УДК 534.26:539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОГО АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА НА УПРУГОМ НЕОДНОРОДНОМ ЦИЛИНДРЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Белкин А.Э., Бирюков Д.Р.
Тульский государственный университет, г. Тула

Поступила в редакцию 28.12.2023, после переработки 15.03.2024.

В статье поставлена задача о рассеянии конечного плоского нестационарного акустического импульса упругим неоднородным изотропным цилиндром, расположенном в идеальной жидкости. Для решения задачи использовано интегральное преобразование Фурье. Для решения задачи пространство разделяется на внешнюю область, в которой изображение искомой рассеянной волны ищется в виде бесконечного ряда с неизвестными коэффициентами, и внутреннюю область, содержащую упругий цилиндр, которая подвергается дискретизации. Решение системы линейных алгебраических уравнений, которая строится на основе конечно-элементной модели в соответствии с методом Галеркина, позволяет определить коэффициенты изображения рассеянной волны. Задача и алгоритм её решения представляют интерес для дальнейшего изучения возможности определения рассеянных волновых полей в случаях, когда не представляется возможным применять аналитические методы.

Ключевые слова: метод конечных элементов, система линейных уравнений, акустический импульс, нестационарная волна, упругий цилиндр, неоднородный цилиндр, изотропный цилиндр.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 1. С. 68–83.
https://doi.org/10.26456/vtpmk703

Введение

Решение задач дифракции акустических волн различных типов имеет как теоретическое, так и практическое значение. С одной стороны, исследование подобных задач позволяют глубже понять особенности распространения звука в неоднородных средах, его взаимодействия с телами сложной формы и выполненными из различных материалов. С другой стороны, решения задач дифракции звука на различных телах и в различных средах могут быть использованы для разработки технологий прикладных областей, в которых существенное значение имеют акустические эффекты. Широкое применение дифракционной теории на практике требует всё более точных математических моделей, которые описывают подобные процессы наиболее адекватно.

Решения задач по дифракции плоских, сферических и цилиндрических стационарных волн на упругих, в том числе анизотропных и неоднородных телах, получены в работах Толоконникова Л.А., Ларина Н.В., Скобельцына С.А. [9], [16], [17], [18], [19].

В случае тел сложной формы аналитическое решение задач дифракции может быть сильно затруднено или в принципе неосуществимо. Широкие возможности для исследования в таком случае даёт использование метода конечных элементов (МКЭ). Различные аспекты применения МКЭ изложены в монографии [22]. В работах [7], [20], [23] предложен подход, в котором во внешней области решение представляется в виде разложения по ортогональной системе гармоник. Поэтому искусственная внешняя граница рассматривается как поверхность, на которой устанавливаются обычные граничные условия согласования звуковых колебаний в двух областях: внешней, с аналитическим представлением волнового поля, и внутренней, в которой для решения используется конечно-элементная модель.

Несмотря на то, что в большинстве работ под задачей дифракции понимается стационарная задача, в реальности звуковую волну не всегда можно считать стационарной, так как и процесс излучения, и процесс дифракции длятся на протяжении конечных отрезков времени. Хотя нестационарные волны рассматриваются куда реже, чем гармонические, в ряде работ предлагался аналитический подход к задачам по дифракции нестационарных акустических импульсов. В качестве примеров можно привести работы Толоконникова Л.А., Гаева А.В. [1], [2], [3], [4], [5], [14], [15]. В этих работах звуковой импульс рассеивается неоднородной упругой оболочкой, разделяющей различные по параметрам жидкие среды.

В данной статье описывается метод конечных элементов, применяемый к задаче дифракции нестационарной акустической волны.

1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный упругий изотропный цилиндр радиуса R, окружённый идеальной жидкостью с равновесной плотностью ρ_0 и скоростью звука c. Введём прямоугольную декартову систему координат $(x, y,\ z)$ таким образом, что ось цилиндра совпадает и одинаково ориентирована с осью z. Свяжем с декартовой системой $(x, y,\ z)$ цилиндрическую систему координат $(r, \varphi,\ z)$. Полагаем, что плотность ρ и модули упругости λ и μ описываются непрерывными функциями декартовых координат x и y: $\rho = \rho\,(x, y)$, $\lambda = \lambda\,(x, y)$, $\mu = \mu\,(x, y)$.

Пусть из внешнего пространства на цилиндр падает плоский акустический импульс [10]

$$p_0 = f\,(ct + x) \cdot [H\,(ct + x) - H\,(c\,(t - t_0) + x)]\,, \qquad (1)$$

где f – заданная функция размерности давления; t_0 – длительность действия импульса; t – время; H – единичная функция Хевисайда. Используемый в работе метод накладывает на f следующие ограничения [8]: f должна быть абсолютно интегрируема на бесконечности, а также должна быть кусочно-непрерывной и иметь ограниченное изменение на каждом конечном отрезке.

Падающий импульс p_0 рассеивается цилиндром. Определим рассеянное акустическое поле. В рассматриваемой постановке задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты z.

