УДК 512.533.23

ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ МОНОИДОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ВНЕШНЕПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ КЭЛИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Соломатин Д.В.
Омский государственный педагогический университет, г. Омск

Поступила в редакцию 17.10.2023, после переработки 25.10.2023.

Доказаны характеристические свойства внешнепланарности и обобщённой внешнепланарности графов Кэли прямых произведений циклических моноидов в терминах копредставлений.

Ключевые слова: моноид, граф Кэли полугруппы, внешнепланарный граф, прямое произведение.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 4. С. 43–56.
https://doi.org/10.26456/vtpmk697

Введение

Трудно переоценить важность для дискретной математики понятия моноида, как множества с нейтральным элементом и ассоциативной операцией умножения. Изложим пару подходов к формальному определению этого понятия: классическое в определении 1 и опирающееся на теорию категорий в определении 2.

Определение 1. *Моноидом называется непустое множество M элементов произвольной природы, содержащее единичный элемент $e \in M$, то есть удовлетворяющий равенствам $a \cdot e = e \cdot a = a$ при любом $a \in M$, с заданной на нём бинарной алгебраической операцией умножения, в мультипликативной нотации, то есть ставящей в соответствие паре элементов из M результат этой операции в M, обладающей свойством ассоциативности, заключающемся в том, что для любых $a, b, c \in M$ выполнено $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.*

В приведённом определении утверждается, что порядок вычислений в моноиде не важен, то есть разные способы заключения последовательности операции над элементами в моноиде в круглые скобки дают один и тот же результат. Например, следующий факт используется буквально с начальной школы при выполнении арифметических операций умножения над числами: пусть M – моноид, и $m_1, \ldots, m_k$ – последовательность элементов из M, тогда при любом допустимом способе заключения элементов последовательности в круглые скобки и выполнении умножения результат из моноида получится одинаковым. В самом деле, расстановку скобок можно рассматривать как построение двоичного дерева, листья которого помечаются $m_1, \ldots, m_k$ при чтении слева направо. Свойство ассоциативности в определении 1 гласит, что на результат операции не повлияет ротация дерева, то есть такая операция над двоичным деревом, которая изменяет его структуру, не нарушая порядок элементов. А именно, ротация дерева перемещает один узел дерева вверх, а второй узел вниз, как это показано на Рис. 1, и используется для изменения формы дерева, в частности, для уменьшения его высоты путем перемещения меньших поддеревьев вниз и больших поддеревьев вверх, что приводит к повышению производительности многих операций с деревом. Любые два дерева, имеющие одинаковую последовательность листьев, можно преобразовать друг в друга с помощью конечного числа ротаций.

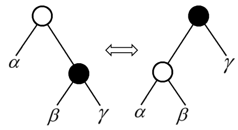

Рис. 1: *Ротация ветвей в двоичном дереве*

Свойство ассоциативности в определении 1 может показаться искусственным, поэтому ниже представим более естественное определение моноида. Ключевым моментом определения 2 является то, что операция умножения теперь не бинарная алгебраическая определённая на ветвях двоичного дерева, а работает с произвольными словами. Это позволяет переформулировать условие ассоциативности на языке коммутирующих диаграмм из теории категорий. Новое определение, которое как легко видеть эквивалентно классическому определению 1, послужит нам основой для дальнейших обобщений при переходе от диаграмм к графам Кэли полугрупп. Также для получения интересных обобщений перепишем и другие определения, например гомоморфизмов, в терминах коммутирующих диаграмм.

Определение 2. *Моноид формируется из слов алфавита M вместе с отображением $\bullet : M^* \to M$, ставящим в соответствие однобуквенному слову m букву m, обладающим свойством ассоциативности в том смысле, что коммутирует следующая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} (M^*)^* \arrow[r, "M\bullet"] \arrow[d, "\bullet M"] & M^* \arrow[d, "\circ"] \\ M^* \arrow[r, "\circ"] & M \end{tikzcd}$$

где $\circ$ – конкатенация, которая составляет слово из слов естественным образом последовательного приписывания одного слова к другому, в то время как $\bullet$ играет роль операции умножения элементов моноида и применима к каждому слову в слове из слов с разных сторон.

Прозвучавшие определения моноида эквивалентны, так как если Σ – множество букв некоторого алфавита, то Σ^* – моноид, в котором единицей является пустое слово, а конкатенация – ассоциативная бинарная алгебраическая операция умножения элементов моноида. Более того, определение 2 приводит к появлению понятия *Монада* в теории категорий.

