МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517.922, 517.925.4

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Усков В.И.
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, г. Воронеж

Поступила в редакцию 06.02.2023, после переработки 05.07.2023.

Настоящая статья посвящена изучению задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка, заданного в банаховых пространствах $E_1 \to E_2$ с замкнутыми линейными операторными коэффициентами, имеющими всюду плотные в E_1 области определения. Оператор A вырожден, из-за чего решение задачи Коши существует не при каждых значениях начальных данных. Этот оператор фредгольмов с нулевым индексом (далее, фредгольмов). Его ядро полагается n-мерным. Свойство фредгольмовости позволяет расщепить уравнение и условия на соответствующие уравнение и условия в подпространствах уменьшающихся размерностей. В правой части операторные коэффициенты являются переменными в отличие от других работ. Исследуется случай $\Delta(t) \neq 0$ при каждом $t \in [0;T]$, где $\Delta(t)$ — некоторая матрица, построенная с помощью операторных коэффициентов. Получены условия, при которых решение задачи существует, единственно; найдено это решение в аналитическом виде. Приводится иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: задача Коши, вырожденное дифференциальное уравнение второго порядка, банахово пространство, фредгольмов оператор, разрешение уравнения, каскадная декомпозиция.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 4. С. 70–80.
https://doi.org/10.26456/vtpmk665

Введение

Рассматривается задача Коши:

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = B(t)\frac{du}{dt} + C(t)u(t) + f(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u^0 \in E_1, \quad u'(0) = u^1 \in E_1, \tag{2}$$

где $A, B(t), C(t)$ — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\overline{\operatorname{dom} A} = \overline{\operatorname{dom} B(t)} = \overline{\operatorname{dom} C(t)} = E_1$, $f(t)$ — заданная функция со значениями в E_2; $t \in \mathfrak{T} = [0;T]$.

Под решением задачи (1), (2) подразумевается функция $u(t) \in E_1$ такая, что: $u'(t) \in E_1$, дважды дифференцируема и удовлетворяющая (1), (2) при каждом $t \in \mathfrak{T}$.

Уравнениями второго порядка описывается вращение жесткого тела (уравнение Ламе) [1], считывание информации с диска [2]; они встречаются в теории вязко-упругих процессов [3] и т.д.

Уравнение (1) с вырожденным коэффициентом A при старшей производной исследовалось другими авторами: в работе [4] A, B, C являются матрицами n-го порядка; в [5] A — нормально разрешимый фредгольмов оператор, имеющий относительно некоторой оператор-функции полный биканонический жорданов набор. В [6] для уравнения

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = Bu(t) + f(t),$$

применялся метод каскадной декомпозиции (далее, МКД) в случае обратимости некоторого оператора, построенного с помощью коэффициентов A, B. Он позволяет расщепить исходное уравнение и условия на соответствующие уравнение и условия в подпространствах уменьшающихся размерностей. Этот метод применялся в работе [7] при решении задачи Коши для вырожденного дифференциального уравнения первого порядка.

Отметим, что этим методом решена задача Коши, описывающая бесчокерный трелёвочный захват с энергосберегающим гидроприводом [8].

Цель работы: разрешить уравнение (1); получить условия существования и единственности решения задачи Коши (1), (2); найти решение в аналитическом виде.

Теперь операторные коэффициенты в правой части уравнения изменяются по времени, что в вышеперечисленных работах [4]– [6] не рассматривалось. Для решения поставленных задач также применяется МКД.

Оператор A полагается фредгольмовым с нулевым индексом и имеющим n-мерное ядро.

1. Необходимые сведения

Фредгольмов оператор $A : E_1 \to E_2$ вполне определяется свойством [9]:

$$E_1 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Coim} A, \quad E_2 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Coker} A, \tag{3}$$

где $\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора A, $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к ядру, $\operatorname{Im} A$ — образ оператора A, $\operatorname{Coker} A$ — прямое дополнение к образу, $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A = n < \infty$; сужение $\widetilde{A}$ оператора A на $\operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1} : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$.

