

**СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПИКОВОГО ВОЗРАСТА
ИНФОРМАЦИИ В ДВУХКАНАЛЬНОЙ ГРУППЕ ПЕРЕДАЧИ,
МОДЕЛИРУЕМОЙ СИСТЕМОЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ С
ПЕРЕУПОРЯДОЧИВАНИЕМ ЗАЯВОК И С РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ
ФАЗОВОГО ТИПА**

Матюшенко С.И.*, Самуйлов К.Е.*,**

*Российский университет дружбы народов, г. Москва

**Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра
«Информатика и управление», г. Москва

Поступила в редакцию 20.12.2023, после переработки 27.01.2024.

Данная статья продолжает цикл работ авторов, посвященных проблеме возраста информации (Age of Information, AoI) – метрики, используемой в информационных системах для мониторинга и управления удаленными источниками информации со стороны центра управления. В работе рассматривается группа передачи, состоящей из источника информации (узла-отправителя), центра управления (узла-получателя) и двух параллельных каналов связи между ними. Предполагается, что пропускные способности каналов различны, а сетевой протокол требует, чтобы информация, поступающая в узел-получатель, считывалась в той же последовательности, в какой она была передана из узла-отправителя. В результате пакеты, нарушившие установленный порядок, задерживаются в узле-получателе на время, необходимое для восстановления порядка. Процесс передачи информации моделируется с помощью двухканальной системы массового обслуживания с ограниченным накопителем, переупорядочиванием заявок и с распределениями фазового типа длительностей генерации и обслуживания. При этом заявки моделируют пакеты передаваемой информации, накопитель системы – очередь пакетов на передачу, обслуживание заявок на приборах – процесс передачи пакетов по каналам связи. В результате получены выражения для преобразования Лапласа-Стилтьеса стационарной функции распределения и начальных моментов максимального значения возраста информации, называемого пиковым возрастом. Проведено численное исследование пикового возраста информации при различных загрузках системы для различных частных случаев распределений фазового типа. Корректность аналитических результатов подтверждена результатами имитационного моделирования.

Ключевые слова: пиковый возраст информации, система массового обслуживания, распределение фазового типа, переупорядочивание заявок.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 1. С. 17–36.
<https://doi.org/10.26456/vtprmk700>

Введение

Одним из главных условий использования приложений сверхнадежной связи является обмен информацией между удаленными системами и центром управления, который обеспечивает контроль и повышает их безопасность за счет своевременного принятия верных управленческих решений [1]. Задачи своевременной доставки информации возникают в различных сферах человеческой деятельности: в энергетических системах, в промышленном интернете вещей, в сфере автономного транспорта, в системах видеонаблюдения и т.д. [2–4]. В 2011 году для количественной оценки «свежести» информации, поступающей в центр управления и мониторинга, была предложена метрика Age of Information (Age of Information, AoI), представляющая собой функцию времени между генерациями обновлений в узле-отправителе и задержкой при доставке их по сети до центра управления и мониторинга [5].

Наиболее удобным аппаратом для исследования проблемы возраста информации является аппарат систем и сетей массового обслуживания. Обзор работ, в которых анализ возраста информации предлагается проводить с использованием этого аппарата, можно найти, например, в [6]. Однако следует заметить, что большинство из этих работ посвящены анализу передачи информации посредством единственного канала связи между источником информации и его получателем, в то время как в реальных технических системах часто практикуется одновременное использование нескольких каналов связи. В силу возможного различия в пропускных способностях каналов, а также в силу того, что объем передаваемой информации, заключенной в одном пакете, может быть случаен, возникает проблема переупорядочивания пакетов информации в узле-получателе в соответствии с порядком их выхода из узла-отправителя. Процедура переупорядочивания требуется для адекватного считывания информации в узле-получателе и связана с определенными временными затратами, которые необходимо учитывать при оценке возраста информации. С этой целью для моделирования процесса передачи информации логично использовать системы массового обслуживания с переупорядочиванием заявок [7–13]. Поскольку в настоящее время интерес к системам с переупорядочиванием заявок возобновился в связи с проблемой оценки возраста информации, авторы приняли решение опубликовать цикл работ, в которых проблема оценки возраста информации решается в совокупности с проблемой переупорядочивания. Данная статья является одной из работ этого цикла. Остальные работы [12, 14–18, 20] в данный момент находятся в печати и будут опубликованы в ближайшее время.

1. Описание модели

Рассмотрим группу передачи (ГП) информации, состоящую из узла-отправителя, узла-получателя и двух каналов связи между ними (Рис. 1), имеющих разные пропускные способности. Далее для определенности будем полагать,

что у первого канала пропускная способность выше, чем у второго, и что пакет, имеющий возможность выбора канала, выбирает первый канал. Кроме этого, будем полагать, что каждому пакету в момент отправки из ОУ присваивается порядковый номер, а информация в УП может быть прочитана только в том порядке, в котором она была отправлена из ОУ. Поэтому, если какой-то пакет нарушит установленный порядок, то он будет задержан в УП до момента поступления пакета, передача которого началась раньше передачи данного пакета.

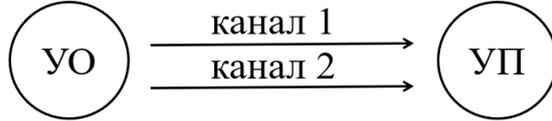


Рис. 1: Двухканальная группа передачи

Процесс передачи информации из ОУ в УП будем моделировать с помощью двухканальной системы массового обслуживания (СМО) с общим накопителем ограниченной емкости, на которую поступает рекуррентный поток заявок с функцией распределения (ФР) фазового типа $A(t)$:

$$A(t) = 1 - \alpha^T e^{\Lambda t} \mathbf{1}, \quad t \geq 0, \quad \alpha^T \mathbf{1} = 1 \quad (1)$$

с неприводимым РН-представлением (α, Λ) порядка l .

Будем считать, что каждая заявка имеет случайную длину, причем длины заявок являются независимыми в совокупности случайными величинами с общей ФР $G(x)$ и средним значением γ^{-1} . Далее предположим, что времена обслуживания заявок на приборе j независимы между собой, а также не зависят от длин заявок и имеют общую ФР $B_j(t)$:

$$B_j(t) = 1 - \beta_j^T e^{\mathbf{M}_j t} \mathbf{1}, \quad t \geq 0, \quad \beta_j^T \mathbf{1} = 1 \quad (2)$$

с неприводимым РН-представлением (β_j, \mathbf{M}_j) порядка m_j , $j = 1, 2$.

Емкость накопителя ограничивается двумя параметрами: числом r мест для ожидания, $r < \infty$, и числом v , $v > 0$, ограничивающим суммарный объем заявок в очереди. Заявка, поступающая в систему, когда все r мест заняты или же, когда суммарный объем ожидающих в очереди заявок и данной заявки превышает v , теряется и в дальнейшем не оказывает влияния на функционирование СМО.