Гомоморфизмом моноидов называется отображение одного моноида «на», либо «в» другой моноид, сохраняющее структуру отображаемого моноида, то есть гомоморфизм между моноидами M_1 и M_2 — это функция $h : M_1 \to M_2$ отображающая единичный элемент моноида M_1 в единичный элемент моноида M_2, которая наследует операцию умножения в том смысле, что $h(a \cdot b) = h(a) \cdot h(b)$ для всех $a, b \in M_1$. Эквивалентное определение гомоморфизма на языке теории категорий могло бы заключаться в том, что коммутирует следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} M_1^* & \xrightarrow{h^*} & M_2^* \\ \big\downarrow{\scriptstyle \bullet_{M_1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \bullet_{M_2}} \\ M_1 & \xrightarrow{h} & M_2 \end{array}$$

на которой каждая направленная вниз стрелка обозначает операцию умножения в соответствующих моноидах.

Посредством гомоморфизма моноидов можно описать следующее универсальное свойство свободного моноида Σ^*, который порождается множеством Σ, — это наибольший моноид, порожденный Σ в том смысле, что для любого другого моноида M, порожденного Σ, существует сюръективный гомоморфизм $h : \Sigma^* \to M$, являющийся тождественным на множестве образующих Σ. Это свойство позволяет называть Σ^* свободным моноидом с образующими Σ.

Гомоморфизмы моноидов тесным образом связаны с понятием суперпозиции функций. Пусть M – моноид, X – произвольное множество. Функция $f : M \to X$ является суперпозицией, если для каждого $m_1, m_2 \in M$ значение $f(m_1 \cdot m_2)$ однозначно определяется значениями $f(m_1)$ и $f(m_2)$, но в отличие от мультипликативной функции не обязано быть равным их произведению. Опять же, суперпозицию можно определить в терминах теории категорий: функция f является суперпозицией, если существует такая промежуточная функция f_X, что коммутирует следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} M^* & \xrightarrow{f^*} & X^* \\ \big\downarrow{\scriptstyle \bullet_{M}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_X} \\ M & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Более того, если M – моноид и $f : M \to X$ – сюръективная суперпозиция, то существует единственный моноид, восстанавливаемый на элементах из X, который превращает f в гомоморфизм h моноидов M и X. В самом деле, по определению суперпозиции однозначность выражения $f(m_1 \cdot m_2)$ через значения $f(m_1)$ и $f(m_2)$ означает, что существует функция $f_X : X \times X \to X$ такая, что для любых $m_1, m_2 \in M$ выполнено равенство $f(m_1 \cdot m_2) = f_X(f(m_1), f(m_2))$, следовательно, в качестве операции умножения в моноиде X можно использовать f_X, тогда отображение f получится тождественным преобразованием h.

Далее рассмотрим моноид как альтернативу конечным автоматам, то есть будем использовать моноиды для распознавания языков.

Определение 3. *Пусть $L \subseteq A^*$ – язык из множества слов A^* над алфавитом A. Говорят, что язык L распознаётся гомоморфизмом моноидов $h : A^* \to M$, если принадлежность слова w языку L однозначно определяется по принадлежности значения $h(w)$ некоторому подмножеству множества M. Другими словами, в моноиде M существует подмножество $F \subseteq M$ такое, что для любого слова $w \in A^*$ имеет место эквивалентность $(w \in L) \Leftrightarrow (h(w) \in F)$.*

С точки зрения теории формальных языков конечные моноиды и конечные автоматы эквивалентны, так как для любого языка $L \subseteq A^*$ язык L распознается конечным автоматом тогда и только тогда, когда L распознается гомоморфизмом моноида A^* в конечный моноид. В самом деле, из моноида легко получить детерминированный автомат, состояниями которого будут элементы моноида и в котором отношение перехода между состояниями получается из операции моноида очевидным образом как умножение на образующие. Это доказывает импликацию из распознаваемости языка моноидом в распознаваемость языка конечным автоматом. Для доказательства обратной импликации остаётся преобразовать недетерминированный автомат в моноид. Пусть $\mathcal{A}$ – недетерминированный автомат с входным алфавитом A и множеством состояний Q. Определим функцию $\delta : A^* \to P(Q \times Q)$, которая отображает слово w из A^* в подмножество множества $Q \times Q$, состоящее из пар вида (p, q) таких, что существует последовательность состояний автомата, начинающаяся с p, считывающая слово w и заканчивающаяся в q. Можно показать, что δ является суперпозицией и, следовательно, её значения формируют структуру моноида, которая превращает эту функцию δ в гомоморфизм моноидов. Соответствующая операция умножения в получившемся моноиде — это обычная композиция бинарных отношений, а роль единицы в нём играет тождественное отношение.

