипотез в качестве меры качества критериев рассматривают их мощность и тогда $\pi_n^* \geq \pi_n$.

Обозначим через $m(n)$ необходимое число наблюдений, которое требуется процедуре $\Pi_{m(n)}$, основанной на наблюдениях $X_1, \ldots, X_{m(n)}$, для достижения такого же качества, что и в «лучшей» процедуре Π_n^*, основанной на n наблюдениях $X_1, \ldots, X_n$. Ниже рассматривается асимптотический подход, означающий, что

$n \to \infty$. Под асимптотической относительной эффективностью (АОЭ) процедуры $\Pi_{m(n)}$ по отношению к процедуре Π_n^* понимается предел (в случае его существования и независимости от последовательности $m(n)$) вида (см., например, [9])

$$e \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{n}{m(n)}.$$

Например, предположим, что $e = 1/3$. Тогда при больших значениях числа наблюдений n величина $m(n)$ приближённо равна $3n$, поэтому процедура $\Pi_{m(n)}$ для достижения такого же качества, что и процедура Π_n^*, требует примерно в три раза больше наблюдений.

Вместо отношения необходимого числа наблюдений, естественно, можно было бы рассматривать разность вида $m(n) - n$, которая тоже имеет наглядный смысл необходимого дополнительного числа наблюдений, требующихся процедуре $\Pi_{m(n)}$ для достижения того же качества, что и в процедуре Π_n^*. Однако, исторически сложилось так, что многие авторы сначала исследовали асимптотические свойства отношения $n/m(n)$ (возможно, в силу относительной простоты его поведения).

Впервые общее асимптотическое исследование поведения разности $m(n) - n$ было предпринято в 1970 году Ходжесом и Леманом (см. работу [7]). Они назвали разность $m(n) - n$ дефектом (deficiency) конкурирующей процедуры $\Pi_{m(n)}$ относительно процедуры Π_n^* и предложили обозначение

$$d_n = m(n) - n. \tag{1.1}$$

Если предел $\lim_{n\to\infty} d_n$ существует, то он называется *асимптотическим дефектом* процедуры $\Pi_{m(n)}$ относительно процедуры Π_n^* и обозначается символом d. Часто d называют просто дефектом $\Pi_{m(n)}$ относительно Π_n^*. Заметим, что если АОЭ процедуры $\Pi_{m(n)}$ $e \neq 1$, то $d = \infty$ и этот случай малоинтересен. В работе [7] также было отмечено, что существуют статистические задачи, в которых типичным образом возникает случай $e = 1$ (см., например, книгу [10] и работы [11], [12]), то есть в этом случае понятие АОЭ не даёт ответа на вопрос какая процедура лучше и понятие дефекта проясняет эту ситуацию, поскольку в этом случае асимптотический дефект может, в принципе, быть любым.

Предположим, например, что $d = 7$. Тогда для больших значений n величина $m(n)$ равна приближённо $n + 7$. Чтобы получить ту же величину критерия качества процедуре $\Pi_{m(n)}$ требуется примерно на семь наблюдений больше, чем процедуре Π_n^*.

Таким образом, дефект процедуры $\Pi_{m(n)}$ относительно процедуры Π_n^* показывает, сколько добавочных наблюдений, примерно, требуется, если мы настаиваем на использовании процедуры $\Pi_{m(n)}$ вместо процедуры Π_n^*, и поэтому создаёт естественный базис для их асимптотического сравнения в случае $e = 1$. Исследование асимптотического поведения дефекта d_n технически более сложно, чем нахождение предела e. Часто оно требует построения асимптотических разложений (а.р.) для соответсвующих функций, характеризующих качество оценок (см., например, книги [8-10]).

Напомним, что статистические процедуры Π_n^* и Π_n имеют меры качества π_n^* и π_n соответственно. Тогда по определению величины $d_n = m(n) - n$, для каждого n должно выполняться равенство

$$\pi_n^* = \pi_{m(n)}. \tag{1.2}$$

При решении уравнения (1.2) целочисленную величину $m(n)$ следует рассматривать как переменную, принимающую произвольные действительные значения. Для этого можно определить функцию $\pi_{m(n)}$ для нецелых значений $m(n)$ по формуле

$$\pi_{m(n)} \;=\; \big(1 \;-\; m(n) \;+\; [m(n)]\big)\; \pi_{[m(n)]} \;+\; \big(m(n) \;-\; [m(n)]\big)\; \pi_{[m(n)]+1}$$

(см. работу [7]).

Типичным образом, функции π_n^* и π_n точно неизвестны и поэтому используются их аппроксимации. Предположим, что справедливы асимптотические разложения вида

$$\pi_n^* \;=\; \frac{a}{n^r} \;+\; \frac{b}{n^{r+s}} \;+\; o\big(n^{-r-s}\big), \tag{1.3}$$

$$\pi_n \;=\; \frac{a}{n^r} \;+\; \frac{c}{n^{r+s}} \;+\; o\big(n^{-r-s}\big), \tag{1.4}$$

где $a,\ b$ и c – некоторые постоянные не зависящие от n, а $r \;>\; 0,\ s \;>\; 0$ – некоторые константы, определяющие порядок убывания по n этих критериев качества. Первый член в этих асимптотических разложениях одинаков и это отражает тот факт, что АОЭ этих процедур равна единице. Из соотношений (1.1) – (1.4) легко получить, что (см. работу [7] или книгу [9])

$$d_n \;=\; \frac{c \;-\; b}{r\; a}\; n^{1-s} \;+\; o\big(n^{1-s}\big). \tag{1.5}$$

Таким образом, асимптотический дефект имеет вид

$$d \;=\; \begin{cases} \pm\infty, & 0 \;<\; s \;<\; 1, \\ \dfrac{c \;-\; b}{r\; a}, & s \;=\; 1, \\ 0, & s \;>\; 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Случай, когда выполняется равенство $s \;=\; 1$, представляется наиболее интересным, поскольку в этом случае асимптотический дефект конечен. Ходжес и Леман в работе [7] привели ряд простых примеров, показывающих естественность возникновения этого случая в математической статистике (см., также книгу [10] и работы [11], [12]).