2. Математическая модель дифракции акустического импульса на упругом цилиндре

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости описывается волновым уравнением [21]

$$\triangle p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

где p – давление полного акустического поля. При этом смещение $\overline{u}$ и скорость $\overline{v}$ частиц связаны с давлением p посредством формулы
$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p$

В силу линейности рассматриваемой задачи давление p представим в виде

$$p = p_s + p_0, \tag{3}$$

где p_s – давление рассеянного волнового поля.

Поля смещений $\overline{u}$ и напряжений σ в неоднородном изотропном цилиндре описываются общими уравнениями движения упругой среды, которые в декартовых координатах имеют вид

$$\nabla \cdot \sigma = \rho \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Используя обобщённый закон Гука [11] и соотношения, связывающие компоненты тензора деформаций с компонентами вектора смещений [11], компоненты тензора σ представляем в виде

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_y}{\partial y} & \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Подстановка (5) в (4) позволяет получить уравнения движения частиц цилиндра, записанные в компонентах смещения в декартовых координатах.

Граничные условия на поверхности цилиндра заключаются в равенстве нормальных ускорений частиц упругой среды и жидкости; равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления; отсутствии касательного напряжения:

$$\left.\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}\right|_{r=R} = -\frac{1}{\rho_0}\left.\left(\frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\partial p_s}{\partial r}\right)\right|_{r=R}, \tag{6}$$

$$\left.(\sigma \cdot \overline{n})\right|_{r=R} = -\left.(p_0 + p_s)\,\overline{n}\right|_{r=R}, \tag{7}$$

где $\overline{n}$ – нормаль к границе цилиндра; $\left.u_r\right|_{r=R} = \left.\overline{u}\right|_{r=R} \cdot \overline{n}$.

3. Применение интегрального преобразования

Применим для решения задачи интегральное преобразование Фурье [8] по времени t:

$$\hat{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{i\omega t} dt, \tag{8}$$

где ω – частота; размерность частоты обратна времени. В данной работе изображение объекта $X(t)$ будет обозначаться $\hat{X}(\omega)$. Подставляя (1) в (8) и используя теорему сложения для цилиндрических функций [8], получим изображение падающей волны

$$\hat{p}_0 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m F(\omega)\, J_m(kr)\, e^{im\varphi}, \tag{9}$$

где $k = k(\omega) = \frac{\omega}{c}$; функция $F(\omega) = \int_0^{t_0} f(ct)\, e^{i\omega t} dt$; J_m – функция Бесселя порядка m. Применяя преобразование Фурье (8) к волновому уравнению (2), получаем уравнение Гельмгольца, которому должно удовлетворять изображение $\hat{p}$:

$$\triangle \hat{p} + k^2 \hat{p} = 0. \tag{10}$$

Вследствие линейности задачи изображение рассеянной волны $\hat{p}_s$ является решением уравнения (10). С учётом условия на бесконечности [21], $\hat{p}_s$ ищется в виде

$$\hat{p}_s = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(\omega)\, (-i)^m F(\omega)\, H_m(kr)\, e^{im\varphi}, \tag{11}$$

где H_m – функция Ханкеля 1-ого рода порядка m; $A_m(\omega)$ – коэффициенты, подлежащие определению в процессе решения.

Применив преобразование (8) к уравнениям (4), получаем:

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} + \rho\omega^2 \hat{u} = 0, \tag{12}$$

где:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xx} & \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{xy} & \hat{\sigma}_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} & \mu\left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial x}\right) & (\lambda+2\mu)\frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{13}$$

и $\hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Применяя (8) к (6)-(7), имеем:

$$\omega^2 \hat{u}_r\big|_{r=R} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \hat{p}_0}{\partial r} + \frac{\partial \hat{p}_s}{\partial r}\right)\bigg|_{r=R}, \tag{14}$$

$$(\hat{\sigma}\cdot\overline{n})\big|_{r=R} = -\left(\hat{p}_0 + \hat{p}_s\right)\overline{n}\big|_{r=R}. \tag{15}$$

Рассеянная волна p_s определяется путём применения обратного преобразования Фурье [8] к формуле (11):

$$p_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(\omega)(-i)^m F(\omega) H_m(k(\omega) r) e^{im\varphi - i\omega t} d\omega. \qquad (16)$$

Определение поля p_s по формуле (14) осуществляется с помощью численного интегрирования на основе квадратурных формул, с заменой бесконечных пределов несобственного интеграла конечным. Значения пределов подбираются в зависимости от вида падающего импульса: спектральная плотность $F(\omega)$ конечного падающего импульса имеет численные значения, существенно отличные от нуля, лишь в небольшом диапазоне частот ω. Пределы интегрирования подбираются в соответствии с этим диапазоном в зависимости от требуемой точности. Точное суммирование бесконечных сумм в (14) является невозможным, вследствие чего сумма вычисляется приближённо с некоторой точностью:

$$p_s = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-M}^{M}\left[(-i)^m e^{im\varphi}\sum_{a=0}^{N} w_a A_m(\omega_a) F(\omega_a) H_m(k(\omega_a) r) e^{-i\omega_a t}\right], \qquad (17)$$

где $\{\omega_a\}_{a=0}^{N}$ – узлы сетки интегрирования на отрезке частот. $\{w_a\}_{a=0}^{N}$ – соответствующие веса, определяемые выбранным методом численного интегрирования. Коэффициенты $A_m(\omega_a)$ определяются для каждых $m = -M, \ldots, M$, $a = 0, \ldots, N$ с помощью метода конечных элементов.