Напомним, что переход к недетерминированному конечному автомату от моноида полным перебором вариантов происходит за экспоненциальное время. Кроме того, переход от недетерминированного конечного автомата к детерминированному конечному автомату имеет экспоненциальную сложность, но обратный переход от детерминированного конечного автомата к моноидам не будет дважды экспоненциальным.

Детерминированный конечный автомат обладает потенциальной возможностью минимизации, более точно, всегда существует наименьший по количеству состояний детерминированный автомат, который можно получить из любого другого автомата факторизацией, то есть путём слияния некоторых его состояний. То же самое справедливо для моноидов, и это можно строго доказать. А именно, для каждого языка $L \subseteq A^*$ существует гомоморфизм моноидов $h : A^* \to M_1$, так называемый синтаксический гомоморфизм языка L. Гомоморфизм h распознает язык L и является минимальным в том смысле, что для любого другого сюръективного гомоморфизма моноидов $g : A^* \to M_2$, также распознающего L, существует единственный гомоморфизм моноидов $f : M_2 \to M_1$, для которого коммутирует следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & M_1 \\ & M_2 \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

В самом деле, если определить синтаксическую эквивалентность на L как отношение эквивалентности в A^*, по которому отождествляются два слова $w, w' \in A^*$ тогда и только тогда, когда для всех слов $u, v \in A^*$ имеет место эквиваленция $(uwv \in L) \Leftrightarrow (uw'v \in L)$, то можно показать, что существует функция h, отображающая всякое слово в порождаемый этим словом класс эквивалентности и являющаяся суперпозицией, а поэтому множество классов эквивалентности обладает структурой моноида, что превращает h в гомоморфизм моноидов. Нетрудно проверить, что полученный гомоморфизм h является минимальным из возможных, при этом важна сюръективность.

Для завершения формирования устойчивой мотивации к изучению графов Кэли прямых произведений циклических моноидов остаётся отметить, что рассматриваемая в [1] плоская укладка графа Кэли прямого произведения циклических моноидов состоит из фрагментов подобных тому, как выглядят вышеупомянутые коммутативные диаграммы. Мотивация и необходимый инструментарий для исследования вопросов внешнепланарности и обобщённой внешнепланарности графов Кэли полугрупп приводятся в [2] и [3]. Напомним лишь определения ключевых понятий и их характеристические свойства.

Определение 4. *Плоской укладкой графа называется такое отображение множества вершин графа на точки плоскости и множества ребер графа на непрерывные плоские линии без самопересечений, принадлежащие той же плоскости, что никакие два образа ребра не имеют общих точек кроме, возможно, общих образов вершин.*

Определение 5. *Граф называется планарным, если существует его плоская укладка.*

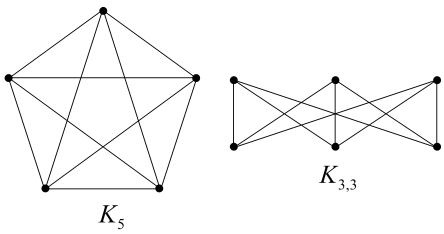

Рис. 2: *Запрещённые подграфы Понтрягина–Куратовского*

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к графам Понтрягина–Куратовского, изображённым на Рис. 2.

Определение 6. *Граф называется внешнепланарным, если существует такая его плоская укладка, что каждая вершина графа принадлежит внешней грани.*

Граф внешнепланарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к графам Чартрэнда–Харари, изображённым на Рис. 3.

Определение 7. *Граф называется обобщённым внешнепланарным, если существует такая его плоская укладка, что каждое ребро графа хотя бы одной из своих вершин принадлежит внешней грани.*