Введем $Q = Q(A)$ — проектор на $\operatorname{Coker} A$, полуобратный оператор $A^- = \widetilde{A}^{-1}(I - Q)$, где I — единичный оператор в соответствующем подпространстве. Зафиксируем элементы $e \in \operatorname{Ker} A$, $e \neq 0$, $\varphi \in \operatorname{Coker} A$ и разложим их по

базисам:
$$e = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \varphi_i.$$
В $\operatorname{Coker} A$ вводится скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ так, что
$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Лемма 1. *[10] Линейное уравнение*
$$A\xi = \eta, \quad \xi \in \operatorname{dom} A, \quad \eta \in E_2,$$
равносильно системе:
$$\xi = A^{-}\eta + e \quad \textit{для любого} \quad e \in \operatorname{Ker} A,$$
$$\langle Q\eta, \varphi_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

2. Разрешение уравнения (1) относительно второй производной

В силу леммы 1 уравнение (1) равносильно системе:
$$\frac{d^2u}{dt^2} = A^{-}B(t)\frac{du}{dt} + A^{-}C(t)u(t) + A^{-}f(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i(t)e_i, \tag{5}$$
$$\langle QB(t)\frac{du}{dt}, \varphi_j \rangle + \langle QC(t)u(t), \varphi_j \rangle + \langle Qf(t), \varphi_j \rangle = 0, \tag{6}$$
где функции $k_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, надлежит вычислить.

Введем обозначения:
$$d_{ij}(t) = \langle QB(t)e_i, \varphi_j \rangle,$$
$$\Delta(t) = \det(d_{ij}(t)),$$
$D_i^{(1)}(t)(\cdot) =$
$$= -\frac{1}{\Delta(t)} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \phantom{d_{11}(t)} & \phantom{d_{21}(t)} & & i & & \phantom{d_{n1}(t)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} d_{11}(t) & d_{21}(t) & \ldots & \langle Q(B'(t) + C(t) + B(t)A^{-}B(t))(\cdot), \varphi_1 \rangle & \ldots & d_{n1}(t) \\ d_{12}(t) & d_{22}(t) & \ldots & \langle Q(B'(t) + C(t) + B(t)A^{-}B(t))(\cdot), \varphi_2 \rangle & \ldots & d_{n2}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{1n}(t) & d_{2n}(t) & \ldots & \langle Q(B'(t) + C(t) + B(t)A^{-}B(t))(\cdot), \varphi_n \rangle & \ldots & d_{nn}(t) \end{pmatrix} \end{array},$$

$$D_i^{(0)}(t)(\cdot) =$$

$$= -\frac{1}{\Delta(t)} \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad i \\ \begin{pmatrix} d_{11}(t) & d_{21}(t) & \dots & \langle Q(C'(t)+B(t)A^{-}C(t))(\cdot),\varphi_1\rangle & \dots & d_{n1}(t) \\ d_{12}(t) & d_{22}(t) & \dots & \langle Q(C'(t)+B(t)A^{-}C(t))(\cdot),\varphi_2\rangle & \dots & d_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{1n}(t) & d_{2n}(t) & \dots & \langle Q(C'(t)+B(t)A^{-}C(t))(\cdot),\varphi_n\rangle & \dots & d_{nn}(t) \end{pmatrix} \end{array},$$

$$\Phi_i(t) = -\frac{1}{\Delta(t)} \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad i \\ \begin{pmatrix} d_{11}(t) & d_{21}(t) & \dots & \langle Q(f'(t)+B(t)A^{-}f(t)),\varphi_1\rangle & \dots & d_{n1}(t) \\ d_{12}(t) & d_{22}(t) & \dots & \langle Q(f'(t)+B(t)A^{-}f(t)),\varphi_2\rangle & \dots & d_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{1n}(t) & d_{2n}(t) & \dots & \langle Q(f'(t)+B(t)A^{-}f(t)),\varphi_n\rangle & \dots & d_{nn}(t) \end{pmatrix} \end{array},$$

$$i,j = 1,2,\dots,n,$$

$$D^{(1)}(t)(\cdot) = A^{-}B(t)(\cdot) + \sum_{i=1}^{n} D_i^{(1)}(t)(\cdot)e_i,$$

$$D^{(0)}(t)(\cdot) = A^{-}C(t)(\cdot) + \sum_{i=1}^{n} D_i^{(0)}(t)(\cdot)e_i,$$

$$\Phi(t) = A^{-}f(t) + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(t)e_i.$$