Далее будем предполагать, что интенсивность обслуживания на приборе 1 выше, чем на приборе 2. Заявка, поступающая в свободную СМО, направляется на первый прибор. При выборе заявок из очереди действует дисциплина FCFS.

В системе предусматривается сохранение порядка на выходе, установленного при входе в нее. Заявки, завершившие обслуживание и нарушившие его, накапливаются на выходе системы в буфере переупорядочивания и содержатся в нем до момента восстановления порядка.

В соответствии с обозначениями Кенделла рассматриваемую систему будем кодировать $PH/PH/2/(r, v)/res$, где res – сокращение от *resequence* – переупорядочивание (Рис. 2).

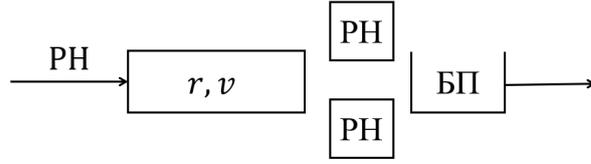


Рис. 2: Двухканальная СМО конечной емкости с буфером переупорядочивания и с распределениями фазового типа

Данная система была исследована нами в [8]. В этой работе стохастическое поведение системы было описано марковским процессом (МП) $X(t)$, $t \geq 0$, над множеством состояний

$$\mathcal{X} = \bigcup_{k=0}^{r+2} \mathcal{X}_k,$$

где $\mathcal{X}_0 = \{(s, 0) | s = \overline{0, l}\}$,

$$\mathcal{X}_k = \mathcal{X}_{k1} \cup \mathcal{X}_{k2}, \quad k = \overline{1, r+2},$$

$$\mathcal{X}_{1i} = \{(s, j_i, i) | s = \overline{1, l}, j_i = \overline{1, m_i}\}, \quad i = 1, 2,$$

$$\mathcal{X}_{ki} = \{(k, s, j_1, j_2, i) | s = \overline{1, l}, j_i = \overline{1, m_i}\}, \quad i = 1, 2, \quad k = \overline{2, r+2}.$$

Здесь для некоторого момента времени t : $X(t) = (s, 0)$, если в момент t система пуста, а процесс генерации заявки происходит на фазе s ; $X(t) = (s, j_i, i)$, если в системе имеется одна заявка, обслуживаемая на первом приборе при $i = 1$, либо на втором приборе при $i = 2$, и при этом процесс обслуживания находится на фазе j_i ; $X(t) = (k, s, j_1, j_2, i)$, если в системе имеется k заявок, процессы обслуживания заявок на приборах находятся на фазах j_1 и j_2 соответственно и при этом $i = 1$, если на первом приборе обслуживается заявка, пришедшая в систему раньше заявки, обслуживаемой на втором приборе. В противном случае $i = 2$. При этом будем говорить, что $i = 1$ означает, что система упорядочена, а $i = 2$ – неупорядочена. Индекс s имеет прежний смысл.

В [8] мы доказали, что с точки зрения стационарного распределения, анализ рассматриваемой системы сводится к анализу СМО $PH(k)/PH/2/r/res$, в которой ограничение на объем заявок в накопителе путем эквивалентных преобразований заменяется на зависимость поступающего потока от количества заявок в системе. Было доказано что, в новой системе ФР интервалов между поступлениями заявок при наличии в ней k заявок допускает неприводимое РН-представление (α, Λ) , где

$$\Lambda_k = \Lambda + \lambda \alpha^T (1 - f_k), \quad (3)$$

$\lambda = -\Lambda \mathbf{1}$, а f_k вычисляется по формуле:

$$f_k = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \\ G_{k-1}(v) / G_{k-2}(v), & k = \overline{2, r+1}, \\ 0, & k = r+2, \end{cases} \quad (4)$$

$$G_0(v) = 1, \quad G_1(v) = G(v), \quad G_k(v) = \int_0^v G(v-x) dG_{k-1}(x), \quad k = \overline{2, r}.$$

Для системы $PH(k)/PH/2/r/res$ был разработан рекуррентный матричный алгоритм расчета стационарных вероятностей p_x , $x \in \mathcal{X}$. Цель данного исследо-

вания состоит в определении преобразования Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) ФР пикового возраста информации, передаваемой заявками СМО $PH(k)/PH/2/r/res$.

Очевидно, что в нашей системе пиковый возраст Z_{n-1} ($n-1$)-ой заявки определяется выражением:

$$Z_{n-1} = G_n + W_n + Q_n + R_n, \quad (5)$$

где G_n – время генерации; W_n – время ожидания обслуживания; Q_n – длительность обслуживания; R_n – время переупорядочивания заявки n .

Поэтому наша задача состоит в том, чтобы найти ПЛС стационарной ФР для каждой из перечисленных выше случайных величин.

2. ПЛС ФР времени ожидания обслуживания

Обозначим через $W(t)$ ФР времени ожидания обслуживания для заявки, принятой в систему в стационарном режиме ее работы, а через $W_x(t)$ – условную стационарную ФР времени ожидания обслуживания для заявки, принятой в систему при условии, что в момент $t=0$ ее поступления система находится в состоянии $x \in \mathcal{X}_A^-$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_A^- &= \{(0), (j_i, i), (k, j_1, j_2, i), k = \overline{2, r+1}; j_i = \overline{1, m_i}; i = 1, 2\}, \\ (0) &= \bigcup_{s=1}^l (s, 0), \quad (j_i, i) = \bigcup_{s=1}^l (s, j_i, i), \quad (k, j_1, j_2, i) = \bigcup_{s=1}^l (s, k, j_1, j_2, i). \end{aligned}$$

Обозначим через $w(s)$ и $w_x(s)$ – ПЛС ФР $W(t)$ и $W_x(t)$ соответственно и введем векторы:

$$\mathbf{w}_{1,i}^T(s) = (w_{(1,i)}(s), \dots, w_{(m_i,i)}(s)),$$

$$\mathbf{w}_{k,i}^T(s) = (w_{(k,1,1,i)}(s), \dots, w_{(k,1,m_2,i)}(s), w_{(k,2,1,i)}(s), \dots, w_{(k,m_1,m_2,i)}(s)),$$

$$k = \overline{2, r+1}, i = 1, 2.$$

Далее докажем следующие леммы:

Лемма 1. Пусть ξ_j – с.в. с ФР фазового типа, определяемая выражением (2), $j = 1, 2$, и пусть $\xi = \min(\xi_1, \xi_2)$. Тогда ФР с.в. ξ определяется по формуле:

$$F_\xi(t) = 1 - (\beta_1^T \otimes \beta_2^T) e^{(\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2)t} \mathbf{1}, \quad (6)$$

где $\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2$ – кронекерова сумма \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 .