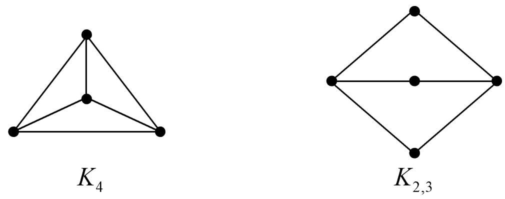

Рис. 3: *Запрещённые подграфы Чартрэнда–Харари*

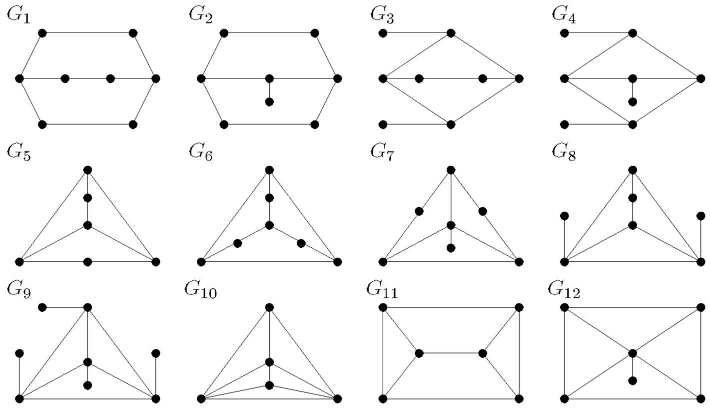

Рис. 4: *Запрещённые подграфы Седлачека*

Граф обобщённо внешнепланарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к графам Седлачека, изображённым на Рис. 4.

1. Основной результат

Любую полугруппу S можно превратить в моноид путём присоединения к ней нового элемента e и добавления соотношений $se = es = s$ для всех $s \in S$. В частности, из циклической полугруппы S, заданной при фиксированных натуральных r и m копредставлением $\langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle$, можно сформировать циклический моноид S^1 путём присоединения единицы, либо моноид S^{+1} в результате операции внешнего присоединения единицы к полугруппе S. В первом случае единица присоединяется к полугруппе S только когда единица отсутствовала в полугруппе S, а во втором случае новая единица присоединяется всегда.

Сформулируем основную Теорему из [1] в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Конечный моноид S, являющийся прямым произведением неодноэлементных циклических моноидов, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1. $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^1 \times \left\langle b \mid b^{h+t} = b^h \right\rangle^1$, *где для натуральных r, m, h и t выполняется одно из следующих ограничений:*

    1.1. $r = 1, m = 2$;

1.2. $m \leq 2, t \leq 2$*;*

1.3. $r = 1, m > 2, t \leq 2$*;*

2. $S \cong \left\langle a \;\middle|\; a^3 = a\right\rangle \times \left\langle b \;\middle|\; b^3 = b\right\rangle \times \left\langle c \;\middle|\; c^{k+l} = c^k\right\rangle^i$*, где* i *принимает указанные ниже значения, и для натуральных* k*,* l *выполняется одно из следующих ограничений:*

2.1. $i = 1, l \leq 2$*;*

2.2. $i = +1, k = 1, l \leq 2$*;*

3. $S \cong \left\langle a \;\middle|\; a^{1+m} = a^1\right\rangle^{+1} \times \left\langle b \;\middle|\; b^{h+t} = b^h\right\rangle^i$*, где* m*,* h*,* t *– натуральные числа,* $i \in \{1, +1\}$ *и выполняется одно из следующих ограничений:*

3.1. $m = 1$*;*

3.2. $i = 1, h = 1, t = 2$*;*

3.3. $m = 2, h = 1, i = 1$*;*

3.4. $m = 2, h = 1, t = 2, i = +1$*.*

4. $S \cong \left\langle a_0 \;\middle|\; a_0^{r+m} = a_0^r\right\rangle^1 \times \prod_{i=1}^{n} \left\langle a_i \;\middle|\; a_i^2 = a_i\right\rangle^{+1}$*, где* $m \leq 2$*,* $n \leq 2$*; или* $r = 1$*,* $m = 1$*,* $n \leq 3$*.*

Всякая циклическая группа является частным случаем циклического моноида и очевидным образом допускает внешнепланарный граф Кэли. При этом конечная циклическая группа составного порядка раскладывается в произведение циклических групп взаимно простых порядков. Более того, тривиальные одноэлементные множители в прямом произведении приводят к полугруппам изоморфным исходной, поэтому число тривиальных множителей неограниченно. Таким образом, в теоремах ниже полагается, что количество множителей в прямом произведении всё же минимально, так как задача минимизации числа множителей вызывает особый интерес. В обозначениях из [1], докажем следующие теоремы, содержащие характеристические свойства допускающих внешнепланарные и обобщённые внешнепланарные графы Кэли прямых произведений неодноэлементных циклических моноидов.