4. Дискретизация области решения задачи

Здесь и далее, вследствие независимости величин от z, рассматривается сечение $z = 0$ (таким образом, в МКЭ будут использоваться двумерные элементы). Выделим круг Q радиусом $R_0 > R$, центр которого совпадает с центром координат. В области Q вводится конечно-элементная сетка, состоящая из N_{node} узлов и N_{el} элементов. Сетка строится таким образом, чтобы каждый элемент можно было однозначно отнести либо к жидкой области, либо к упругому цилиндру. Если один из 2 соседних элементов относится к жидкой области, другой – к упругой, то их общие узлы должны лежать на границе $r = R$. Формулы, приводимые в данной работе, не зависят от формы и порядка элементов сетки. При этом считается, что все элементы имеют одинаковый тип. Узлы имеют как глобальную нумерацию от 1 до N_{node}, так и локальную нумерацию внутри отдельного элемента от 1 до N_{loc}, где N_{loc} – число узлов каждого элемента. Номер $j-$го узла $\xi-$го элемента в глобальной нумерации будем обозначать $n^{(j\xi)}$.

В качестве неизвестных в Q рассматриваются изображение полного акустического поля $\hat{p}$ и изображения полей смещений $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$. Узловые значения данных полей в j-ом узле сетки обозначаются с помощью одного верхнего индекса: $\hat{p}^{(j)}$, $\hat{u}_x^{(j)}$, $\hat{u}_y^{(j)}$. Узловые значения полей в j-ом узле p-ого элемента обозначаются с помощью двух верхних индексов: $\hat{p}^{(j\xi)}$, $\hat{u}_x^{(j\xi)}$, $\hat{u}_y^{(j\xi)}$. Если j-ый узел лежит в упругом теле вне границы $r = R$, то $\hat{p}^{(j)} = 0$. Если, напротив, j-ый узел лежит в жидкости вне границы $r = R$, то $\hat{u}_x^{(j\xi)} = 0$, $\hat{u}_y^{(j\xi)} = 0$. Для узлов, лежащих на границе $r = R$, в общем случае все узловые значения неизвестных могут быть ненулевыми.

Каждый ξ-ый элемент снабжается локальной системой координат e_1, e_2, связанной с глобальной декартовой системой x, y посредством соотношений:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{N_{loc}} \begin{pmatrix} x^{(j\xi)} \\ y^{(j\xi)} \end{pmatrix} f_j\left(e_1, e_2\right), \tag{18}$$

где $x^{(j\xi)}$ и $y^{(j\xi)}$ – глобальные декартовы координаты узлов $j-$ого узла $\xi-$ого элемента; $\{f_j\}_{j=1}^{N_{loc}}$ – функции формы, набор которых зависит от выбранного типа и порядка элементов. Функции формы определяются как функции локальных координат, в этом представлении они имеют одинаковый вид для всех элементов сетки.

Неизвестные величины в каждом $\xi-$ом элементе представляются как линейные комбинации функций формы:

$$\begin{pmatrix} \hat{p}\left(e_1, e_2\right) \\ \hat{u}_x\left(e_1, e_2\right) \\ \hat{u}_y\left(e_1, e_2\right) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{N_{loc}} \begin{pmatrix} \hat{p}^{(j\xi)} \\ \hat{u}_x^{(j\xi)} \\ \hat{u}_y^{(j\xi)} \end{pmatrix} f_j\left(e_1, e_2\right). \tag{19}$$

При необходимости дифференцирования функций формы f_j по глобальным координатам $x_1 = x$, $x_2 = y$ используется следующая формула:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial f_j}{\partial e_1}\frac{\partial e_1}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial f_j}{\partial e_2}\frac{\partial e_2}{\partial x_\alpha}. \tag{20}$$

Производные локальных координат e_1, e_2 по глобальным x_α, входящие в (20), вычисляются исходя из вида формулы (18). Дифференцируя (19) по глобальной координате x_α и подставляя в получившуюся формулу (20), получаем формулы производных неизвестных по глобальным координатам:

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial x_\alpha} = \sum_{j=1}^{N_{loc}} \hat{q}^{(j\xi)} \left(\frac{\partial f_j}{\partial e_1}\frac{\partial e_1}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial f_j}{\partial e_2}\frac{\partial e_2}{\partial x_\alpha}\right), \tag{21}$$

где $\hat{q}$ – любая из неизвестных $\hat{p}$, $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$.

Итерация метода конечных элементов вызывается для каждого узлового значения частоты ω_a (см. формулу (17)). На каждой итерации для элементов сетки строятся локальные матрицы. Согласно методу конечных элементов [6], с помощью построенной сетки и дискретизированной формы уравнений, составляющих математическую постановку задачи, строится система линейных алгебраических уравнений. В матричной форме она записывается в виде

$$MU = G, \tag{22}$$

где M – матрица, состоящая из коэффициентов при узловых значениях неизвестных в дискретизированных уравнениях; G – вектор-столбец свободных членов в дискретизированных уравнениях; U – вектор-столбец значений всех узловых неизвестных. Матрица M и столбец G являются динамическими: в начале работы алгоритма МКЭ они нулевые и заполняются при обработке элементов сетки.