В работе приняты следующие обозначения: $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

В разделе 2 приведены результаты в случае неслучайного числа клиентов, в разделе 3 проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых компаний в этом случае, в разделе 4 рассмотрена ситуация, когда число клиентов страховой фирмы случайно, в разделе 5 рассмотрены примеры.

2. Асимптотическое поведение необходимого резерва страховой организации в случае большого неслучайного числа клиентов

Рассмотрим страховую компанию, занимающуюся страхованием $n \;\in\; \mathbb{N}$ клиентов, риски которых описываются случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$ (не обязательно независимыми и одинаково рапределенными). Обозначим через

$$S_n \;=\; S_n(X_1, \cdots, X_n)$$

потери страховой компании при страховании этих n клиентов. В частном случае эти потери могут иметь вид суммы отдельных исков клиентов

$$S_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2.1}$$

или равняться их максимальному значению

$$S_n \;=\; \max_{1\le i\le n} X_i \;\equiv\; X_{(n)}. \tag{2.2}$$

Назовём α – резервом (асимптотической α – квантилью статистики S_n, $\alpha \in (0,1)$ – малое число) соответствующим потерям S_n величину $c^*_\alpha(n)$, удовлетворяющую асимптотическому равенству

$$\mathsf{P}\big(S_n \;\ge\; c^*_\alpha(n)\big) \;=\; \alpha \;+\; o(n^{-2\beta}),\quad \beta \;>\; 0,\quad n \;\to\; \infty. \tag{2.3}$$

В регулярном случае, обычно, $\beta = 1/2$ (см. работу [16]), однако здесь будет рассмотрен случай $\beta = 1$. Если интерпретировать статистику S_n как общие страховые требования, которые предъявляются клиентами страховой компании, то α-резерв $c^*_\alpha(n)$ может рассматриваться как резервный капитал страховой компании, который ей при большом числе клиентов n (асимптотически) с большой вероятностью $1 - \alpha$ желательно не превышать.

Применяя формулу Тейлора, несложно получить следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть для функции распределения статистики S_n равномерно по $x \in \mathbb{R}$ справедливо а.р. вида*

$$\mathsf{P}\big(S_n \;<\; x\big) \;=\; G^*(x) \;+\; \frac{1}{n^\beta}\, g^*_1(x) \;+\; \frac{1}{n^{2\beta}}\, g^*_2(x) \;+\; o(n^{-2\beta}),\quad \beta \;>\; 0,$$

где $G^*(x)$, $g^*_1(x)$, $g^*_2(x)$ – достаточно гладкие функции, тогда для α-резерва $c^*_\alpha(n)$ справедливо а.р.

$$c^*_\alpha(n) \;=\; c^*_\alpha \;-\; \frac{g^*_1(c^*_\alpha)}{n^\beta\; G^{*\prime}(c^*_\alpha)} \;-$$
$$-\;\frac{1}{n^{2\beta}}\left(\frac{G^{*\prime\prime}(c^*_\alpha)g^{*2}_1(c^*_\alpha)}{2(G^{*\prime}(c^*_\alpha))^3} \;+\; \frac{G^{*\prime}(c^*_\alpha)g^*_2(c^*_\alpha) \;-\; g^*_1(c^*_\alpha)g^{*\prime}_1(c^*_\alpha)}{(G^{*\prime}(c^*_\alpha))^2}\right) \;+\; o(n^{-2\beta}),$$

где c^*_α удовлетворяет уравнению $G^*(c^*_\alpha) \;=\; 1 \;-\; \alpha$.

Рассмотрим применение этой леммы в случае, когда страховая компания страхует однотипных и независимых клиентов, а потери представлены нормированной величиной (2.2) (случай нормированной суммы (2.1) рассмотрен в работе [16]).

Итак, пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимые одинаково распределённые с.в., имеющие функцию распределения

$$F_\gamma(x) \;\equiv\; \mathsf{P}\big(X_1 \;<\; x\big) \;=\; 1 \;-\; \frac{\gamma^r}{x^r},\quad x \;\ge\; \gamma \;>\; 0,\; r \;>\; 0 \tag{2.4}$$

и для каждого n общие потери страховой компании имеют вид нормированной максимальной порядковой статистики (или максимальной потери)

$$S_n \;=\; n^{-1/r}\; X_{(n)}. \tag{2.5}$$

Лемма 2.2. *Пусть независимые одинаково распределённые с.в.* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *имеют функцию распределения (2.4). Тогда для функции распределения статистики* S_n *(см. (2.5)) справедливо асимптотическое разложение вида*

$$\Big|\mathsf{P}\big(S_n < x\big) - e^{-\gamma^r/x^r} + e^{-\gamma^r/x^r}\,\frac{\gamma^{2r}}{2nx^{2r}} + $$
$$+ e^{-\gamma^r/x^r}\,\frac{\gamma^{3r}}{3n^2x^{3r}}\Big(1 - \frac{3\gamma^r}{8x^r}\Big)\Big| \le \frac{C_\gamma\, e^{-\gamma^r/x^r}}{n^3 h_r(x)},\ C_\gamma > 0,\ x \ge \gamma > 0,\quad n \in \mathbb{N},$$