Теорема 1. *Конечный моноид* S*, являющийся произведением неодноэлементных циклических моноидов, допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1. $S = \left\langle a \mid a^3 = a\right\rangle \times \left\langle b \mid b^{h+t} = b^h\right\rangle^1$*, где для натуральных* h, t *имеют место неравенства* $h \leq 2$ *и* $h + t \leq 4$*;*

2. $S = \left\langle a \mid a^{1+m} = a\right\rangle^{+1} \times \left\langle b \mid b^{h+t} = b^h\right\rangle^i$*, где* $i \in \{1, +1\}$ *и для натуральных* m, h, t *выполняется одно из следующих ограничений:*

2.1. $m = 1,\ t \leq 2$*;*

2.2. $i = 1,\ m \leq 2,\ h = 1,\ t = 2$*;*

2.3. $i = 1,\ m = 2,\ h = 1,\ t \leq 2$*;*

3. $S = \left\langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r\right\rangle^1 \times \prod_{i=1}^{n} \left\langle a_i \mid a_i^2 = a_i\right\rangle^{+1}$*, где для натуральных* r, n, m *выполнено* $n = m = 1$ *или* $n - 1 = r = m = 1$ *или* $n = m - 1 = 1$*.*

Теорема 2. *Конечный моноид S, являющийся произведением неодноэлементных циклических моноидов, допускает обобщённый внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1. $S = \langle a \mid a^{r+m} = a^r\rangle^1 \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h\rangle^1$, *где для натуральных h, t имеют место неравенства $h \leq 2$ и $h + t \leq 4$;*
2. $S = \langle a \mid a^{1+m} = a\rangle^{+1} \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h\rangle^i$, *где $i \in \{1, +1\}$ и для натуральных m, h, t выполняется одно из следующих ограничений:*
   - *2.1.* $m = 1$, $t \leq 2$;
   - *2.2.* $i = 1$, $m \leq 2$, $h = 1$, $t = 2$;
   - *2.3.* $i = 1$, $m = 2$, $h = 1$, $t \leq 2$;
   - *2.4.* $i = +1$, $m = 2$, $h = 1$, $t = 2$;
3. $S = \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r\rangle^1 \times \prod_{i=1}^{n} \langle a_i \mid a_i^2 = a_i\rangle^{+1}$, *где для натуральных r, n, m выполнено $n = m = 1$ или $n - 1 = r = m = 1$ или $n = m - 1 = 1$.*

Доказательство. Одновременное доказательство двух теорем осуществим согласно следующей общей схеме: перебирая варианты ограничений из Леммы если окажется так, что условие теоремы выполнено, то граф Кэли соответствующего моноида допускает внешнепланарную или обобщённую внешнепланарную укладку, иначе в основе этого графа обнаруживается подграф гомеоморфный графу K_4 или $K_{2,3}$ (тогда граф не является внешнепланарным), или одному из графов Седлачека (в этом случае граф не является обобщённым внешнепланарным).

При $(r = h = 1) \wedge (gcd(m, t) = 1)$ в результате произведения циклических групп взаимно простого порядка получаем циклическую группу, основа графа Кэли которой внешнепланарна, поэтому исключим данный вариант как пограничный случай, так как фактически имеет место один циклический моноид, а не произведение нескольких. При малых значениях параметров остальных ограничений пункта 1.1 из Леммы граф Кэли моноида допускает внешнепланарную укладку, а начиная с $h \geq 2$, $t \geq 3$ в основе графа Кэли обнаруживается изображённый на Рис. 5 подграф гомеоморфный G_{11}, следовательно, граф не является обобщённо внешнепланарным и, тем более, не является внешнепланарным.

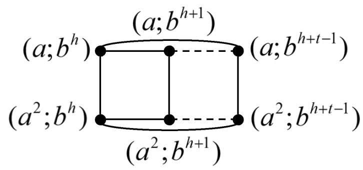

Рис. 5: *Подграф основы графа Кэли полугруппы*
$S = \langle a|a^3 = a\rangle \times \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle$, *где $h \geq 2$, $t \geq 3$, либо $(h = 1) \wedge gcd(2, t) \neq 1$*

При малых значениях параметров ограничений пункта 1.2 из Леммы граф Кэли моноида допускает внешнепланарную укладку, а начиная с $h \geq 2$, $r \geq 2$ в основе графа Кэли обнаруживается изображённый на Рис. 6 подграф гомеоморфный G_{11}, следовательно, граф не является обобщённо внешнепланарным и, тем более, не является внешнепланарным.