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{F}_\xi &= P\{\min(\xi_1, \xi_2) > t\} = P\{\xi_1 > t, \xi_2 > t\} = P\{\xi_1 > t\} \cdot P\{\xi_2 > t\} = \\ &= \beta_1^T e^{\mathbf{M}_1 t} \mathbf{1} \beta_2^T e^{\mathbf{M}_2 t} \mathbf{1} = (\beta_1^T e^{\mathbf{M}_1 t} \mathbf{1}) \otimes (\beta_2^T e^{\mathbf{M}_2 t} \mathbf{1}) = \\ &= (\beta_1^T \otimes \beta_2^T) (e^{\mathbf{M}_1 t} \otimes e^{\mathbf{M}_2 t}) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = (\beta_1^T \otimes \beta_2^T) e^{(\mathbf{M}_1 t \oplus \mathbf{M}_2 t)} \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма доказана. \square

Заметим, что при доказательстве были использованы свойства кронекерова произведения матриц, которые можно найти, например, в [21] на стр. 74–75.

Лемма 2. ПЛС ФР $F_\xi(t)$ определяется по формуле:

$$f_\xi(s) = (\beta_1^T \otimes \beta_2^T)(s\mathbf{I} - (\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2))^{-1}(\mu_1 \otimes \mathbf{1} + \mu_2 \otimes \mathbf{1}). \quad (7)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} f_\xi(s) &= \int_0^\infty e^{-st} d\left(1 - (\beta_1^T \otimes \beta_2^T)e^{(\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2)t}\mathbf{1}\right) = \\ &= -(\beta_1^T \otimes \beta_2^T) \int_0^\infty e^{-(s\mathbf{I} - (\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2))t} dt (\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2)\mathbf{1} = \\ &= -(\beta_1^T \otimes \beta_2^T)(s\mathbf{I} - (\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2))^{-1}(\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2)\mathbf{1} = \\ &= (\beta_1^T \otimes \beta_2^T)(s\mathbf{I} - (\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2))^{-1}(\mu_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mu_2). \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

Заметим, что невырожденность матрицы $s\mathbf{I} - (\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2)$ следует из неразложимости $\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2$ [21].

Вернемся к определению ПЛС для условной стационарной ФР $W_x(t)$.

Очевидно, что заявка, поступающая в систему и застающая хотя бы один прибор свободным, сразу направляется на обслуживание и время ожидания для нее равно нулю. Если же в момент $t = 0$ поступления очередной заявки в очереди имеется $k - 2$ заявки, то время ожидания будет складываться из минимума времени дообслуживания заявок, находящихся в момент $t = 0$ на приборах и времени обслуживания $k - 2$ -ух заявок, пришедших в систему раньше данной заявки. Учитывая, что время обслуживания заявок на приборе не зависимы между собой и не зависят от времени обслуживания на другом приборе, а также учитывая, что время ожидания обслуживания не зависит от того, была ли система упорядочена либо неупорядочена в момент $t = 0$ поступления фиксированной заявки для $k = 2, m + 1$, мы приходим к следующему результату:

$$w_0(s) = 1,$$

$$\mathbf{w}_{1,i}(s) = \mathbf{1},$$

$$\mathbf{w}_{k,i}(s) = (s\mathbf{I} - (\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2))^{-1}(\mu_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mu_2)f_\xi^{k-1}(s), \quad k = \overline{2, r+1}, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

где $f_\xi(s)$ определяется в соответствии с (8).

Учитывая, что $\mathbf{w}_{k,1} = \mathbf{w}_{k,2}$, мы введем общее обозначение \mathbf{w}_k для обоих векторов.

Далее, обозначим через $\pi_A^-(0)$, $\pi_A^-(j_i, i)$, $\pi_A^-(k, j_1, j_2, i)$ стационарные вероятности состояний (0) , (j_i, i) и (k, j_1, j_2, i) цепи Маркова (ЦМ), вложенной в МП $X(t)$, $t \geq 0$, по моментам $t = 0$ поступления заявок в систему и введем векторы:

$$\mathbf{p}^T(0) = (p_{10}, \dots, p_{20}),$$

$$\mathbf{p}^T(1, i) = (p_{11i}, \dots, p_{1m_i i}, p_{21i}, \dots, p_{2m_i i}, \dots, p_{l1i}, p_{lm_i i}), \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^T(k, i) &= (p_{k11i}, \dots, p_{k1m_2i}, \dots, p_{km_1m_2i}, \dots, p_{klm_1m_2i}), \quad k = \overline{2, r+2}, \quad i = 1, 2, \\ \boldsymbol{\pi}_A^{-T}(1, i) &= (\pi_A^-(1, i), \dots, \pi_A^-(m_i, i)), \\ \boldsymbol{\pi}_A^{-T}(k, i) &= (\pi_A^-(k11i), \dots, \pi_A^-(k1m_2i), \dots, \pi_A^-(km_11i), \dots, \pi_A^-(km_1m_2i)), \\ & \quad k = \overline{2, r+2}, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

Кроме этого положим

$$\boldsymbol{\pi}_A^-(k) = \boldsymbol{\pi}_A^-(k, 1) + \boldsymbol{\pi}_A^-(k, 2). \quad (9)$$

Для определения стационарных вероятностей $\pi_A^-(0)$, $\pi_A^-(k, i)$, $k = \overline{1, r+2}$, воспользуемся выводами работы [22], согласно которым:

$$\pi_A^-(0) = \frac{1}{\lambda_0} \mathbf{p}^T(0) \boldsymbol{\lambda}_0, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\pi}_A^{-T}(k, i) = \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{p}^T(k, i) (\boldsymbol{\lambda}_k \otimes \mathbf{1}), \quad k = \overline{1, r+2}, \quad (11)$$

где

$$\boldsymbol{\lambda}_k = -\boldsymbol{\Lambda}_k \mathbf{1}, \quad \lambda_k = -(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\Lambda}_k \mathbf{1})^{-1}. \quad (12)$$

И, наконец, применяя формулы полной и условной вероятности, приходим к следующему результату.

Теорема 1. *ПЛС стационарной ФР времени ожидания обслуживания для заявок, принятых в систему РН(k)/РН/2/r/res, определяется выражением*

$$w(s) = \frac{1}{1 - \pi} \left[\pi_A^-(0) + \boldsymbol{\pi}_A^{-T}(1, 1) \mathbf{1} + \boldsymbol{\pi}_A^{-T}(1, 2) \mathbf{1} + \sum_{k=2}^{r+1} \boldsymbol{\pi}_A^{-T}(k) \mathbf{w}_k(s) \right], \quad (13)$$

где $\pi_A^-(0)$, $\pi_A^-(1, i)$, $i = 1, 2$ и $\boldsymbol{\pi}_A^{-T}(k)$ определяются в соответствии с (10)–(12), $\mathbf{w}_k(s)$ вычисляется по формуле (9), а π – вероятность потерь, определяется выражением:

$$\pi = \pi_A^-(0)(1 - f_0) + \sum_{k=1}^{r+2} \boldsymbol{\pi}_A^{-T}(k) \mathbf{1}(1 - f_2). \quad (14)$$

Дифференцируя $w(s)$ по s и полагая $s = 0$, после нескольких преобразований приходим к следующему результату.