где функция $h_r(x)$ *имеет вид*

$$h_r(x) = \begin{cases} x^{2r}, & x > 1, \\ x^{12r}, & x < 1. \end{cases}$$

Доказательство. По определению (2.5) статистики S_n имеем

$$\mathsf{P}\big(S_n < x\big) = F_\gamma^n(n^{1/r}x) = \Big(1 - \frac{\gamma^r}{nx^r}\Big)^n = \exp\{n\log\big(1 - \gamma^r/nx^r\big)\}. \quad (2.6)$$

Теперь, используя разложение

$$\log(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \rho(t),$$

где для $\delta > 0$ существует константа $C_\delta > 0$ такая, что справедливо неравенство

$$|\rho(t)| \le C_\delta\, t^4, \quad |t| \le \delta,$$

получаем (см. (2.6))

$$\mathsf{P}\big(S_n < x\big) = \exp\{n\log\big(1 - \gamma^r/nx^r\big)\} =$$
$$= \exp\{-\gamma^r/x^r - \gamma^{2r}/2nx^{2r} - \gamma^{3r}/3n^2x^{3r} + \rho_n(x)\}, \quad (2.7)$$

где для остаточного члена $\rho_n(x)$ справедливо неравенство

$$|\rho_n(x)| \le \frac{C_\gamma}{n^3x^{4r}}, \quad C_\gamma > 0.$$

Далее, используя неравенство

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \bar\rho(t), \quad |\bar\rho(t)| \le C_\delta|t|^3, \quad |t| \le \delta,$$

непосредственно из соотношения (2.7) получаем

$$\mathsf{P}\big(S_n < x\big) = \exp\{-\gamma^r/x^r\}\Big(1 - \gamma^{2r}/2nx^{2r} - \gamma^{3r}/3n^2x^{3r} + \rho_n(x) +$$
$$+ \frac{(\gamma^{2r}/2nx^{2r} + \gamma^{3r}/3n^2x^{3r} + \rho_n(x))^2}{2} + \tilde\rho_n(x)\Big), \quad (2.8)$$

где остаточный член $\tilde\rho_n(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|\tilde\rho_n(x)| \le C_\gamma|\gamma^{2r}/2nx^{2r} + \gamma^{3r}/3n^2x^{3r} + \rho_n(x)|^3.$$

Теперь утверждение Леммы следует из соотношений (2.7) и (2.8). Лемма доказана. □

Из этих Лемм непосредственно следут а.р. для α-резерва $c^*_\alpha(n)$.

Лемма 2.3. *Пусть выполнены условия Леммы 2.2, тогда для α-резерва $c^*_\alpha(n)$ справедливо а.р.*

$$c^*_\alpha(n) \;=\; v_\alpha \;+\; \frac{v_1(\alpha)}{n} + \frac{v_2(\alpha)}{n^2} \;+\; o(n^{-2}),$$

где

$$\begin{aligned} v_\alpha \;&=\; \gamma \; l^{-1/r}(\alpha), \\ v_1(\alpha) \;&=\; \frac{\gamma}{2r} \; l^{(r-1)/r}(\alpha), \\ v_2(\alpha) \;&=\; -\frac{\gamma \; l^{(2r-1)/r}(\alpha)}{24r} \Big(4 \;+\; \frac{3(r \;+\; 1)}{r}\Big), \\ l(\alpha) \;&=\; - \; \log(1 \;-\; \alpha). \end{aligned}$$

3. Сравнение необходимых резервов страховых компаний при неслучайном числе клиентов

В этом разделе будет проведено асимптотическое сравнение необходимых резервов двух страховых компаний в терминах необходимого добавочного числа клиентов (асимптотический дефект).

Рассмотрим теперь другую страховую компанию, суммарный ущерб которой имеет вид $T_n \;=\; T_n(Y_1, \cdots, Y_n)$, и зависит от n «потерь» $Y_1, \ldots, Y_n$, представляющих собой с.в.(с произвольным совместным распределением), описывающих страховые требования n клиентов этой страховой компании. Назовём α-резервом ($\alpha \;\in\; (0,1)$), соответствующим нормированному ущербу T_n, величину $c_\alpha(n)$, удовлетворяющую асимптотическому равенству

$$\mathsf{P}\big(T_n \;\geq\; c_\alpha(n)\big) \;=\; \alpha \;+\; o(n^{-2}), \qquad n \;\to\; \infty. \tag{3.1}$$

Если интерпретировать величину T_n как суммарные страховые требования, предъявляемые страховой компании n клиентами, то α-резерв $c_\alpha(n)$ может рассматриваться как резервный капитал страховой компании, который ей с большой вероятностью $1 \;-\; \alpha$ желательно не превышать. Здесь будет рассмотрен случай, когда $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ независимые одинаково распределённые с.в., имеющие функцию распределения

$$F_{\gamma_n}(x) \;\equiv\; \mathsf{P}\big(Y_1 \;<\; x\big) \;=\; 1 \;-\; \frac{\gamma_n^r}{x^r}, \quad x \;\geq\; \gamma_n \;>\; 0, \; r \;>\; 0, \tag{3.2}$$

$$\gamma_n \;=\; \gamma \;+\; \frac{a}{n} \;+\; \frac{b}{n^2} \;+\; o(n^{-2}), \;\; a, \; b \;\in\; \mathbb{R}$$