Для удобства описания алгоритма здесь и далее обращение к ячейкам M и G вместо численных индексов осуществляется через указание соответствующего строке/столбцу узла и неизвестной величины в формате $\left(\tilde{A} \mid \tilde{B}\right)$, где $\tilde{A}$ – номер узла в глобальной нумерации, $\tilde{B}$ – связанная со строкой/столбцом неизвестная. К примеру, индекс строки матрицы M, соответствующей неизвестной $\hat{u}_x$ в j–ом узле, запишем как $(j \mid \hat{u}_x)$.

5. Вклад упругого элемента в глобальную систему уравнений

Рассмотрим элемент E с номером ξ, расположенный в упругом цилиндре. Изображения смещений $\hat{u}$ в E удовлетворяет уравнению (12), которое перепишем в виде

$$\nabla \cdot (C \cdot \nabla \hat{u}) + \rho \omega_a^2 \hat{u} = 0, \tag{23}$$

где C – тензор упругости, построенный из коэффициентов при производных компонент $\hat{u}$ в формуле (13).

Пусть $\partial_R E$ – участок границы элемента E, находящийся на поверхности $r = R$. На $\partial_R E$ должны выполняться граничные условия (14)-(15). Для того, чтобы система уравнений не была переопределённой, модифицируем условие (14), введя на границе $r = R$ вектор дополнительных неизвестных $\overline{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_x & \delta_y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, которые при точном решении должны обращаться в ноль. Компоненты вектора $\overline{\delta}$ выражаются через узловые значения $\delta_x^{(j\xi)}$, $\delta_y^{(j\xi)}$ по формулам, аналогичным (19). Условия (14)-(15) на $\partial_R E$ запишем в виде:

$$\rho_0 \omega_a^2 \hat{u} \cdot \overline{n}\big|_{r=R} = \nabla \hat{p} \cdot \overline{n}\big|_{r=R}, \tag{24}$$

$$(C \cdot \nabla \hat{u}) \cdot \overline{n}\big|_{r=R} = -\left(\overline{\lambda} + \hat{p}\overline{n}\right)\big|_{r=R}. \tag{25}$$

Дискретизация уравнений, описывающих упругий элемент, выполняется в соответствии с методом Галеркина [13]. Для этого умножим уравнения (23)-(25) на координатную функцию f_j и проинтегрируем по соответствующим областям:

$$\int_E f_j \left[\nabla \cdot (C \cdot \nabla \hat{u}) + \rho \omega_a^2 \hat{u}\right] dS = 0, \tag{26}$$

$$\int_{\partial_R E} f_j \left[(C \cdot \nabla \hat{u}) \cdot \overline{n} + \overline{\delta} + \hat{p}\overline{n}\right] dL = 0, \tag{27}$$

$$\int_{\partial_R E} f_j \left[\rho_0 \omega_a^2 \hat{u}_r - \nabla \hat{p} \cdot \overline{n}\right] dL = 0, \tag{28}$$

где dS – элемент площади E; dL – элемент длины границы $\partial_R E$. Преобразуем уравнение (26), используя формулу градиента произведения из тензорного анализа [12], формулу Гаусса-Остроградского и уравнение (27). Получим:

$$\int_E \left[\nabla f_j \cdot (C \cdot \nabla \hat{u}) - f_j \rho_0 \omega_a^2 \hat{u}\right] dS + \int_{\partial_R E} f_j \left(\overline{\delta} + \hat{p}\overline{n}\right) dL = 0. \tag{29}$$

Представляя неизвестные в (28)-(29) в форме (19) и заменяя интегралы в данных уравнениях формулами численного интегрирования, получаем для каждого

$j = 1, \ldots, N_{loc}$ систему из 4-х линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений неизвестных.

Коэффициенты при $\hat{p}^{(q\xi)}$, $\hat{u}_x^{(q\xi)}$, $\hat{u}_y^{(q\xi)}$, $\delta_x^{(q\xi)}$, $\delta_y^{(q\xi)}$ в 1-ом уравнении, полученном из (29), прибавляются к содержимому ячеек на пересечении строки $\left(n^{(j\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_x\right)$ и столбца соответственно $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{p}\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_x\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_y\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{\delta}_x\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{\delta}_y\right)$ матрицы M. Свободный член данного уравнения прибавляется к содержимому ячейки $\left(n^{(j\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_x\right)$ столбца G. Коэффициенты при $\hat{p}^{(q\xi)}$, $\hat{u}_x^{(q\xi)}$, $\hat{u}_y^{(q\xi)}$, $\delta_x^{(q\xi)}$, $\delta_y^{(q\xi)}$ во 2-ом уравнении, полученном из (29), прибавляются к содержимому ячеек на пересечении строки $\left(n^{(j\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_y\right)$ и столбца соответственно $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{p}\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_x\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_y\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{\delta}_x\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{\delta}_y\right)$ матрицы M. Свободный член данного уравнения прибавляется к содержимому ячейки $\left(n^{(j\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_y\right)$ столбца G.