Следствие 1. *Средняя длительность ожидания обслуживания для заявок, принятых в систему РН(k)/РН/2/r/res, определяется по формуле:*

$$E(W) = \frac{1}{1 - \pi} \left[\sum_{k=2}^{r+1} \boldsymbol{\pi}_A^{-T}(k) \cdot (\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2)^{-2} (\boldsymbol{\mu}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}_2) \cdot f^{(k-3)}(0) [f(0) + (k-2)f'(0)] \right], \quad (15)$$

где

$$f(0) = -(\boldsymbol{\beta}_1^T \otimes \boldsymbol{\beta}_2^T) (\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2)^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}_2), \quad (16)$$

$$f'(0) = -(\boldsymbol{\beta}_1^T \otimes \boldsymbol{\beta}_2^T) (\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2)^{-2} (\boldsymbol{\mu}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}_2). \quad (17)$$

3. ПЛС ФР времени переупорядочивания

Обозначим через $R(t)$ ФР времени переупорядочивания заявки в стационарном режиме работы СМО, а через $R_{j,x}(t)$ – условную стационарную ФР времени переупорядочивания заявки, обслуженной на приборе j , при условии, что в момент $t = 0$ окончания ее обслуживания система находится в состоянии $x \in \mathcal{X}_{D,j}^-$, где

$$\mathcal{X}_{D,j}^- = \{(s, i), (k, s, j_{3-j}, i), k = \overline{2, r+2}, s = \overline{1, l}, j_{3-j} = \overline{1, m_{3-j}}, i = 1, 2\}, j = 1, 2,$$

$$(s, i) = \bigcup_{j_i=1}^{m_i} (s, j_i, i),$$

$$(k, s, j_{3-j}, i) = \bigcup_{j_i=1}^{m_j} (k, s, j_1, j_2, i).$$

Очевидно, что заявка, обслуженная любым из приборов и оставляющая систему пустой, не будет задержана. Если же в момент $t = 0$ выхода заявки из прибора j система находится в одном из состояний (k, s, j_{3-j}, i) , $k = \overline{2, r+2}$, то заявка будет задержана до момента окончания обслуживания на приборе $3-j$ при условии, что $i \neq j$.

Обозначим через $r(s)$ и $r_{j,x}(s)$ – ПЛС ФР $R(t)$ и $R_{j,x}(t)$ соответственно и введем векторы:

$$\mathbf{r}_{j,1}^T = (r_{(1,j)}(s), \dots, r_{(l,j)}(s)),$$

$$\mathbf{r}_{j,(k,i)}^T = (r_{(k,1,1,i)}(s), r_{(k,1,2,i)}(s), \dots, r_{(k,l,m_{3-j},i)}(s)).$$

Тогда, на основании вышеизложенного, получаем:

$$\mathbf{r}_{j,1}^T = \mathbf{1}, \quad (18)$$

$$\mathbf{r}_{j,(k,i)}^T = \begin{cases} \mathbf{1}, & i = j; \\ (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\alpha})(s\mathbf{I} - \mathbf{M}_i)^{-1} \boldsymbol{\mu}_i, & i \neq j. \end{cases} \quad (19)$$

Далее, обозначим через $\pi_{D,j}^-(s, j)$ и $\pi_{D,j}^-(k, s, j_{3-j}, i)$ стационарные вероятности состояний (s, j) и (k, s, j_{3-j}, i) цепи Маркова, вложенной в МП $X(t)$, $t \geq 0$, по моментам $t = 0$ окончания обслуживания заявки на приборе j и введем векторы:

$$\boldsymbol{\pi}_{D,j}^{-T}(1, j) = (\pi_{D,j}^-(1, j), \dots, \pi_{D,j}^-(l, j)),$$

$$\boldsymbol{\pi}_{D,j}^{-T}(k, i) = (\pi_{D,j}^-(k, 1, 1, i), \pi_{D,j}^-(k, 1, 2, i), \dots, \pi_{D,j}^-(k, l, m_{3-j}, i)),$$

$$k = \overline{2, r+2}, i = 1, 2, j = 1, 2.$$

Для определения стационарных вероятностей $\pi_{D,j}^-(s, j)$ и $\pi_{D,j}^-(k, s, j_{3-j}, i)$ воспользуемся результатами [22], согласно которым

$$\boldsymbol{\pi}_{D,j}^{-T}(1, j) = \frac{1}{\lambda_D(j)} \mathbf{P}^T(1, j) (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\mu}_j), j = 1, 2, \quad (20)$$

$$\pi_{D,1}^{-T}(k, i) = \frac{1}{\lambda_D(1)} \mathbf{p}^T(k, i) (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\mu}_1 \otimes \mathbf{I}), \quad k = \overline{2, r+2}, \quad j = 1, 2, \quad (21)$$

$$\pi_{D,2}^{-T}(k, i) = \frac{1}{\lambda_D(2)} \mathbf{p}^T(k, i) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\mu}_2), \quad k = \overline{2, r+2}, \quad j = 1, 2, \quad (22)$$

где $\lambda_D(j)$ – интенсивность выхода заявок, обслуженных прибором j , определяется выражением:

$$\lambda_D(j) = \mathbf{p}^T(1, j) (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}_j) + \sum_{k=2}^{r+2} (\mathbf{p}^T(k, 1) + \mathbf{p}^T(k, 2)) \cdot [u(2-j)(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}_1 \otimes \mathbf{1}) + u(j-1)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}_2)], \quad j = 1, 2. \quad (23)$$

Далее заметим, что вероятность выхода заявок из прибора j равна $\lambda_D(j)/\lambda_D$, где

$$\lambda_D = \lambda_D(1) + \lambda_D(2) - \text{интенсивность выходящего потока.} \quad (24)$$

Таким образом, подытоживая наши рассуждения, мы получаем, что справедлива

Теорема 2. *ПЛС ФР времени переупорядочивания в СМО РН(k)/РН/2/r/res в стационарном режиме ее работы определяется выражением*

$$r(s) = \frac{1}{\lambda_D} \sum_{j=1}^2 \lambda_D(j) \sum_{k=1}^{r+2} [\pi_{D,j}^{-T}(k, j) + \pi_{D,j}^{-T}(k, 3-j)] \cdot (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I})(s\mathbf{I} - \mathbf{M}_{3-j})^{-1} \boldsymbol{\mu}_{3-j}, \quad (25)$$

где $\pi_{D,j}^{-T}(k, j)$ определяются в соответствии с (21)–(23), а $\lambda_D(j)$ и λ_D – в соответствии с (24)–(25).