и для каждого n общие потери страховой компании имеют вид нормированной максимальной порядковой статистики (или максимальной потери)

$$T_n \;=\; n^{-1/r} \, Y_{(n)}, \quad Y_{(n)} \;=\; \max_{1 \leq i \leq n} Y_i. \tag{3.3}$$

Из Леммы 2.2 непосредственно следует

Лемма 3.1. *Пусть независимые одинаково распределённые с.в. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ имеют функцию распределения (3.2), тогда для α-резерва $c_\alpha(n)$ (см. (3.1)) статистики T_n (см. (3.3)) справедливо а.р.*

$$c_\alpha(n) \;=\; v_\alpha \;+\; \frac{\bar{v}_1(\alpha)}{n} \;++\; \frac{\bar{v}_2(\alpha)}{n^2} \;+\; o(n^{-2}),$$

где

$$v_\alpha \;=\; \gamma\; l^{-1/r}(\alpha),$$

$$\bar{v}_1(\alpha) \;=\; a\; l^{-1/r}(\alpha) \;+\; v_1(\alpha),$$

$$\bar{v}_2(\alpha) \;=\; \frac{a\; l^{(r-1)/r}(\alpha)}{2r} \;+\; b\; l^{-1/r}(\alpha) \;+\; v_2(\alpha),$$

$$l(\alpha) \;=\; -\;\log(1 \;-\; \alpha).$$

Рассмотрим теперь в качестве меры качества страховой компании ее α-резерв, то есть пусть

$$\pi_n^* \;=\; c_n^*(\alpha), \quad \pi_n \;=\; c_n(\alpha).$$

Теперь непосредственно из Леммы 3.1 и формулы (1.6) получается формула для асимптотического дефекта.

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия Лемм (2.3) и (3.1) , тогда, если $a \;=\; 0$, (см. (3.2)) то асимптотический дефект (добавочное число клиентов) имеет вид*

$$d = \frac{b\; l^{-1/r}(\alpha)}{v_1(\alpha)} = -\frac{2br}{\log(1-\alpha)}.$$

4. Случайное число клиентов

Рассмотрим случайные величины $N_1,\; N_2,\; \ldots$ и $X_1,\; X_2,\; \ldots$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega,\;\; \mathcal{A},\; \mathsf{P})$. В рассматриваемом случае страхования с.в. $X_1,\; X_2,\; \ldots\; X_n$ интерпретируются как страховые требования клиентов, n – неслучайное число клиентов страховой фирмы, а с.в. N_n – случайное число клиентов страховой компании, зависящее от натурального параметра $n \in\; \mathbb{N}$. Например, если с.в. N_n имеет геометрическое распределение вида

$$\mathsf{P}(N_n \;=\; k) \;=\; \frac{1}{n}\,\Big(1 \;-\; \frac{1}{n}\Big)^{k-1},\; k \in \mathbb{N},$$

то

$$\mathsf{E}\; N_n = n \tag{4.1}$$

и, значит, среднее число клиентов, обратившихся в страховую компанию, равно n. Условие (4.1) далее будет предполагаться всегда выполненным.

Пусть для каждого $n \;\in\; \mathbb{N}$ с.в. N_n принимает только натуральные значения (то есть, $N_n \;\in \mathbb{N}$) и не зависит от последовательночти с.в. $X_1,\; X_2,\; \ldots$.

Для каждого $n \;\in\; \mathbb{N}$, как и выше, обозначим через $S_n \;=\; S_n(X_1, \cdots, X_n)$ обобщенные потери страховой компании, то есть действительную измеримую функцию, зависящую от страховах требований $X_1,\; \ldots,\; X_n$. Для каждого n определим потери страховой компании, обслуживающей случайное число клиентов N_n, как S_{N_n}

$$S_{N_n}(\omega) \;\equiv\; S_{N_n(\omega)}(X_1(\omega), \cdots, X_{N_n(\omega)}(\omega)), \;\; \omega \;\in\; \Omega.$$

Асимптотическое разложение для ф.р. случайных потерь S_{N_n} описывается следующей леммой.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия Леммы 2.2, тогда*

$$\Big|\mathsf{P}\big(S_{N_n} \;<\; x\big) \;-\; e^{-\gamma^r/x^r} \;+\; e^{-\gamma^r/x^r}\;\frac{\gamma^{2r}\;\mathsf{E}\;N_n^{-1}}{2x^{2r}} \;+$$
$$+\; e^{-\gamma^r/x^r}\;\frac{\gamma^{3r}\;\mathsf{E}\;N_n^{-2}}{3\;x^{3r}}\Big(1 \;-\; \frac{3\gamma^r}{8x^r}\Big)\Big| \;\le$$
$$\frac{C_\gamma\; e^{-\gamma^r/x^r}\;\mathsf{E}\;N_n^{-3}}{3h_r(x)},\; C_\gamma \;>\; 0,\; x \;\ge\; \gamma \;>\; 0, \;\; n \;\in\; \mathbb{N},$$

где функция $h_r(x)$ имеет вид

$$h_r(x) \;=\; \begin{cases} x^{2r}, & x \;>\; 1, \\ x^{12r}, & x \;<\; 1. \end{cases}$$

Доказательство непосредственно следует из формулы полной вероятности.