Коэффициенты при $\hat{p}^{(q\delta)}$, $\hat{u}_x^{(q\xi)}$, $\hat{u}_y^{(q\xi)}$, $\delta_x^{(q\xi)}$, $\delta_y^{(q\xi)}$ в 1-ом уравнении, полученном из (28), прибавляются к содержимому ячеек на пересечении строки $\left(n^{(j\xi)} \,\middle|\, \hat{\delta}_x\right)$ и столбца соответственно $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{p}\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_x\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_y\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{\delta}_x\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{\delta}_y\right)$ матрицы M. Свободный член данного уравнения прибавляется к содержимому ячейки $\left(n^{(j\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_x\right)$ столбца G. Коэффициенты при $\hat{p}^{(q\xi)}$, $\hat{u}_x^{(q\xi)}$, $\hat{u}_y^{(q\xi)}$, $\delta_x^{(q\xi)}$, $\delta_y^{(q\xi)}$ во 2-ом уравнении, полученном из (28), прибавляются к содержимому ячеек на пересечении строки $\left(n^{(j\xi)} \,\middle|\, \hat{\delta}_y\right)$ и столбца соответственно $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{p}\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_x\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_y\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{\delta}_x\right)$, $\left(n^{(q\xi)} \,\middle|\, \hat{\delta}_y\right)$ матрицы M. Свободный член данного уравнения прибавляется к содержимому ячейки $\left(n^{(j\xi)} \,\middle|\, \hat{u}_y\right)$ столбца G.

6. Вклад жидкого элемента в глобальную систему уравнений

Рассмотрим элемент E, расположенный в идеальной жидкости. Изображение давления $\hat{p}$ в E удовлетворяют уравнению (10). Дискретизация уравнений, описывающих жидкий элемент, выполняется в соответствии с методом Галеркина [13]. Для этого умножим уравнение (10) на координатную функцию f_j и проинтегрируем по площади элемента:

$$\int_E f_j \left[\nabla \cdot (\nabla \hat{p}) + k_a^2 \hat{p}\right] dS = 0, \tag{30}$$

где $k_a = k\left(\omega_a\right)$. Пусть $\partial_0 E$ – участок границы элемента E, находящийся на поверхности $r = R_0$ области Q. Так как построить сетку, состоящую из конечных элементов, для неограниченной области не представляется возможным, вне Q дискретизация не выполняется. Вследствие этого, изображение давления при $r > R_0$ представляется аналитическими формулами (9) и (11). Для соблюдения условия непрерывности акустического давления на поверхности $r = R_0$ требуется ввести граничные условия:

$$\hat{p}\big|_{r=R_0} = \left(\hat{p}_0 + \hat{p}_s\right)\big|_{r=R_0}, \tag{31}$$

$$\nabla \hat{p} \cdot \overline{n}\big|_{r=R_0} = \left(\frac{\partial \hat{p}_0}{\partial r} + \frac{\partial \hat{p}_s}{\partial r}\right)\bigg|_{r=R_0}. \tag{32}$$

Выражения в левых частях (31)-(32) выражаются через узловые значения на границе $r = R_0$, выражения в правых частях – по формулам (9) и (11). Подставляя (9) и (11) в (31), получим:

$$\sum_{\xi=1}^{N_{el}}\sum_{j=1}^{N_{loc}}\hat{p}^{(j\xi)}\upsilon_{j\xi}f_j = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-i)^m F(\omega_a)\left(J_m(k_aR_0)+A_m(\omega_a)H_m(k_aR_0)\right)e^{im\varphi}, \tag{33}$$

где $\upsilon_{j\xi} = 1$ в случае, если участок границы $\xi-$ого элемента, содержащий $j-$ый узел, лежит на поверхности $r = R_0$, и $\upsilon_{j\xi} = 0$ в противном случае. Учитывая ортогональность цилиндрических гармоник, проинтегрируем обе части (33) на $e^{-in\varphi}$ и проинтегрируем по окружности $r = R_0$. Выразив из полученного равенства $A_m(\omega_a)$, получим:

$$A_m(\omega_a) = -\frac{J_m(k_aR_0)}{H_m(k_aR_0)} + \frac{1}{2\pi(-i)^m R_0 F(\omega_a) H_m(k_aR_0)}\sum_{\xi=1}^{N_{el}}\sum_{j=1}^{N_{loc}}\hat{p}^{(j\xi)}\upsilon_{j\xi}\left\langle f_j, e^{-im\varphi}\right\rangle, \tag{34}$$

где:

$\left\langle f_j, e^{-im\varphi}\right\rangle = 2\pi R_0\int_0^{2\pi} f_j e^{-im\varphi}d\varphi.$