Дифференцирование соотношений (6) в предположении дифференцируемости $B(t), C(t), f(t)$, и подстановка в них выражения (5) приводят к системе уравнений относительно $k_i(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(t)d_{ij}(t) = -\langle (QB'(t)+QC(t)+QB(t)A^{-}B(t))\frac{du}{dt},\varphi_j\rangle -$$
$$- \langle (QC'(t)+QB(t)A^{-}C(t))u(t),\varphi_j\rangle - \langle QB(t)A^{-}f(t)+Qf'(t),\varphi_j\rangle, \quad j=1,2,\dots,n. \tag{7}$$

В предположении, что при каждом t выполнено

$$\Delta(t) \neq 0, \tag{8}$$

она имеет единственное решение

$$k_i(t) = D_i^{(1)}(t)\frac{du}{dt} + D_i^{(0)}(t)u(t) + \Phi_i(t). \tag{9}$$

Подстановка (9) в (5) приводит к уравнению

$$\frac{d^2u}{dt^2} = D^{(1)}(t)\frac{du}{dt} + D^{(0)}(t)u(t) + \Phi(t). \tag{10}$$

Тем самым, получен следующий результат.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (8), *операторы* $B(t), C(t)$ *и функция* $f(t)$ *дифференцируемы при каждом* $t \in \mathfrak{T}$. *Тогда уравнение* (1) *равносильно системе* (10), (6).

3. Задача Коши для разрешенного дифференциального уравнения второго порядка

Для уравнения (10) поставим задачу Коши:

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{11}$$

Замены

$$u(t) = w_1(t), \tag{12}$$

$$\frac{dw_1}{dt} = w_2(t) \tag{13}$$

приводят это уравнение к уравнению

$$\frac{dw_2}{dt} = D^{(1)}(t)w_2(t) + D^{(0)}(t)w_1(t) + \Phi(t). \tag{14}$$

Обозначив

$$w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}, \quad D(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ D^{(0)}(t) & D^{(1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \Psi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi(t) \end{pmatrix},$$

запишем систему (13), (14) как уравнение

$$\frac{dw}{dt} = D(t)w(t) + \Psi(t). \tag{15}$$

В силу замен (12), (13) начальное условие для него имеет вид:

$$w(0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Применив лемму 2 и результаты монографии [11] к задаче (15), (16), получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 2. Пусть операторы* $D^{(0)}(t), D^{(1)}(t)$ *ограничены и сильно непрерывно дифференцируемы, функция* $\Phi(t)$ *непрерывна при каждом* $t \in \mathfrak{T}$. *Тогда решение задачи* (1), (2) *существует при выполнении условий согласования:*

$$\langle QB(0)u^1, \varphi_j \rangle + \langle QC(0)u^0, \varphi_j \rangle + \langle Qf(0), \varphi_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

оно единственно и определяется первой компонентой функции

$$w(t) = V(t,0) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} + \int\limits_0^t V(t,s) \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi(s) \end{pmatrix} ds, \tag{18}$$

где $V(t,s)$ *— эволюционный оператор, порожденный оператором* $D(t)$.

4. Предложение

Рассматривается линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, задаваемый матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 6 & 15 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 1. *Оператор $\mathcal{A}$ фредгольмов.*

Доказательство. Возьмем элементы $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Решив уравнение $\mathcal{A}\xi = 0$, построим ядро:

$$\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2\}, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\operatorname{Coim} \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}\xi_1 + \frac{5}{6}\xi_2 + \xi_3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Образ оператора $\mathcal{A}$ равен

$$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 3\eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

тогда прямое дополнение к нему имеет вид:

$$\operatorname{Coker} \mathcal{A} = \{(\eta_2 - 3\eta_1)\varphi_1 + \eta_3\varphi_2\}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что имеют место разложения пространств $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^3$ в прямые суммы (3) и $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Coker} \mathcal{A} = 2$. Проектор на $\operatorname{Coker} \mathcal{A}$ равен

$$Q(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Он идемпотентен: $Q^2 = Q$.