Дифференцируя $r(s)$ по s и полагая $s = 0$ после некоторых преобразований приходим к следующему результату.

Следствие 2. *Среднее время переупорядочивания заявок в системе РН(k)/РН/2/r/res определяется по формуле:*

$$E(R) = -\frac{1}{\lambda_D} \sum_{k=2}^{r+2} [\mathbf{p}^T(k, 2)(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}_1 \otimes \boldsymbol{\mu}_2^{-1} \mathbf{1}) + \mathbf{p}^T(k, 1)(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}_1^{-1} \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}_2)]. \quad (26)$$

4. ПЛС ФР времени генерации и обслуживания

Обозначим через $G(t)$ ФР длительности генерации заявки, принятой в систему, а через $g(s)$ ее преобразование Лапласа–Стилтьеса. Учитывая, что ФР длительности генерации заявки при наличии в системе k заявок допускает неприводимое РН-представление $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{\Lambda}_k)$, где $\mathbf{\Lambda}_k$ определяется в соответствии с (3), и применяя формулы полной и условной вероятностей, приходим к следующему результату.

Теорема 3. ПЛС ФР длительности генерации заявки, принятой в систему $RH(k)/RH/2/r/res$ в стационарном режиме ее работы определяется выражением

$$g(s) = \frac{1}{1-\pi} \left[\pi_A^-(0)\alpha_0(s) + \left[\pi_A^{-T}(1,1)\mathbf{1} + \pi_A^{-T}(1,2)\mathbf{1} \right] \alpha_1(s) + \sum_{k=2}^{r+1} \pi_A^{-T}(k)\mathbf{1}\alpha_k(s) \right], \quad (27)$$

где $\alpha_k(s) = \boldsymbol{\alpha}^T(s\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda}_k)^{-1}\boldsymbol{\lambda}_k$, а $\pi_A^-(0)$, $\pi_A^-(1,i)$, $i = 1, 2$, $\pi_A^-(k)$ и λ_k вычисляются по формулам (10)–(13).

Из теоремы 3 вытекает очевидное

Следствие 3. Средняя длительность генерации заявки, принятой в систему $RH(k)/RH/2/r/res$ в стационарном режиме ее работы определяется выражением:

$$E(G) = -\frac{1}{1-\pi} \left[\pi_A^-(0)\alpha'_0(0) + \left[\pi_A^{-T}(1,1)\mathbf{1} + \pi_A^{-T}(1,2)\mathbf{1} \right] \alpha'_1(0) + \sum_{k=2}^{r+1} \pi_A^{-T}(k)\mathbf{1}\alpha'_k(0) \right], \quad (28)$$

где $\alpha'_k(0) = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\Lambda}_k^{-1} \mathbf{1}$.

Далее, обозначим через $Q(t)$ – стационарную ФР времени обслуживания заявки, принятой в систему, а через $Q_x(t)$ – условную стационарную ФР времени обслуживания заявки, принятой в систему, при условии, что в момент $t = 0$ ее поступления система находилась в состоянии $x \in \mathcal{X}_A^-$. Кроме этого, обозначим через $q(s)$ и $q_x(s)$ – ПЛС ФР $Q(t)$ и $Q_x(t)$ соответственно.

Очевидно, что если в момент $t = 0$ поступления в систему фиксированной заявки система была пуста, то заявка сразу будет направлена на обслуживание на прибор 1. Следовательно,

$$q_0(s) = \boldsymbol{\beta}_1^T (s\mathbf{I} - \mathbf{M}_1)^{-1} \boldsymbol{\mu}_1. \quad (29)$$

Если в момент $t = 0$ поступления в систему фиксированной заявки обслуживанием будет занят только прибор j , то заявка поступит на обслуживание на прибор $3 - j$. Следовательно,

$$q_{(1,j)}(s) = \boldsymbol{\beta}_{3-j}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{M}_{3-j})^{-1} \boldsymbol{\mu}_{3-j}, \quad j = 1, 2. \quad (30)$$

И, наконец, если в момент $t = 0$ поступления в систему фиксированной заявки в системе уже находится k заявок, то через некоторое время данная заявка переместится на первое место в очереди, после чего она с вероятностью μ_j/μ попадет на прибор j , где $\mu_j^{-1} = \boldsymbol{\beta}_j \mathbf{M}_j^{-1} \mathbf{1}$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

Следовательно,

$$q_{k,i}(s) = \sum_{j=1}^2 \frac{\mu_j}{\mu} \boldsymbol{\beta}_j^T (s\mathbf{I} - \mathbf{M}_j)^{-1} \boldsymbol{\mu}_j, \quad k = \overline{2, r+1}, \quad i = 1, 2. \quad (31)$$

Учитывая, что $q_{k,1}(s) = q_{k,2}(s)$ мы введем одно обозначение $q_k(s)$.

Подытоживая наши рассуждения, приходим к следующему результату.

Теорема 4. ПЛС ФР длительности обслуживания заявки, принятой в систему $RH(k)/RH/2/r/res$ в стационарном режиме ее работы определяется выражением:

$$q(s) = \frac{1}{1-\pi} \left[\pi_A^-(0)q_0(s) + \sum_{j=1}^2 \pi_A^{-T}(1, j)\mathbf{1}q_{1,i}(s) + \sum_{k=2}^{r+1} \pi_A^{-T}(k)\mathbf{1}q_k(s) \right], \quad (32)$$

где $q_0(s)$, $q_{1,i}(s)$ и $q_k(s)$ вычисляются по формулам (30)–(32).

Из теоремы 4 вытекает очевидное

Следствие 4. Средняя длительность обслуживания заявки, принятой в систему $RH(k)/RH/2/r/res$ в стационарном режиме ее работы определяется выражением:

$$E(Q) = \frac{1}{1-\pi} \left[\left(\pi_A^-(0) + \pi_A^{-T}(1, 2)\mathbf{1} + \frac{\mu_1}{\mu} \sum_{k=2}^{r+1} \pi_A^{-T}(k)\mathbf{1} \right) \beta_1^T \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{1} + \left(\pi_A^{-T}(1, 1)\mathbf{1} + \frac{\mu_2}{\mu} \sum_{k=2}^{r+1} \pi_A^{-T}(k)\mathbf{1} \right) \beta_2^T \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{1} \right]. \quad (33)$$

5. ПЛС ФР пикового возраста информации

Возвращаясь к формуле (5) и учитывая ее справедливость для любого n , а также принимая во внимание факт независимости слагаемых в правой части этой формулы, можем утверждать, что для ПЛС ФР пикового возраста информации справедлива следующая

Теорема 5. ПЛС пикового возраста информации, передаваемой заявками системы $RH(k)/RH/2/r/res$, определяется выражением:

$$z(s) = g(s)w(s)q(s)r(s), \quad (34)$$

где $g(s)$, $w(s)$, $q(s)$ и $r(s)$ вычисляются по формулам (28),(14),(32),(26) соответственно.