Следствие 4.1. *Пусть выполнены условия Леммы 4.1 и справедливы формулы*

$$\mathsf{E}\;N_n \;=\; n, \quad \mathsf{E}\;N_n^{-1} \;=\; \frac{1}{n} \;+\; \frac{a}{n^2} \;+\; o(n^{-2}), \quad a \;\in\; \mathbb{R},$$

$$\mathsf{E}\;N_n^{-2} \;=\; \frac{b}{n^2} \;+\; o(n^{-2}), \quad \mathsf{E}\;N_n^{-3} \;=\; o(n^{-2}), \quad b \;\in\; \mathbb{R},$$

тогда

$$\mathsf{P}\big(S_{N_n} \;<\; x\big) \;=\; e^{-\gamma^r/x^r} \;-\; e^{-\gamma^r/x^r}\;\frac{\gamma^{2r}}{2nx^{2r}} \;-$$
$$-\; e^{-\gamma^r/x^r}\;\frac{\gamma^{2r}}{6n^2\;x^{2r}}\Big(3a \;+\; \frac{2\gamma^r b}{x^r}\;\Big(1 \;-\; \frac{3\gamma^r}{8x^r}\Big)\Big) \;+\; o(n^{-2}), \;\; x \;\ge\; \gamma \;>\; 0.$$

Рассмотрим теперь в качестве меры качества страховой компании ее функции распределения (при фиксированном x) в случае неслучайного и случайного числа клиентов, то есть пусть

$$\pi_n^* \;=\; \mathsf{P}\big(S_n \;<\; x\big), \quad \pi_n \;=\; \mathsf{P}\big(S_{N_n} \;<\; x\big). \tag{4.2}$$

Теперь непосредственно из Леммы 2.2, Следствия 4.1 и формулы (1.6) получается формула для асимптотического дефекта.

Следствие 4.2. *Пусть выполнены условия Следствия 4.1, тогда для асимптотического дефекта (добавочное число клиентов) при мере качества (4.2) справедлива формула*

$$d \;=\; a \;-\; \frac{2\gamma^r(1 \;-\; b)}{3x^r}\;\Big(1 \;-\; \frac{3\gamma^r}{8x^r}\Big).$$

Следствие 4.3. *Пусть выполнены условия Следствия 4.1, тогда для* α *– резерва* $\bar{c}_\alpha(n)$ *статистики* S_{N_n} *(см.(3.1)) справедливо представление*

$$\bar{c}_\alpha(n) \;=\; v_\alpha \;+\; \frac{v_1(\alpha)}{n} \;++\; \frac{\tilde{v}_2(\alpha)}{n^2} \;+\; o(n^{-2}),$$

где

$$v_\alpha \;=\; \gamma\; l^{-1/r}(\alpha),$$

$$v_1(\alpha) \;=\; \frac{\gamma}{2r}\; l^{(r-1)/r}(\alpha),$$

$$\tilde{v}_2(\alpha) \;=\; \frac{\gamma\; l^{(r-1)/r}(\alpha)}{r}\; \Big(\frac{3l^2(\alpha)(1\;-\;b)}{24} \;+\; l(\alpha)\Big(\frac{2b-3}{6} \;-\; \frac{r+1}{8r}\Big) \;+\; a\Big),$$

$$l(\alpha) \;=\; -\;\log(1\;-\;\alpha).$$

Рассмотрим теперь в качестве меры качества страховой компании ее α - резерв в случае неслучайного и случайного числа клиентов, то есть пусть

$$\pi^*_n \;=\; c^*_n(\alpha), \quad \pi_n \;=\; \bar{c}_n(\alpha). \tag{4.3}$$

Теперь непосредственно из Леммы 2.3, Следствия 4.3 и формулы (1.6) получается формула для асимптотического дефекта.

Следствие 4.4. *Пусть выполнены условия Следствия 4.1, тогда для асимптотического дефекта (добавочное число клиентов) при мере качества (4.3) справедлива формула (не зависящая ни от* γ*, ни от* r*)*

$$d \;=\; \frac{\tilde{v}_2(\alpha)\;-\;v_2(\alpha)}{v_1(\alpha)} \;=\; \frac{l(\alpha)(b\;-\;1)(8\;-\;3l(\alpha))}{12} \;+\; 2a.$$

5. Случай усеченных биномиального и распределения Пуассона

Пусть с.в. N имеет усечённое в нуле биномиальное распределение с параметрами n и $p \in (0,1)$, то есть

$$\mathsf{P}\big(N \;=\; i\big) \;=\; \frac{1}{1\;-\;q^n}\binom{n}{i}\, p^i\; q^{n-i}, \quad q \;=\; 1\;-\;p, \;\; i \;=\; 1,\ldots,n, \tag{5.1}$$

тогда

$$\mathsf{E}\; N \;=\; \frac{np}{1\;-\;q^n}$$

и в работе [19] (см. (2.18) - (2.20)) получены следующие асимптотические формулы

$$\mathsf{E}\; N^{-1} \;=\; \frac{1}{1\;-\;q^n}\;\Big(\frac{1}{np} \;+\; \frac{q}{(np)^2} \;+\; O\big((np)^{-3}\big)\Big),$$

$$\mathsf{E}\; N^{-2} \;=\; \frac{1}{1\;-\;q^n}\;\Big(\frac{1}{(np)^2} \;+\; O\big((np)^{-3}\big)\Big),$$

$$\mathsf{E}\; N^{-3} \;=\; \frac{1}{1\;-\;q^n}\;\Big(\frac{1}{(np)^3} \;+\; O\big((np)^{-4}\big)\Big).$$