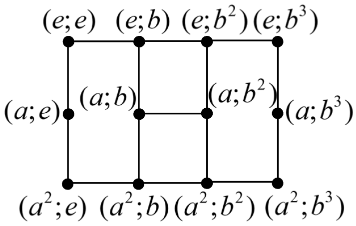

Рис. 6: *Подграф основы графа Кэли полугруппы* $S = \langle a|a^{r+m} = a^r\rangle^1 \times \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle^1$, *где* $r \geq 2$, $m \leq 2$, $h \geq 2$, $t \leq 2$

Аналогичная ситуация и с пунктом 1.3 из Леммы. При малых значениях параметров ограничений граф Кэли моноида допускает внешнепланарную укладку, а начиная с $m \geq 3$ в основе графа Кэли обнаруживается изображённый на Рис. 7 подграф гомеоморфный G_{11}. Следовательно, граф не является обобщённо внешнепланарным и, тем более, не является внешнепланарным.

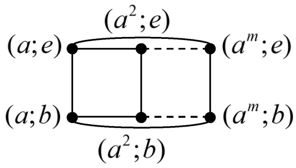

Рис. 7: *Подграф основы графа Кэли полугруппы* $S = \langle a|a^{1+m} = a\rangle^1 \times \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle^1$, *где* $m > 2$, $h \geq 1$, $t \leq 2$

Граф Кэли моноида формируемого в пункте 2.1 из Леммы при $k = 1$ и $l = 2$ не является обобщённо внешнепланарным и не является внешнепланарным, так как его основа содержит гомеоморфный графу G_{11} подграф, изображённый на Рис. 8, а при $k = 2$ и $l = 1$ — изображённый на Рис. 9.

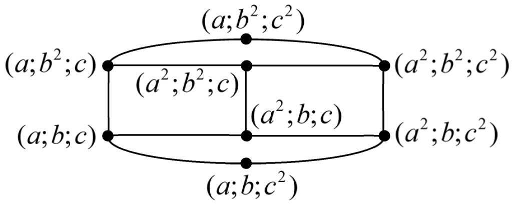

Рис. 8: *Подграф основы графа Кэли полугруппы* $S = \langle a|a^3 = a\rangle \times \langle b|b^3 = b\rangle \times \langle c|c^3 = c\rangle$

Пункт 2.2 из Леммы охватывается подграфами изображёнными на Рис. 9, при $l = 2$, и на Рис. 10, при $l = 1$. В каждом из этих случаев граф Кэли оказался не обобщённо внешнепланарным и не внешнепланарным, так как содержал в основе своей подграф гомеоморфный графу G_{11}.

При малых значениях параметра t в условии 3.1 из Леммы граф Кэли соответствующего моноида допускает внешнеплоскую укладку, но уже начиная с $t \geq 3$

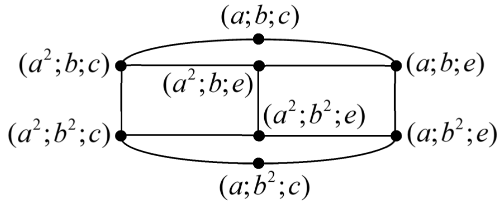

Рис. 9: *Подграф основы графа Кэли полугрупп*
$S = \langle a|a^3 = a\rangle \times \langle b|b^3 = b\rangle \times \langle c|c^3 = c^2\rangle^1$ *и*
$S = \langle a|a^3 = a\rangle \times \langle b|b^3 = b\rangle \times \langle c|c^3 = c\rangle^{+1}$

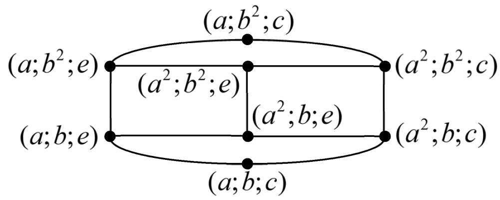

Рис. 10: *Подграф основы графа Кэли полугруппы*
$S = \langle a|a^3 = a\rangle \times \langle b|b^3 = b\rangle \times \langle c|c^2 = c\rangle^{+1}$

в основе графа Кэли обнаруживается гомеоморфный графу G_{11} подграф, изображённый на Рис. 11, следовательно, граф Кэли соответствующего моноида не является обобщённо внешнепланарным и не является внешнепланарным.

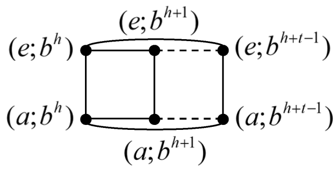

Рис. 11: *Подграф основы графа Кэли полугруппы*
$S = \langle a|a^2 = a\rangle^{+1} \times \langle b|b^{h+t} = b^h\rangle^i$, *где* $i \in \{1, +1\}$, $h \geq 1$, $t \geq 3$

Для пунктов 3.2–3.3 ситуация аналогичная с тем лишь отличием, что подграф основы гомеоморфный графу G_{11} в первом случае обнаруживается начиная с $m \geq 3$ и изображён на Рис. 12, а во втором случае начиная с $t \geq 3$ и изображён на Рис. 13.