Подставляя (9), (11) и (34) в (32), получаем:

$$\begin{array}{c}\nabla\hat{p}\cdot\overline{n}\big|_{r=R_0} = \sum_{\xi=1}^{N_{el}}\sum_{j=1}^{N_{loc}}\left[\hat{p}^{(\beta\xi)}\upsilon_{\beta\xi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{k_aH_m'(k_aR_0)\left\langle f_j, e^{-im\varphi}\right\rangle}{2\pi R_0(-i)^m F(\omega_a)H_m(k_aR_0)}\right]+ \\ +k_a\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-i)^m F(\omega_a)e^{im\varphi}\left(J_m'(k_aR_0)-\frac{J_m(k_aR_0)H_m'(k_aR_0)}{H_m(k_aR_0)}\right)\end{array}. \tag{35}$$

Преобразуем уравнение (30), используя формулу градиента произведения из тензорного анализа [12] и формулу Гаусса-Остроградского. Обозначая $\partial_0 E$ участок границы элемента E, находящийся на поверхности $r = R_0$, и $\partial_R E$ участок границы элемента E, находящийся на поверхности $r = R$, получим:

$$\int_E\left[\nabla f_j\cdot\nabla\hat{p} - f_jk_a^2\right]dS - \int_{\partial_R E} f_j\nabla\hat{p}\cdot\overline{n}dL - \int_{\partial_0 E} f_j\nabla\hat{p}\cdot\overline{n}dL = 0. \tag{36}$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле в (36) преобразуется с помощью (35). Во втором интеграле (36) выполняется замена $\nabla\hat{p}\cdot\overline{n} = \rho_0\omega_a^2\hat{u}\cdot\overline{n}$ согласно граничному условию (14). Представляя неизвестные в (36) в форме (19) и заменяя интегралы в данном уравнении формулами численного интегрирования, получаем для каждого $j = 1,\ldots,N_{loc}$ линейное алгебраическое уравнение относительно узловых значений неизвестных. В отличие от уравнений для упругого элемента, в случае жидкости в уравнении (36) присутствуют узловые значения неизвестных для не входящих в текущий элемент узлов. Данная особенность присуща конечно-элементным моделям дифракционных процессов и является следствием формулы (35), которая включает узловые значения $\hat{p}^{(q)}$ для всех узлов границы $r = R_0$.

Коэффициенты при $\hat{p}^{(q)}$, $\hat{u}_x^{(q)}$, $\hat{u}_y^{(q)}$ в уравнении, полученном из (36), прибавляются к содержимому ячеек на пересечении строки $\left(n^{(j\xi)} \mid \hat{p}\right)$ и столбца соответственно $(q \mid \hat{p})$, $(q \mid \hat{u}_x)$, $(q \mid \hat{u}_y)$ матрицы M. Свободный член данного уравнения прибавляется к содержимому ячейки $\left(n^{(j\xi)} \mid \hat{p}\right)$ столбца G.

7. Решение задачи и определение рассеянной волны

Решение системы (22) позволяет определить все узловые значения неизвестных $\hat{p}^{(j)}$, $\hat{u}_x^{(j)}$, $\hat{u}_y^{(j)}$, $j = 1, \ldots, N_{node}$. Подставляя полученные значения $\hat{p}^{(j)}$ в формулу (34) для каждого $m = -M, \ldots, M$, определяем значения $A_m(\omega_a)$, $m = -M, \ldots, M$.

Используя описанный метод для каждого $a = 0, \ldots, N$, определяем рассеянную волну по формуле (17).

Заключение

Описанный метод решения задачи дифракции плоского звукового импульса на упругом цилиндре представляет интерес не только в качестве алгоритма решения частной задаче о рассеянии нестационарной волны, но также может служить для дальнейшего обобщения для решения задач с произвольной сколь угодно сложной конфигурацией упругих тел, расположенных в жидкости. Кроме того, метод конечных элементов и его описанная в статье вариация могут служить для исследования задач дифракции, для которых не представляется возможным использование аналитического подхода.

Список литературы

[1] Гаев А.В. Дифракция плоской нестационарной акустической волны на неоднородном трансверсально-изотропном сферическом слое // Известия ТулГУ. Серия: Информатика. 2001. Т. 7, № 3. С. 29–38.

[2] Гаев А.В. Дифракция сферической нестационарной акустической волны на неоднородном трансверсально-изотропном сферическом слое // Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. Сборник научных трудов. Тула: ТулГУ, 2003. С. 72–78.

[3] Гаев А.В. Нестационарное рассеяние плоского акустического импульса неоднородным трансверсально-изотропным цилиндрическим слоем // Известия ТулГУ. Серия: Информатика. 2002. Т. 8, № 3. С. 51–56.

[4] Гаев А.В. Рассеяние плоской нестационарной акустической волны на неоднородном анизотропном слое // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГУ, 2001. С. 72–73.

[5] Гаев А.В. Рассеяние сферической нестационарной акустической волны неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем // Известия ТулГУ. Серия: Механика. 2002. Т. 8, № 2. С. 58–64.

[6] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с.

[7] Иванов В.И., Скобельцын С.А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. № 2. С. 132–145.

[8] Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 223 с.

[9] Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70, № 4. С. 650–659.

[10] Метсавээр Я.А. Различение цилиндрических и сферических оболочек и определение их параметров по эхо-сигналам // III Всесоюзная акустическая конференция. М.: Б. и., 1973.

[11] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

[12] Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 263 с.