Определим теперь случайный индекс N_n как с.в. N с параметрами $n, m \in \mathbb{N}$, m – фиксировано и $p = 1/m$, $n \to \infty$. Тогда из последних формул получаем

$$\mathsf{E}\, N_n^{-1} = \frac{1}{1 - (1-1/m)^{nm}} \left(\frac{1}{n} + \frac{1-1/m}{n^2} + O\big(n^{-3}\big)\right) = \\ = \frac{1}{n} + \frac{1-1/m}{n^2} + O\big(n^{-3}\big),$$

аналогично

$$\mathsf{E}\, N_n^{-2} = \frac{1}{n^2} + O\big(n^{-3}\big),$$

$$\mathsf{E}\, N_n^{-3} = \frac{1}{n^3} + O\big(n^{-4}\big).$$

Теорема 5.1 *Пусть выполнены условия Леммы 4.1 и случайный индекс N_n имеет распределение(5.1) с параметрами $n, m \in \mathbb{N}$, m – фиксировано и $p = 1/m$, $n \to \infty$, тогда*

$$\mathsf{P}\big(S_{N_n} < x\big) = e^{-\gamma^r/x^r} - e^{-\gamma^r/x^r}\, \frac{\gamma^{2r}}{2nx^{2r}} - \\ - e^{-\gamma^r/x^r}\, \frac{\gamma^{2r}}{6n^2\, x^{2r}}\left(3(1 - 1/m) + \frac{2\gamma^r}{x^r}\left(1 - \frac{3\gamma^r}{8x^r}\right)\right) + o(n^{-2}), \quad x \geq \gamma > 0.$$

Рассмотрим теперь в качестве меры качества страховой компании ее функции распределения (при фиксированном x) при неслучайном и случайном числе клиентов, то есть пусть

$$\pi_n^* = \mathsf{P}\big(S_n < x\big), \quad \pi_n = \mathsf{P}\big(S_{N_n} < x\big). \tag{5.2}$$

Теперь непосредственно из Леммы 2.2, Теоремы 5.1 и формулы (1.6) получается формула для асимптотического дефекта.

Следствие 5.1. *Пусть выполнены условия Теоремы 5.1, тогда для асимптотического дефекта (добавочное число клиентов) при мере качества (5.2) справедлива формула*

$$d = 1 - \frac{1}{m}.$$

Следствие 5.2. *Пусть выполнены условия Следствия 5.1, тогда для α – резерва $\bar{c}_\alpha(n)$ статистики S_{N_n} (см.(3.1)) справедливо представление*

$$\bar{c}_\alpha(n) = v_\alpha + \frac{v_1(\alpha)}{n} + + \frac{\tilde{v}_2(\alpha)}{n^2} + o(n^{-2}),$$

где

$$v_\alpha = \gamma\, l^{-1/r}(\alpha),$$

$$v_1(\alpha) = \frac{\gamma}{2r}\, l^{(r-1)/r}(\alpha),$$

$$\tilde{v}_2(\alpha) = -\frac{\gamma\, l^{(r-1)/r}(\alpha)}{r}\left(l(\alpha)\Big(\frac{1}{6} + \frac{r+1}{8r}\Big) - 1 + 1/m\right),$$

$$l(\alpha) = -\log(1 - \alpha).$$

Пусть теперь в качестве меры качества страховой компании ее α - резерв в случае неслучайного и случайного числа клиентов, то есть пусть

$$\pi_n^* \;=\; c_n^*(\alpha), \quad \pi_n \;=\; \bar{c}_n(\alpha). \tag{5.3}$$

Теперь непосредственно из Леммы 2.3, Теоремы 5.1 и формулы (1.6) получается формула для асимптотического дефекта.

Следствие 5.3. *Пусть выполнены условия Следствия 5.1, тогда для асимптотического дефекта (добавочное число клиентов) при мере качества (5.3) справедлива формула (независящая ни от γ, ни от r)*

$$d \;=\; \frac{\tilde{v}_2(\alpha) \;-\; v_2(\alpha)}{v_1(\alpha)} \;=\; 2\,\Big(1 \;-\; \frac{1}{m}\Big).$$

Если с.в. M имеет усечённое в нуле распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, то есть

$$\mathsf{P}\big(M \;=\; i\big) \;=\; \frac{e^{-\lambda}\;\lambda^i}{i!\;(1 \;-\; e^{-\lambda})}, \quad i \;=\; 1, 2, \ldots, \tag{5.4}$$

то

$$\mathsf{E}\,M \;=\; \frac{\lambda}{1 \;-\; e^{-\lambda}}$$

и в работе [19] (см. (3.7)) получены следующие асимптотические формулы

$$\mathsf{E}M^{-r} = \frac{1}{\lambda^r(1-e^{-\lambda})}\Big(1 + \frac{r(r+1)}{2\lambda} + \frac{r(10+21r+14r^2+3r^3)}{24\lambda^2} + O\big(\lambda^{-3}\big)\Big), r > 0.$$

В этом случае определим случайный индекс N_n как с.в. M с параметрами $\lambda = n \;\in\; \mathbb{N},\; n \;\to\; \infty$. Тогда из последних формул получаем

$$\mathsf{E}\;N_n^{-r} \;=\; \frac{1}{n^r}\,\Big(1 \;+\; \frac{r(r+1)}{2n} \;+\; \frac{r(10+21r+14r^2+3r^3)}{24n^2} \;+\; O\big(n^{-3}\big)\Big), \quad r \;>\; 0.$$