Граф Кэли моноида, описанного в пункте 3.4 из Леммы, характерен тем, что допускает обобщённую внешнеплоскую укладку, но в своей основе содержит изображённый на Рис. 14 подграф гомеоморфный графу $K_{2,3}$, следовательно, не является внешнепланарным.

Последний пункт Леммы разобьем на три ветви доказательства. Для $r \geq 2$, $m = 1$, $n = 2$ граф Кэли моноида, формирующегося в пункте 4, не является обобщённо внешнепланарным и тем более не является внешнепланарным, так как его основа содержит гомеоморфный графу G_{11} подграф, изображённый на Рис. 15.

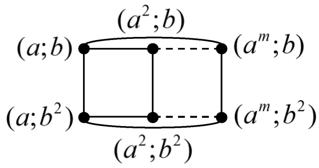

Рис. 12: *Подграф основы графа Кэли полугруппы* $S = \langle a|a^{1+m} = a\rangle^{+1} \times \langle b|b^3 = b\rangle^1$, *где* $m \geq 3$

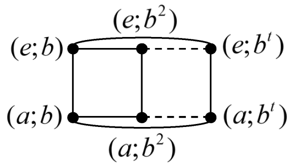

Рис. 13: *Подграф основы графа Кэли полугруппы* $S = \langle a|a^3 = a\rangle^{+1} \times \langle b|b^{1+t} = b\rangle^1$, *где* $t \geq 3$

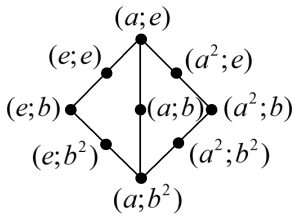

Рис. 14: *Подграф основы графа Кэли полугруппы* $S = \langle a|a^3 = a\rangle^{+1} \times \langle b|b^3 = b\rangle^{+1}$, *где* $t \geq 3$

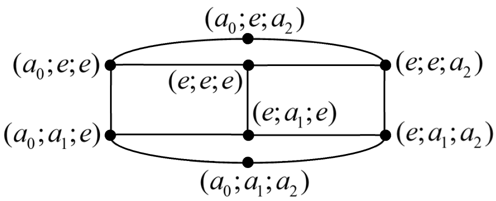

Рис. 15: *Подграф основы графа Кэли полугруппы* $S = \langle a_0|a_0^{r+1} = a_0^r\rangle^1 \times \langle a_1|a_1^2 = a_1\rangle^{+1} \times \langle a_2|a_2^2 = a_2\rangle^{+1}$, *где* $r \geq 2$

Для $r \geq 1$, $m = 2$, $n = 2$ граф Кэли моноида, формирующегося в пункте 4, не является обобщённо внешнепланарным и тем более не является внешнепланарным, так как его основа содержит гомеоморфный графу G_{11} подграф, изображённый на Рис. 16.

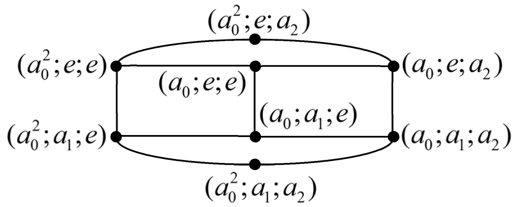

Рис. 16: *Подграф основы графа Кэли полугруппы* $S = \langle a_0 | a_0^{r+2} = a_0^r \rangle^1 \times \langle a_1 | a_1^2 = a_1 \rangle^{+1} \times \langle a_2 | a_2^2 = a_2 \rangle^{+1}$, *где* $r \geq 1$

Наконец, для $r = 1$, $m = 1$, $n = 3$ граф Кэли моноида, формирующегося в пункте 4, не является обобщённо внешнепланарным и тем более не является внешнепланарным, так как его основа содержит гомеоморфный графу G_{11} подграф, изображённый на Рис. 17.