[13] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.

[14] Толоконников Л.А., Гаев А.В. Дифракция плоских и сферических акустических нестационарных импульсов на неоднородной трансверсально-изотропной сферической оболочке // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГУ, 2002. С. 143–145.

[15] Толоконников Л.А., Гаев А.В. Рассеяние плоской нестационарной акустической волны неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем // Оборонная техника. 2003. № 8. С. 72–76.

[16] Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде со сферической полостью, расположенной произвольным образом // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2011. № 2. С. 169–176.

[17] Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом эллиптическом цилиндре в вязкой среде // Прикладные задачи механики и газодинамики. 1997. С. 167–172.

[18] Толоконников Л.А., Скобельцын С.А., Ларин Н.В. О методе решения задач дифракции звуковых волн на упругих телах с неоднородными покрытиями // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: ТулГУ, 2009. С. 477–480.

[19] Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. № 2. С. 265–274.

[20] Скобельцын С.А. Подход к решению задач о рассеянии упругих волн с использованием МКЭ // Тезисы доклада международной научнной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: ТулГУ, 2004. С. 135–136.

[21] Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.

[22] Ihlenburg F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer Publishing Company, Inc., 2013. 226 p.

[23] Бирюков Д.Р. Алгоритм исследования гармонических колебаний в идеальной жидкости с абсолютно твёрдыми включениями с помощью метода конечных элементов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 2. С. 37–50.

[24] Бувайло Л.Е., Ионов А.В. Применение метода конечных элементов к исследованию виброакустических характеристик конструкций на высоких звуковых частотах // Акустический журнал. 1980. Т. 26, № 4. С. 502–507.

Образец цитирования

Белкин А.Э., Бирюков Д.Р. Решение задачи дифракции плоского акустического импульса на упругом неоднородном цилиндре с помощью метода конечных элементов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 1. С. 68–83. https://doi.org/10.26456/vtpmk703

Сведения об авторах

1. **Белкин Антон Эдуардович**
   аспирант кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.

   Россия, 300012, г. Тула, проспект Ленина, 95, ТулГУ.
   E-mail: antonedurd2020@mail.ru

2. **Бирюков Данила Русланович**
   аспирант кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.

   Россия, 300012, г. Тула, проспект Ленина, 95, ТулГУ.
   E-mail: danilabirukov@rambler.ru

SOLUTION OF THE PROBLEM OF DIFFRACTION OF A PLANE ACOUSTIC PULSE ON AN ELASTIC INHOMOGENEOUS CYLINDER USING THE FINITE ELEMENT METHOD

Belkin A.E., Biryukov D.R.
Tula State University, Tula

Received 28.12.2023, revised 15.03.2024.

The article poses the problem of scattering a finite plane non-stationary acoustic pulse by an elastic inhomogeneous isotropic cylinder located in an ideal fluid. To solve the problem, the integral Fourier transform was used. To solve the problem, the space is divided into an external region, in which the image of the desired scattered wave is sought in the form of an infinite series with unknown coefficients, and an internal region containing an elastic cylinder and subject to discretization. The solution of a system of linear algebraic equations, which is constructed on the basis of a finite element model in accordance with the Galerkin method, allows one to determine the image coefficients of the scattered wave. The problem and the algorithm for solving it are of interest for further study of the possibility of determining scattered wave fields in cases in which it is not possible to use analytical methods.

Keywords: finite element method, system of linear equations, acoustic pulse, unsteady wave, elastic cylinder, inhomogeneous cylinder, isotropic cylinder.

Citation

Belkin A.E., Biryukov D.R., “Solution of the problem of diffraction of a plane acoustic pulse on an elastic inhomogeneous cylinder using the finite element method”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 1, 68–83 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk703

References

[1] Gaev A.V., “Diffraction of a plane unsteady acoustic wave on an inhomogeneous transversally isotropic spherical layer”, *Izvestiya TulGU. Seriya: Informatika [News of TulSU. Series: Computer Science]*, **7**:3 (2001), 29–38 (in Russian).

[2] Gaev A.V., “Diffraction of a spherical unsteady acoustic wave on an inhomogeneous transversally isotropic spherical layer”, *Differentsialnye uravneniya i prikladnye zadachi. Sbornik nauchnykh trudov [Differential equations and applied problems. Collection of scientific papers]*, TulGU Publ., Tula, 2003, 72–78 (in Russian).

[3] Gaev A.V., "Nonstationary scattering of a plane acoustic pulse by an inhomogeneous transversally isotropic cylindrical layer", *Izvestiya TulGU. Seriya: Informatika [News of TulSU. Series: Computer Science]*, **8**:3 (2002), 51–56 (in Russian).

[4] Gaev A.V., "Scattering of a plane unsteady acoustic wave on an inhomogeneous anisotropic layer", *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii [Modern problems of mathematics, mechanics, and computer science: abstracts of the All-Russian Scientific Conference]*, TulGU Publ., Tula, 2001, 72–73 (in Russian).

[5] Gaev A.V., "Scattering of a spherical unsteady acoustic wave by an inhomogeneous transversally isotropic spherical layer", *Izvestiya TulGU. Seriya: Mekhanika [News of TulSU. Series: Mechanics]*, **8**:2 (2002), 58–64 (in Russian).