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия Леммы 4.1 и случайный индекс N_n имеет распределение(5.4) с параметром $\lambda = n$, тогда*

$$\mathsf{P}\big(S_{N_n} \;<\; x\big) \;=\; e^{-\gamma^r/x^r} \;-\; e^{-\gamma^r/x^r}\;\frac{\gamma^{2r}}{2nx^{2r}} \;-$$
$$-\; e^{-\gamma^r/x^r}\;\frac{\gamma^{2r}}{6n^2\;x^{2r}}\Big(3 \;+\; \frac{2\gamma^r}{x^r}\;\Big(1 \;-\; \frac{3\gamma^r}{8x^r}\Big)\Big) \;+\; o(n^{-2}), \quad x \;\geq\; \gamma \;>\; 0.$$

Рассмотрим теперь в качестве меры качества страховой компании ее функции распределения (при фиксированном x) в случае неслучайного и случайного числа клиентов, то есть пусть

$$\pi_n^* \;=\; \mathsf{P}\big(S_n \;<\; x\big), \quad \pi_n \;=\; \mathsf{P}\big(S_{N_n} \;<\; x\big). \tag{5.5}$$

Теперь непосредственно из Леммы 2.2, Следствия 4.1 и формулы (1.6) получается формула для асимптотического дефекта.

Следствие 5.4. *Пусть выполнены условия Теоремы 5.2, тогда для асимптотического дефекта (добавочное число клиентов) при мере качества (5.5) справедлива формула*

$$d \;=\; 1.$$

Следствие 5.5. *Пусть выполнены условия Следствия 5.4, тогда для* α *– резерва* $\bar{c}_\alpha(n)$ *статистики* S_{N_n} *(см.(3.1)) справедливо представление*

$$\bar{c}_\alpha(n) \;=\; v_\alpha \;+\; \frac{v_1(\alpha)}{n} + \frac{\tilde{v}_2(\alpha)}{n^2} \;+\; o(n^{-2}),$$

где

$$v_\alpha \;=\; \gamma\; l^{-1/r}(\alpha),$$

$$v_1(\alpha) \;=\; \frac{\gamma}{2r}\; l^{(r-1)/r}(\alpha),$$

$$\tilde{v}_2(\alpha) \;=\; -\frac{\gamma\; l^{(r-1)/r}(\alpha)}{r}\;\Big(l(\alpha)\Big(\frac{1}{6} \;+\; \frac{r+1}{8r}\Big) \;-\; 1\Big),$$

$$l(\alpha) \;=\; -\;\log(1\;-\;\alpha).$$

Рассмотрим теперь в качестве меры качества страховой компании ее α - резерв в случае неслучайного и случайного числа клиентов, то есть пусть

$$\pi_n^* \;=\; c_n^*(\alpha), \quad \pi_n \;=\; \bar{c}_n(\alpha). \tag{5.6}$$

Теперь непосредственно из Леммы 2.3, Теоремы 5.2 и формулы (1.6) получается формула для асимптотического дефекта.

Следствие 5.6. *Пусть выполнены условия Следствия 5.5, тогда для асимптотического дефекта (добавочное число клиентов) при мере качества (5.6) справедливо равенство*

$$d \;=\; 2.$$

Заключение

В работе исследовано асимптотическое поведение резерва страховой компании (организации, подверженной риску) в простейшей модели страхования в случае, когда число факторов, приводящих к убытку (число клиентов), как случайно так и детерминировано. Проведено асимптотическое сравнение деятельности таких организаций в терминах необходимого добавочного числа таких факторов (клиентов). Приведены явные формулы для асимптотического дефекта. Рассмотрены два конкретных примера, иллюстрирующие полученные результаты. Первый пример максимального убытка, который описывает потери страховой компании, а во втором примере рассматриваются усеченные биномиальное распределение и распределение Пуассона, характеризующие случайное число клиентов.

Список литературы

[1] Гнеденко Б.В. Об оценке неизвестных параметров распределения при случайном числе независимых наблюдений // Труды Тбилисского Математического института. 1989. Т. 92. С. 146–150.

[2] Гнеденко Б.В., Фахим Х. Об одной теореме переноса // Доклады Академии наук СССР. 1969. Т. 187. С. 15–17.

[3] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Об использовании распределения Стьюдента в задачах теории вероятностей и математической статистики // Теория вероятностей и ее применения. 2004. Т. 49, № 3. С. 417–435. https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159

[4] Bening V.E., Korolev V.Yu. Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance. Utrecht: VSP, 2002. 434 p.

[5] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Некоторые статистические задачи, связанные с распределением Лапласа // Информатика и ее применения. 2008. Т. 2, № 2. С. 19–34.

[6] Petrov V.V. Limit Theorems of Probability Theory: Sequences of Independent Random Variables. Oxford: Clarendon Press, 1985. 437 p.

[7] Hodges J.L., Lehmann E.L. Deficiency // The Annals of Mathematical Statistics. 1970. Vol. 41, № 5. Pp. 783–801.

[8] Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1976. 648 с.

[9] Lehmann E.L., Casella G. Theory of Point Estimation. Berlin: Springer, 1998. 589 p.

[10] Bening V.E. Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses: Efficient Statistics, Optimality, Power Loss, and Deficiency. Utrecht: VSP, 2000. 277 p.

[11] Bening V.E. Transfer theorems concerning asymptotic expansions for the distribution functions of statistics based on samples with random sizes // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. 2018. Vol. 28, № 2. Pp. 187–200.

[12] Bening V.E. On the asymptotic deficiency of some statistical estimators based on samples with random sizes // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. 2018. Vol. 21, № 2. Pp. 185–193.