Теперь возьмем элементы $\xi \in \operatorname{Coim} \mathcal{A}$, $\eta \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$. Из решения уравнения $A\xi = \eta$ вытекает, что между $\operatorname{Coim} \mathcal{A}$ и $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ имеется взаимно однозначное соответствие, и полуобратный оператор равен

$$\mathcal{A}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

5. Пример

Решим задачу Коши на $t \in \mathfrak{T}$:

$$\begin{aligned}
&2\frac{d^2u_1}{dt^2} + 5\frac{d^2u_2}{dt^2} + 6\frac{d^2u_3}{dt^2} = \frac{du_1}{dt} + 4\frac{du_2}{dt} + 7\frac{du_3}{dt} + u_1(t) + t,\\
&6\frac{d^2u_1}{dt^2} + 15\frac{d^2u_2}{dt^2} + 18\frac{d^2u_3}{dt^2} = 2\frac{du_1}{dt} - 3\frac{du_2}{dt} + 3u_2(t) + 5u_3(t) + 1,\\
&6\frac{du_1}{dt} + 2\frac{du_2}{dt} + 4\frac{du_3}{dt} + 2u_1(t) + 7u_2(t) - 3u_3(t) = 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{gathered}
u_1(0) = a_1, \quad u_2(0) = a_2, \quad u_3(0) = a_3,\\
u_1'(0) = b_1, \quad u_2'(0) = b_2, \quad u_3'(0) = b_3.
\end{gathered} \tag{20}$$

Задача (19), (20) — задача вида (1), (2) с операторами $A, B, C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$A = \mathcal{A}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix},$$

функцией $u(t) \in \mathbb{R}^3$:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix},$$

функцией $f(t) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и начальными векторами $u^0, u^1 \in \mathbb{R}^3$:

$$u^0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad u^1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Применим полученные результаты. Выше было показано, что A фредгольмов. Условие (8) выполнено: $\Delta(t) = \Delta = -59/3 \neq 0$. Вычисления показывают следующее:

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 6/59 & -57/118 & 131/118 \\ 139/59 & 328/59 & 303/59 \\ -108/59 & -449/118 & -411/118 \end{pmatrix}, \quad D^{(0)} = \begin{pmatrix} 9/59 & 0 & 0 \\ 61/59 & 0 & 0 \\ -44/59 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} (9t+12)/59 \\ (61t+42)/59 \\ -(44t+39)/59 \end{pmatrix}.$$

Условия согласования (19) — это равенства:

$$\begin{aligned}
&3a_1 - 3a_2 - 5a_3 + b_1 + 15b_2 + 21b_3 = 1,\\
&2a_1 + 7a_2 - 3a_3 + 6b_1 + 2b_2 + 4b_3 = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Возьмем, к примеру,

$$a_1 = 7/27, \quad a_2 = -2/27, \quad a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0.$$

Решение задачи (19), (20) описывается формулой (18). Запишем его в приближенном виде:

$$u_1(t) \approx 7/27 + 43/354\, t^2 - 116975/563922\, t^3,$$

$$u_2(t) \approx -2/27 + 1561/3186\, t^2 + 250591/563922\, t^3,$$

$$u_3(t) \approx -1361/3186\, t^2 - 182647/563922\, t^3.$$

Заключение

В работе рассмотрена задача Коши для вырожденного дифференциального уравнения второго порядка, заданного в банаховом пространстве. Получено утверждение о разрешении уравнения относительно старшей производной. С помощью него определены условия существования, единственности решения задачи Коши; найдено это решение. Результаты проиллюстрированы примером.

Список литературы

[1] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго З.К. Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989. 413 с.

[2] Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. 832 с.

[3] Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2001. Vol. 24. Pp. 1043–1053. https://doi.org/10.1002/mma.250

[4] Ботороева М.Н., Будникова О.С., Соловарова Л.С. О выборе краевых условий для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2019. Т. 3. С. 32–41. https://doi.org/10.18101/2304-5728-2019-3-32-41

[5] Орлов С.С. Непрерывные решения вырожденного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2009. Т. 1. С. 328–332.

[6] Усков В.И. Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка относительно производной // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26, № 136. С. 414–420. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2021-26-136-414-420

[7] Зубова С.П. О разрешимости задачи Коши для дескрипторного псевдорегулярного уравнения в банаховом пространстве // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2013. № 2. С. 192–198.

[8] Юдин Р.В., Попиков П.И., Усков В.И., Платонов А.А., Попиков В.П., Канищев Д.А. Математическая модель рабочих процессов бесчокерного трелёвочного захвата с энергосберегающим гидроприводом // Resources and Technology. 2022. Т. 19, № 1. С. 72–86.

[9] Никольский С.М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943. Т. 7, № 3. С. 147–166.

[10] Зубова С.П., Усков В.И. Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай // Математические заметки. 2018. Т. 103, № 3. С. 393–404. https://doi.org/10.4213/mzm11199

[11] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

Образец цитирования

Усков В.И. Задача Коши для вырожденного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 4. С. 70–80. https://doi.org/10.26456/vtpmk665

Сведения об авторах

1. **Усков Владимир Игоревич**
старший преподаватель кафедры математики автомобильного факультета Воронежского государственного лесотехнического университета им. Г.Ф. Морозова.