[6] Zenkevich O., *Metod konechnykh elementov v tekhnike [The finite element method in engineering]*, Mir Publ., Moscow, 1975 (in Russian), 543 pp.

[7] Ivanov V.I., Skobeltsyn S.A., "Modeling solutions to acoustics problems using FEM", *Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki [Proceedings of Tula State University. Natural sciences]*, 2008, № 2, 132–145 (in Russian).

[8] Krylov V.I., Skoblya N.S., *Metody priblizhennogo preobrazovaniya Fure i obrashcheniya preobrazovaniya Laplasa [Methods of approximate Fourier transform and inversion of the Laplace transform]*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (in Russian), 223 pp.

[9] Larin N.V., Tolokonnikov L.A., "Passage of a plane sound wave through an inhomogeneous thermoelastic layer", *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, **70**:4 (2006), 650–659 (in Russian).

[10] Metsaveer Ya.A., "Distinguishing cylindrical and spherical shells and determining their parameters by echo signals", *III Vsesoyuznaya akusticheskaya konferentsiya [III All-Union Acoustic Conference]*, No publ., Moscow, 1973 (in Russian).

[11] Novatskij V., *Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]*, Mir Publ., Moscow, 1975 (in Russian), 872 pp.

[12] Pobedrya B.E., *Lektsii po tenzornomu analizu [Lectures on tensor analysis]*, Moscow University Press, Moscow, 1986 (in Russian), 263 pp.

[13] Rektoris K., *Variatsionnye metody v matematicheskoj fizike i tekhnike [Variational methods in mathematical physics and technology]*, Mir Publ., Moscow, 1985 (in Russian), 589 pp.

[14] Tolokonnikov L.A., Gaev A.V., "Diffraction of plane and spherical acoustic unsteady pulses on an inhomogeneous transversally isotropic spherical shell", *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii [Modern problems of mathematics, mechanics, and computer science: abstracts of the All-Russian Scientific Conference]*, TulGU Publ., Tula, 2002, 143–145 (in Russian).

[15] Tolokonnikov L.A., Gaev A.V., "Scattering of a plane unsteady acoustic wave by an inhomogeneous transversally isotropic spherical layer", *Oboronnaya tekhnika [Defense equipment]*, 2003, № 8, 72–76 (in Russian).

[16] Tolokonnikov L.A., "Diffraction of a plane sound wave on an elastic spheroid with a spherical cavity located in an arbitrary manner", *Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki [Proceedings of Tula State University. Natural sciences]*, 2011, № 2, 169–176 (in Russian).

[17] Tolokonnikov L.A., "Diffraction of a plane sound wave on an elastic elliptical cylinder in a viscous medium", *Prikladnye zadachi mekhaniki i gazodinamiki [Applied problems of mechanics and gas dynamics]*, 1997, 167–172 (in Russian).

[18] Tolokonnikov L.A., Skobeltsyn S.A., Larin N.V., "On a method for solving problems of diffraction of sound waves on elastic bodies with inhomogeneous coatings", *Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii ≪Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki≫ [Materials of the international scientific conference "Modern problems of Mathematics, Mechanics, and Computer Science"]*, TulGU Publ., Tula, 2009, 477–480 (in Russian).

[19] Tolokonnikov L.A., "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with an inhomogeneous coating", *Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki [Proceedings of Tula State University. Natural sciences]*, 2013, № 2, 265–274 (in Russian).

[20] Skobeltsyn S.A., "An approach to solving problems of elastic wave scattering using FEM", *Tezisy doklada mezhdunarodnoj nauchnnoj konferentsii ≪Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki≫ [Abstracts of the report of the international scientific conference "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"]*, TulGU Publ., Tula, 2004, 135–136 (in Russian).

[21] Shenderov E.L., *Volnovye zadachi gidroakustiki [Wave problems of hydroacoustics]*, Shipbuilding Publ., Leningrad, 1972 (in Russian), 348 pp.

[22] Ihlenburg F., *Finite element analysis of acoustic scattering*, Springer Publishing Company, Inc., New York, 2013, 226 pp.

[23] Biryukov D.R., "Algorithm for Studying Harmonic Oscillations in an Ideal Fluid with Absolutely Solid Inclusions Using the Finite Element Method", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 2, 37–50 (in Russian).

[24] Buvajlo L.E., Ionov A.V., "Application of the finite element method to the study of vibroacoustic characteristics of structures at high sound frequencies", *Akusticheskij zhurnal [Acoustic Magazine]*, **26**:4 (1980), 502–507 (in Russian).

Author Info

1. **Belkin Anton Eduardovich**
Postgraduate student at the Department of Applied Mathematics and Informatics, Tula State University.

Russia, 300012, Tula, 95 Lenina av., Tula State University.
E-mail: antonedurd2020@mail.ru

2. **Biryukov Danila Ruslanovich**
Postgraduate student at the Department of Applied Mathematics and Informatics, Tula State University.

Russia, 300012, Tula, Prospekt Lenina, 95, Tula State University.
E-mail: danilabirukov@rambler.ru