Из теоремы 5 вытекает

Следствие 5. Среднее значение пикового возраста информации, передаваемой заявками системы $RH(k)/RH/2/r/res$, определяется выражением:

$$E(Z) = E(G) + E(W) + E(Q) + E(R), \quad (35)$$

где $E(G)$, $E(W)$, $E(Q)$ и $E(R)$ вычисляются по формулам (29),(16),(33),(27) соответственно.

6. Результаты численного исследования

Учитывая универсальный характер РН-распределения, мы провели численные исследования для трех СМО, являющихся частными случаями системы $PH(k)/PH/2/r/res$.

Во всех трех случаях мы предполагали, что на системы поступает пуассоновский поток интенсивности λ , а емкость накопителя ограничена одним параметром – количеством r мест для ожидания. При этом обслуживание на приборах первой системы происходило в соответствии с экспоненциальными распределениями с параметрами μ_1 и μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$). Длительности обслуживания на приборах второй системы имели гиперэкспоненциальные распределения, задаваемые начальными векторами $\beta_1^T = (\beta_{11}, \beta_{12})$ и $\beta_2^T = (\beta_{21}, \beta_{22})$ и матрицами $\mathbf{M}_1 = diag\{-\mu_{11}, -\mu_{12}\}$ и $\mathbf{M}_2 = diag\{-\mu_{21}, -\mu_{22}\}$ для первого и второго прибора соответственно. В третьей системе длительности обслуживания на приборах подчинялись закону Эрланга второго порядка с начальными векторами $\beta_1^T = \beta_2^T = (0; 1)$ и матрицами

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} -\mu_1 & \mu_1 \\ 0 & -\mu_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -\mu_2 & \mu_2 \\ 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

для первого и второго прибора соответственно. Другими словами, следуя обозначениям Кенделла, мы рассмотрим три системы: $M/M/2/r/res$, $M/HM/2/r/res$ и $M/E/2/r/res$.

При этом, мы для всех трех систем взяли одинаковый размер накопителя $r = 5$, подобрали и зафиксировали параметры обслуживания таким образом, чтобы средние длительности обслуживания m_j на приборе j , для всех трех систем были одинаковы и рассчитали коэффициенты ковариации $k_j = \sigma_j/m_j$ длительностей обслуживания, $j = 1, 2$. Исходные параметры и результаты вычислений представлены ниже:

– для СМО $M/M/2/r/res$:

$$\mu_1 = 2; \quad m_1 = 0,5; \quad k_1 = 1;$$

$$\mu_2 = 1; \quad m_1 = 1; \quad k_1 = 1;$$

– для СМО $M/HM/2/r/res$:

$$\beta_1^T = (0, 4; 0, 6); \quad \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1,5 \end{pmatrix}; \quad m_1 = 0,5; \quad k_1 = 1,155;$$

$$\beta_2^T = (0, 3; 0, 7); \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & -1,75 \end{pmatrix}; \quad m_2 = 1; \quad k_1 = 1,363;$$

– для СМО $M/E/2/r/res$:

$$\beta_1^T = (1, 0; 0, 0); \quad \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}; \quad m_1 = 0,5; \quad k_1 = 0,707;$$

$$\beta_2^T = (1, 0; 0, 0); \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad m_2 = 1; \quad k_1 = 0,707.$$

Цель нашего исследования состояла в том, чтобы оценить влияние коэффициентов вариации на поведение среднего пикового возраста информации в зависимости от меняющейся загрузки $\rho = \lambda/(\mu_1 + \mu_2)$. При этом, изменение ρ мы достигали за счет изменения λ .

На Рис. 3 отражена зависимость среднего пикового возраста от загрузки ρ для каждой из систем.

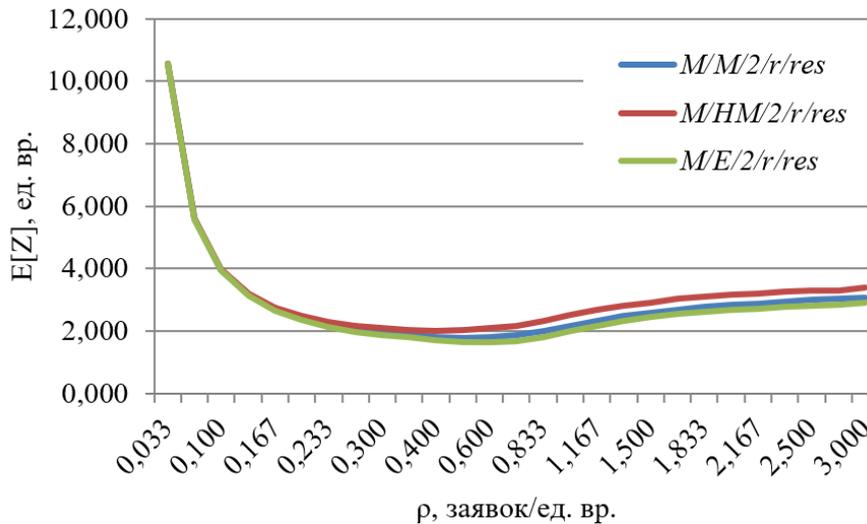


Рис. 3: Зависимость среднего пикового возраста от загрузки ρ

Как видно из рисунка, средний пиковый возраст сначала убывает и примерно в интервале от 0,25 до 0,85 достигает своих минимальных значений, что говорит о наличии оптимального решения с точки зрения скорости и частоты обновления информации. Затем пиковый возраст немного подрастает, а дальше, после «насыщения» системы заявками, стабилизируется. При этом, следует заметить, что наибольшие средние значения пикового возраста наблюдаются в системе $M/HM/2/r/res$, а наименьшие – в системе $M/E/2/r/res$. Другими словами, чем выше коэффициенты ковариации длительностей обслуживания, тем больше значения среднего пикового возраста. Связано это с тем, что чем больше коэффициенты ковариации, тем больше случайность «вмешивается» в процесс передачи информации.

Заключение

В результате проведенного исследования нам удалось получить выражения для преобразования Лапласа-Стилтьеса стационарной функции распределения и начальных моментов пикового возраста информации, передаваемой из периферийного источника в центр управления посредством двух параллельных каналов связи, моделируя процесс передачи с помощью двухканальной системы массового обслуживания с переупорядочиванием заявок и с распределениями фазового типа.