Россия, 394613, Воронежская область, г. Воронеж, ул. Тимирязева, д. 8.
E-mail: vum1@yandex.ru

CAUCHY PROBLEM FOR A SEDOND-ORDER DEGENERACY DIFFERENTIAL EQUATION IN A BANACH SPACE

Uskov V.I.
Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh

Received 06.02.2023, revised 05.07.2023.

This article is devoted to the study of the Cauchy problem for a second-order differential equation given in Banach spaces $E_1 \to E_2$ with closed linear operator coefficients that are everywhere dense in the E_1 domain of definition. The operator A is degenerate, which is why the solution of the Cauchy problem does not exist for every value of the initial data. This operator is Fredholm with zero index (hereinafter, Fredholm). Its kernel is assumed to be n-dimensional. The Fredholm property allows one to split the equation and conditions into the corresponding equations and conditions in subspaces of decreasing dimensions. On the right hand side, the operator coefficients are variable, which is different from other works. We study the case $\Delta(t) \neq 0$ for each $t \in [0;T]$, where $\Delta(t)$ is some matrix constructed using operator coefficients. Conditions obtained the conditions under which the solution of the problem exists is unique; this solution is found in analytical form. An illustrative example is given.

Keywords: Cauchy problem, second-order degeneracy differential equation, Banach space, Fredholm operator, solution of equation, cascade splitting.

Citation

Uskov V.I., “Cauchy problem for a sedond-order degeneracy differential equation in a Banach space”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 4, 70–80 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk665

References

[1] Kopachevskij N.D., Krejn S.G., Ngo Z.K., *Operatornye metody v linejnoj gidrodinamike [Operator methods in linear hydrodynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (in Russian), 413 pp.

[2] Dorf R.C., Bishop R.H., *Modern Control Systems*, Pearson Education, New Jersey, 2008, 1045 pp.

[3] Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J., “Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **24** (2001), 1043–1053, https://doi.org/10.1002/mma.250.

[4] Botoroeva M.N., Budnikova O.S., Solovarova L.S., “Sampling boundary conditions for second order differential-algebraic equations”, *BSU Bulletin. Mathematics, Informatics*, **3** (2019), 32–41 (in Russian), https://doi.org/10.18101/2304-5728-2019-3-32-41.

[5] Orlov S.S., “The continuous solutions of a singular integro-differential equation of the second order in Banach spaces”, *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika [Proceedings of Irkutsk State University. Series: Mathematics]*, **1** (2009), 328–332 (in Russian).

[6] Uskov V.I., “Solution of a second-order algebraic-differential equation with respect to the derivative”, *Vestnik rossijskikh universitetov. Matematika [Russian Universities Reports. Mathematics]*, **26**:136 (2021), 414–420 (in Russian), https://doi.org/10.20310/2686-9667-2021-26-136-414-420.

[7] Zubova S.P., “On the solvability of the Cauchy problem for a descriptor pseudoregular equation in a Banach space”, *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika [Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics]*, 2013, № 2, 192–198 (in Russian).

[8] Yudin R.V., Popikov P.I., Uskov V.I., Platonov A.A., Popikov V.P., Kanishchev D.A., “Matematicheskaya model rabochikh protsessov beschokernogo trelyovochnogo zakhvata s energosberegayushchim gidroprivodom”, *Resources and Technology*, **19**:1 (2022), 72–86 (in Russian).

[9] Nikolsky S., “Linear equations in normed linear spaces”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, **7**:3 (1943), 147–166 (in Russian).

[10] Zubova S.P., Uskov V.I., “Asymptotic Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Equation with a Small Parameter in a Banach Space. The Regular Case”, *Mathematical Notes*, **103**:3 (2018), 395–404, https://doi.org/10.4213/mzm11199.

[11] Krejn S.G., *Linejnye differentsialnye uravneniya v banakhovom prostranstve [Linear differential equations in Banach space]*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (in Russian), 464 pp.

Author Info

1. **Uskov Vladimir Igorevich**
Senior Lecturer at Mathematical department,
Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov.

Russia, 394613, Voronezh, ul. Timiryazeva, 8.
E-mail: vum1@yandex.ru