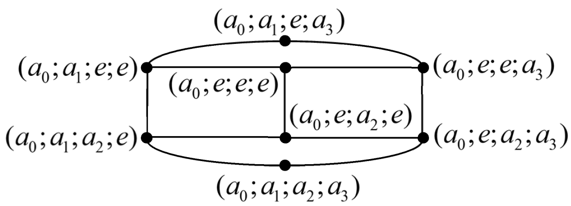

Рис. 17: *Подграф основы графа Кэли полугруппы* $S = \langle a_0 | a_0^2 = a_0 \rangle^1 \times \langle a_1 | a_1^2 = a_1 \rangle^{+1} \times \langle a_2 | a_2^2 = a_2 \rangle^{+1} \times \langle a_3 | a_3^2 = a_3 \rangle^{+1}$

Вариант $n = 1$ в пункте 4 из Леммы приводит к рассмотренным в пункте 3 моноидам, допускающим внешнепланарные графы Кэли, а всякий внешнепланарный граф является обобщённо внешнепланарным.

Что и требовалось доказать. □

Заметим, что условия представленных двух теорем различаются единственным пунктом 2.4. Таким образом, из теорем вытекает следующее следствие.

Следствие 1. Конечный моноид S, являющийся произведением неодноэлементных циклических моноидов, допускает обобщённый внешнепланарный граф Кэли, но не допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда $S = \langle a \mid a^3 = a \rangle^{+1} \times \langle b \mid b^3 = b \rangle^{+1}$.

Заключение

В заключение отметим, что полученный результат открывает перспективы исследования рангов внешнепланарности и рангов обобщённой внешнепланарно-

сти многообразий моноидов. В работе рассмотрены прямые произведения неодноэлементных циклических моноидов. С помощью понятия основы графа проведено исследование возможности внешнепланарной и обобщённой внешнепланарной укладки графа Кэли полугрупп с единицей. Получены копредставления всех конечных моноидов допускающих обобщённый внешнепланарный граф Кэли, являющихся произведением неодноэлементных циклических моноидов. Подробно рассмотрен случай, когда графы Кэли таких моноидов внешнепланарны.

Список литературы

[1] Соломатин Д.В. Прямые произведения циклических моноидов и полугрупп с нулём, допускающие планарные графы Кэли // Математика и информатика: Наука и образование. 2006. Т. 5. С. 51–64.

[2] Sedláček J. On a generalization of outerplanar graphs // Časopis pro pěstování matematiky. 1988. Vol. 113, № 2. Pp. 213–218.

[3] Мартынов П.О., Соломатин Д.В. Конечные свободные коммутативные полугруппы и полугруппы с нулём, допускающие обобщённые внешнепланарные графы Кэли // Вестник Омского университета. 2014. Т. 3, № 73. С. 22–26.

Образец цитирования

Соломатин Д.В. Прямые произведения циклических моноидов, допускающие внешнепланарные графы Кэли и их обобщения // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 4. С. 43–56. https://doi.org/10.26456/vtpmk697

Сведения об авторах

1. **Соломатин Денис Владимирович**
доцент кафедры математики и методики обучения математике факультета математики, информатики, физики и технологии Омского государственного педагогического университета.

Россия, 644099, г. Омск, наб. Тухачевского, д. 14, ОмГПУ.
E-mail: denis_2001j@bk.ru

DIRECT PRODUCTS OF CYCLIC MONOIDS ADMITTING OUTERPLANAR CAYLEY GRAPHS AND THEIR GENERALIZATIONS

Solomatin D.V.
Omsk State Pedagogical University, Omsk

Received 17.10.2023, revised 25.10.2023.

Direct products of cyclic monoids admitting a outerplanar and generalized outerplanar Cayley Graph are described.

Keywords: monoid, Cayley graph of a semigroup, outerplanar graph, direct product.

Citation

Solomatin D.V., "Direct products of cyclic monoids admitting outerplanar Cayley graphs and their generalizations", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 4, 43–56 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk697

References

[1] Solomatin D.V., "Direct products of cyclic monoids and semigroups with zero admitting planar Cayley graphs", *Matematika i informatika: Nauka i obrazovanie [Mathematics and Computer Science: Science and Education]*, **5** (2006), 51–64 (in Russian).

[2] Sedláček J., "On a generalization of outerplanar graphs", *Časopis pro pěstování matematiky*, **113**:2 (1988), 213–218.

[3] Martynov P.O., Solomatin D.V., "Finite free commutative semigroups and semigroups with zero admitting generalized outer-planar Cayley graphs", *Vestnik Omskogo universiteta [Herald of Omsk university]*, **3**:73 (2014), 22–26 (in Russian).

Author Info

1. **Solomatin Denis Vladimirovich**
Docent at Department of Mathematics and Mathematics Teaching Methods;
Omsk State Pedagogical University.

Russia, 644099, Omsk, 14 emb. Tukhachevsky, OmSPU.
E-mail: denis_2001j@bk.ru