Данное исследование позволило впервые получить оценки возраста информации для двухканальной группы передачи и учесть при этом затраты времени на восстановление порядка переданных пакетов. Принимая во внимание универсальный характер и широкие возможности распределений фазового типа, обусловленные неограниченной свободой выбора количества фаз и параметров этих распределений, мы вправе рассчитывать, что результаты данного исследования позволят разработчикам реальных технических систем выбирать оптимальные решения при их проектировании.

Список литературы

- [1] Sultan A. Ultra Reliable and Low Latency Communications [Electronic resource]. 2023. URL: <https://www.3gpp.org/technologies/urlcc-2022>.
- [2] Kaul S., Yates R., Gruteser M. Real-time status: How often should one update? // Proceedings IEEE INFOCOM. 2012. Pp. 2731–2735.
- [3] Costa M., Codreanu M., Ephremides A. On the age of information in status update systems with packet management // IEEE Transactions on Information Theory. 2016. Vol. 62, № 4. Pp. 1897–1910.
- [4] Kaul S.K., Yates R.D., Gruteser M. Status updates through queues // 46th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS). 2012. Pp. 1–6.
- [5] Kaul S., Gruteser M., Rai V., Kenney J. Minimizing age of information in vehicular networks // 8th Annual IEEE Communications Society Conference on Sensor, Mesh and Ad Hoc Communications and Networks. 2011. Pp. 350–358.
- [6] Zhabankova E., Khakimov A., Markova E., Gaidamaka Y. The Age of Information in Wireless Cellular Systems: Gaps, Open Problems, and Research Challenges // Sensors. 2023. Vol. 23, № 19. ID 8238.
- [7] Матюшенко С.И. Анализ многоканальной системы обслуживания с ограниченным накопителем и переупорядочиванием заявок // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2010. № 19. С. 55–70.
- [8] Матюшенко С.И. Стационарные характеристики двухканальной системы обслуживания с переупорядочиванием заявок и с распределениями фазового типа // Информатика и ее применения. 2010. Т. 4, № 4. С. 67–71.
- [9] Матюшенко С.И. Анализ двухканальной системы массового обслуживания ограниченной емкости с буфером переупорядочивания и с распределениями фазового типа // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2010. № 4. С. 83–87.
- [10] Данник Е.С., Матюшенко С.И. Стационарные характеристики двухканальной многопоточковой системы массового обслуживания с переупорядочиванием заявок и с распределениями фазового типа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 1. С. 113–119.

- [11] Данник Е.С., Матюшенко С.И. Анализ двухканальной многопоточковой системы массового обслуживания с переупорядочиванием заявок и с распределениями фазового типа // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2014. № 2. С. 51–60.
- [12] Матюшенко С.И., Пяткина Д.А., Калениченко В.Н. Анализ времени пребывания заявок в многоканальной и экспоненциальной системе обслуживания с ограниченным накопителем и буфером переупорядочивания // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2016. № 1. С. 5–10.
- [13] Matyushenko S., Ermolayeva A. On stationary characteristics of a multiserver exponential queuing system with reordering of requests // 13th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT).. 2021. Pp. 98–103.
- [14] Matyushenko S.I., Zaryadov I.S. On the Algorithmization of Construction of the Transition Intensity Matrix in Systems with a Large Number of Same Elements // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2023. № 4. (to appear)
- [15] Матюшенко С.И., Самуйлов К.Е. Преобразование Лапласа–Стилтьеса функции распределения пикового возраста информации в группе передачи, моделируемой двухузловой сетью // Управление большими системами. 2024. № 1. (в печати)
- [16] Матюшенко С.И. Преобразование Лапласа–Стилтьеса пикового возраста информации в двухузловой группе передачи, моделируемой системой с распределениями фазового типа и инверсионной дисциплиной обслуживания с прерываниями // Системы и средства информатики. 2024. № 1. (в печати)
- [17] Гайдамака Ю.В., Матюшенко С.И. Преобразование Лапласа–Стилтьеса функции распределения пикового возраста информации в двухузловой группе передачи, моделируемой системой РН/РН/1/1 с обновлением очереди // Информатика и ее применения. 2024. № 1. (в печати)
- [18] Matyushenko S.I., Samouylov K.E., Frolov K.V. Distribution of the Peak Age of Information in a Two-Node Transmission Group Modeled by a System with a Group Flow and a Phase-Type Service Time // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2024. № 1. (to appear)
- [19] Matyushenko S.I., Samouylov K.E., Gritsenko N.Yu. Analysis of a Queuing System of a Single Capacity with Phase-type Distributions and Queue Updating // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2024. № 1. (to appear)
- [20] Матюшенко С.И. Преобразование Лапласа–Стилтьеса функции распределения пикового возраста информации в многоканальной группе передачи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2024. № 1. (в печати)

- [21] Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
- [22] Наумов В.А. О предельных вероятностях полумарковского процесса // Современные задачи в точных науках. М.: Университет дружбы народов, 1975. С. 35–39.

Образец цитирования

Матюшенко С.И., Самуилов К.Е. Стационарное распределение пикового возраста информации в двухканальной группе передачи, моделируемой системой обслуживания с переупорядочиванием заявок и с распределениями фазового типа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 1. С. 17–36. <https://doi.org/10.26456/vtprmk700>

Сведения об авторах

1. Матюшенко Сергей Иванович

доцент кафедры теории вероятностей и кибербезопасности Российского университета дружбы народов.

Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, РУДН.

E-mail: matyushenko-si@rudn.ru

2. Самуилов Константин Евгеньевич

заведующий кафедрой теории вероятностей и кибербезопасности Российского университета дружбы народов; ведущий научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление».

Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, РУДН.

E-mail: samuylov-ke@rudn.ru

**STATIONARY DISTRIBUTION OF THE PEAK AGE
OF INFORMATION IN A TWO-CHANNEL TRANSMISSION GROUP
MODELED BY A QUEUING SYSTEM WITH RESEQUENCE
OF APPLICATIONS AND WITH PHASE-TYPE DISTRIBUTIONS**

Matyushenko S.I.*, Samouylov K.E.**

*RUDN University, Moscow

**Federal Research Center “Computer Science and Control”,
Russian Academy of Sciences, Moscow

Received 20.12.2023, revised 27.01.2024.

This article continues the author’s cycle of works devoted to the problem of the Age of Information (AoI), a metric used in information systems for monitoring and managing remote sources of information from the control center. The paper considers a model of a transmission group consisting of an information source (sending node), a control center (receiving node) and two parallel communication channels between them. It is assumed that the channel capacities are different, and the network protocol requires that information entering the receiving node be read in the same sequence as it was transmitted from the sending node. As a result, packets that violate the established order are delayed at the receiving node for the time necessary to restore order. The information transfer process is modeled using a two-channel queuing system with a limited storage, reordering of applications and with phase-type distributions of generation and maintenance durations. At the same time, applications simulate packets of transmitted information, the system storage device is a queue of packets for transmission, the service of applications on devices is the process of transmitting packets over communication channels. As a result, expressions for the Laplace–Stieltjes transformation of the stationary distribution function and the initial moments of the maximum value of the information age, called the peak age, are obtained. A numerical study of the peak age of information at different system loads has been carried out for various special cases of phase-type distributions. The correctness of the analytical results is confirmed by the results of simulation modeling.