[13] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении квантилей распределений статистик, основанных на выборках случайного объема // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 5–12. https://doi.org/10.26456/vtpmk175

[14] Бенинг В.Е. О поведении асимптотического дефекта квантилей распределений статистик, основанных на выборках случайного объема // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 42–57. https://doi.org/10.26456/vtpmk509

[15] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении резерва страховой компании // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 35–48. https://doi.org/10.26456/vtpmk594

[16] Бенинг В.Е. сравнении необходимых резервов организаций, подверженных риску, с помощью понятия дефект // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 5–26.

[17] Burr I.W. Cumulative frequency functions // Annals of Mathematical Statistics. 1942. Vol. 13. Pp. 215–232.

[18] Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966. 588 с.

[19] Znidaric M. Asymptotic expansion for inverse moments of binomial and Poisson distributions. 2005. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0511226

[20] Hakim A.R., Fithriani M., Novita M. Properties of Burr distribution and its application to heavy - tailed survival time data // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1725. ID 012016. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1725/1/012016

Образец цитирования

Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении резерва организации, подверженной риску // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 4. С. 25–42. https://doi.org/10.26456/vtpmk696

Сведения об авторах

1. **Бенинг Владимир Евгеньевич**
профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова; старший научный сотрудник ИПИ РАН.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: *bening@yandex.ru*

ON THE ASYMPTOTIC RESERVE BEHAVIOR OF THE ORGANIZATION SUBJECTED TO RISK

Bening V.E.
Lomonosov Moscow State University, Moscow
Institute of Informatics Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow

Received 16.07.2023, revised 25.08.2023.

The paper considers the asymptotic behavior of the reserve of an organization subjected to risk in the case when the number of factors leading to loss is random. Burr distribution is considered as loss distribution. An asymptotic comparison of the activities of such organizations is carried out in terms of the necessary additional number of such factors (asymptotic deficiency). Two examples illustrating tne obtained results are presented. The first example concerns extreme order statistics, and the second one deals with the truncated Poisson and binomial distributions.

Keywords: reserve of insurance company, sample of random size, Burr distribution, asymptotic expansions, truncated Poisson and binomial distributions, extreme order statistics, asymptotic deficiency.

Citation

Bening V.E., "On the asymptotic reserve behavior of the organization subjected to risk", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 4, 25–42 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk696

References

[1] Gnedenko B.V., "On the estimation of unknown distribution parameters for a random number of independent observations", *Trudy Tbilisskogo Matematicheskogo instituta [Proceedings of the Tbilisi Mathematical Institute]*, **92** (1989), 146–150 (in Russian).

[2] Gnedenko B.V., Fakhim Kh., "On a transfer theorem", *Doklady Mathematics*, **187** (1969), 15–17 (in Russian).

[3] Bening V.E., Korolev V.Y., "On an application of the Student distribution in the theory of probability and mathematical statistics", *Theory of Probability and its Applications*, **49**:3 (2005), 377–391, https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159.

[4] Bening V.E., Korolev V.Yu., *Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance*, VSP, Utrecht, 2002, 434 pp.

[5] Bening V.E., Korolev V.Yu., "Some statistical problems related to the Laplace distribution", *Informatics and Applications*, **2**:2 (2008), 19–34 (in Russian).

[6] Petrov V.V., *Limit Theorems of Probability Theory: Sequences of Independent Random Variables*, Clarendon Press, Oxford, 1985, 437 pp.

[7] Hodges J.L., Lehmann E.L., "Deficiency", *The Annals of Mathematical Statistics*, **41**:5 (1970), 783–801.

[8] Cramer H., *Matematicheskie metody statistiki [Mathematical methods of statistics]*, Mir Publ., Moscow, 1976 (in Russian), 648 pp.

[9] Lehmann E.L., Casella G., *Theory of Point Estimation*, Springer, Berlin, 1998, 589 pp.

[10] Bening V.E., *Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses: Efficient Statistics, Optimality, Power Loss, and Deficiency*, VSP, Utrecht, 2000, 277 pp.

[11] Bening V.E., "Transfer theorems concerning asymptotic expansions for the distribution functions of statistics based on samples with random sizes", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **28**:2 (2018), 187–200.

[12] Bening V.E., "On the asymptotic deficiency of some statistical estimators based on samples with random sizes", *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, **21**:2 (2018), 185–193.

[13] Bening V.E., "On asymptotic behavior of quantiles of the distributions of statistics based on the samples with random sizes", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 5–12 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk175.

[14] Bening V.E., "On asymptotic behavior of quantiles deficiencies of the distributions of statistics based on the samples with random sizes", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2018, № 3, 42–57 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk509.

[15] Bening V.E., "On the asymptotic behavior of insurance company reserve", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 35–48 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk594.

[16] Bening V.E., "On the organizations' risk reserves comparison based on the deficiency concept", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 3, 5–26 (in Russian).

[17] Burr I.W., "Cumulative frequency functions", *Annals of Mathematical Statistics*, **13** (1942), 215–232.

[18] Kendall M., Stuart A., *The Advanced Theory of Statistics*, Charles Griffin, London, 1945, 457 pp.

[19] Znidaric M., *Asymptotic expansion for inverse moments of binomial and Poisson distributions*, 2005, https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0511226.

[20] Hakim A.R., Fithriani M., Novita M., "Properties of Burr distribution and its application to heavy - tailed survival time data", *Journal of Physics: Conference Series*, **1725** (2021), 012016, https://doi.org/10.1088/1742-6596/1725/1/012016.

Author Info

1. **Bening Vladimir Evgenyevich**
Professor in the Department of Mathematical Statistics,
Lomonosov Moscow State University; Senior Researcher, Institute of Informatics Problems
of the Russian Academy of Sciences.

Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU. E-mail: bening@yandex.ru