Keywords: peak age of information, queuing system, phase-type distribution, resequence of applications.

Citation

Matyushenko S.I., Samouylov K.E., “Stationary Distribution of the Peak Age of Information in a Two-Channel Transmission Group Modeled by a Queuing System with Resequencing of Applications and with Phase-Type Distributions”, *Vestnik TverGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 1, 17–36 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtprm700>

References

- [1] Sultan A., *Ultra Reliable and Low Latency Communications*, 2023, <https://www.3gpp.org/technologies/urllc-2022>.
- [2] Kaul S., Yates R., Gruteser M., “Real-time status: How often should one update?”, *Proceedings IEEE INFOCOM*, 2012, 2731–2735.
- [3] Costa M., Codreanu M., Ephremides A., “On the age of information in status update systems with packet management”, *IEEE Transactions on Information Theory*, **62**:4 (2016), 1897–1910.
- [4] Kaul S.K., Yates R.D., Gruteser M., “Status updates through queues”, *46th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS)*, 2012, 1–6, <https://ieeexplore.ieee.org/document/6310931>.
- [5] Kaul S., Gruteser M., Rai V., Kenney J., “Minimizing age of information in vehicular networks”, *8th Annual IEEE Communications Society Conference on Sensor, Mesh and Ad Hoc Communications and Networks*, 2011, 350–358.
- [6] Zhabankova E., Khakimov A., Markova E., Gaidamaka Y., “The Age of Information in Wireless Cellular Systems: Gaps, Open Problems, and Research Challenges”, *Sensors*, **23**:19 (2023), 8238.
- [7] Matyushenko S.I., “Analysis of a multichannel service system with limited storage and reordering of applications”, *Vestnik TverGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2010, № 19, 55–70 (in Russian).
- [8] Matyushenko S.I., “Stationary characteristics of a two-channel service system with reordering of applications and with phase-type distributions”, *Informatika i ee primeneniya [Computer science and its applications]*, **4**:4 (2010), 67–71 (in Russian).
- [9] Matyushenko S.I., “Analysis of a two-channel queuing system of limited capacity with a reordering buffer and with phase-type distributions”, *Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Matematika, informatika, fizika [Bulletin of the Peoples’ Friendship University of Russia. Series: Mathematics, Computer Science, Physics]*, 2010, № 4, 83–87 (in Russian).
- [10] Dannik E.S., Matyushenko S.I., “Stationary characteristics of a two-channel multithreaded queuing system with application reordering and phase-type distributions”, *Vestnik TverGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2014, № 1, 113–119 (in Russian).
- [11] Dannik E.S., Matyushenko S.I., “Analysis of a two-channel multithreaded queuing system with application reordering and phase-type distributions”, *Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Matematika, informatika, fizika [Bulletin of the Peoples’ Friendship University of Russia. Series: Mathematics, Computer Science, Physics]*, 2014, № 2, 51–60 (in Russian).

- [12] Matyushenko S.I., Pyatkina D.A., Kalenichenko V.N., “Analysis of the residence time of applications in a multichannel and exponential service system with a limited storage and reordering buffer”, *Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Matematika, informatika, fizika [Bulletin of the Peoples’ Friendship University of Russia. Series: Mathematics, Computer Science, Physics]*, 2016, № 1, 5–10 (in Russian).
- [13] Matyushenko S., Ermolayeva A., “On stationary characteristics of a multiserver exponential queuing system with reordering of requests”, *13th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*, 2021, 98–103.
- [14] Matyushenko S.I., Zaryadov I.S., “On the Algorithmization of Construction of the Transition Intensity Matrix in Systems with a Large Number of Same Elements”, *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, 2023, № 4 (to appear).
- [15] Matyushenko S.I., Samujlov K.E., “The Laplace-Stieltjes transformation of the distribution function of the peak age of information in a transmission group modeled by a two-node network”, *Upravlenie bolshimi sistemami [Managing large systems]*, 2024, № 1 (to appear) (in Russian).
- [16] Matyushenko S.I., “The Laplace–Stieltjes transformation of the peak age of information in a two-node transmission group modeled by a system with phase-type distributions and an inversion service discipline with interruptions”, *Sistemy i sredstva informatiki [Computer science systems and tools]*, 2024, № 1 (to appear) (in Russian).
- [17] Gajdamaka Yu.V., Matyushenko S.I., “Laplace–Stieltjes transformation of the distribution function of the peak age of information in a two-node transmission group modeled by the PH/PH/1/1 system with queue update”, *Informatika i ee primeneniya [Computer science and its applications]*, 2024, № 1 (to appear) (in Russian).
- [18] Matyushenko S.I., Samouylov K.E., Frolov K.V., “Distribution of the Peak Age of Information in a Two-Node Transmission Group Modeled by a System with a Group Flow and a Phase-Type Service Time”, *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, 2024, № 1 (to appear).
- [19] Matyushenko S.I., Samouylov K.E., Gritsenko N.Yu., “Analysis of a Queuing System of a Single Capacity with Phase-type Distributions and Queue Updating”, *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, 2024, № 1 (to appear).
- [20] Matyushenko S.I., “The Laplace-Stieltjes transformation of the peak age distribution function of information in a multichannel transmission group”, *Vestnik YuUrGU. Seriya: Vychislitel'naya matematika i informatika [Bulletin of SUSU. Series: Computational Mathematics and Computer Science]*, 2024, № 1 (to appear) (in Russian).

- [21] Bocharov P.P., Pechinkin A.V., *Teoriya massovogo obsluzhivaniya [Queuing theory]*, Publishing House of RUDN, Moscow, 1995 (in Russian), 529 pp.
- [22] Naumov V.A., “On the limiting probabilities of a semi-Markov process”, *Modern tasks in the exact sciences*, Peoples’ Friendship University, Moscow, 1975, 35–39 (in Russian).

Author Info

1. **Matyushenko Sergey Ivanovich**

Assistant Professor of Department of Probability Theory and Cyber Security, RUDN University.

Russia, 119992, Moscow, 6 Miklukho-Maklaya St., RUDN University.

E-mail: matyushenko-si@rudn.ru

2. **Samouylov Konstantin Evgenyevich**

Head of Department of Probability Theory and Cyber Security, RUDN University; Lead scientist at Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences.

Russia, 119992, Moscow, 6 Miklukho-Maklaya St., RUDN University.

E-mail: samuylov-ke@rudn.ru