МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 512.553.1

АРТИНОВЫ И НЕТЕРОВЫ МОДУЛИ ОТНОСИТЕЛЬНО КРУЧЕНИЯ И УСЛОВИЯ ОБРЫВА ЦЕПЕЙ СУЩЕСТВЕННЫХ ПОДМОДУЛЕЙ

Чернев А.М.
НИУ «МЭИ», г. Москва

Поступила в редакцию 30.08.2023, после переработки 12.12.2023.

В статье исследуются свойства артиновых и нетеровых модулей относительно кручения (идемпотентного радикала), связанные с условиями обрыва цепей существенных замкнутых подмодулей. Доказаны теоремы об эквивалентности условий обрыва цепей существенных подмодулей и артиновости/нетеровости для модулей с конечной размерностью Голди; об эквивалентности условия обрыва цепей существенных замкнутых подмодулей и условия артиновости/нетеровости фактора модуля по цоколю относительно кручения.

Ключевые слова: кручение, артинов модуль, нетеров модуль, существенный подмодуль, цоколь модуля относительно кручения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 1. С. 84–93.
https://doi.org/10.26456/vtpmk704

Введение

Радикалы и кручения (определение и основные свойства приведены в следующем разделе статьи) являются важным инструментом для исследования свойств колец и модулей. Один из способов их использования - разработка относительной структурной теории модулей. Под этим термином понимается следующее.

Как показал Т.Албу в [1], многие термины и факты теории модулей могут быть переформулированы в терминах теории решеток (частично упорядоченных множеств, в которых любые два элемента имеют точную верхнюю и нижнюю грани). Заменяя в этих определениях этих терминов и/или в формулировках теорем решетку всех подмодулей M на близкую к ней по свойствам решетку подмодулей, замкнутых относительно кручения, получаем новые объекты для изучения. Это направление исследований было продолжено в [2–4].

Перечисленными работами исследования в области относительной структурной теории модулей, разумеется, не исчерпываются. В частности, автором изучались относительные варианты размерностей Голди и Крулля [5, 6].

© Чернев А.М., 2024

В настоящей же статье исследуются вопросы, связанные с условиями обрыва цепей подмодулей, артиновыми и нетеровыми модулями относительно кручения.

Свойства нетеровости (обрыва строго возрастающих цепей идеалов/подмодулей) и артиновости (обрыва строго убывающих цепей идеалов/подмодулей) являются одними из наиболее фундаментальных в алгебре. Впервые сформулированные более века назад они до сих пор являются объектами интенсивных исследований. Ежегодно публикуются десятки работ, связанных с разнообразными вариантами условий обрыва цепей. Из последних работ можно указать, например, [7–10].

Среди различных вариаций артиновости и нетеровости исследовались и понятия артинова (нетерова) модуля относительно кручения, впервые введенные в [11].

1. Предварительные сведения о кручениях

Пусть R-Mod – категория левых модулей над ассоциативным кольцом с единицей R.

Определение 1. *Пусть в категории R-Mod определен функтор τ, ставящий каждому модулю M в соответствие его подмодуль $\tau(M)$, причем выполняются следующие условия:*

1. *для любого морфизма $f : M \longrightarrow N$ верно $f(\tau(M)) \subseteq \tau(N)$;*
2. *$\tau(\tau(M)) = \tau(M)$;*
3. *$\tau(M/\tau(M)) = 0$;*
4. *$\tau(N) = N \cap \tau(M)$ для любого подмодуля $N \subset M$.*

Тогда τ называется наследственным кручением *(наследственным идемпотентным радикалом) [12].*

Определение 2. *Модуль M, для которого $\tau(M){=}M$, называется* τ-радикальным (τ-torsion).

Определение 3. *Модуль M, для которого $\tau(M){=}0$, называется* τ-полупростым (τ-torsionfree).

Утверждение 1. Классы $\mathbb{T}$ - τ-радикальных модулей и $\mathbb{T}$ - τ-полупростых модулей относительно наследственного кручения τ обладают следующими свойствами:

1. $\mathbb{T}$ замкнут относительно подмодулей, гомоморфных образов, прямых сумм и расширений;
2. $\mathbb{F}$ замкнут относительно подмодулей, прямых произведений и расширений ;
3. $Hom(T, F){=}0$ для любых $T \in \mathbb{T}$, $F \in \mathbb{F}$.

Доказательство. Приведено в [12], предложение 2.1, стр. 14 и предложение 3.1(a), стр. 20. □

И наоборот, по паре классов $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$, удовлетворяющих условиям утверждения 1, можно построить наследственное кручение.

Дополнительные сведения о кручениях см. в [12, 13], в данной статье нам потребуются определения, связанные с τ-замкнутыми подмодулями.

Определение 4. *Подмодуль N модуля M называется* τ-плотным (τ-dense), *если M/N τ-радикальный;* τ-замкнутым (τ-closed) *(в [13] употребляется термин τ-pure), если M/N τ-полупростой.*

Определение 5. τ-замыканием *подмодуля N в модуле M называется минимальный τ-замкнутый подмодуль, содержащий N.*

τ-замыкание подмодуля N в модуле M обозначается $[N]^c_M$ (или $[N]^c$, если M определяется по контексту).

Утверждение 2. Множество $C_\tau(M)$ τ-замкнутых подмодулей M является модулярной решеткой относительно операций $K \cap L$ и $[K + L]^c$.

Доказательство. Приведено в [13], prop. 6.11, стр. 57. $\square$

Определение 6. *Подмодуль N модуля M называется* существенным *($N \subseteq_{es} M$), если для любого ненулевого подмодуля L выполняется условие $N \cap L \neq 0$.*

Определение 7. *Модуль называется* τ-артиновым *(соотв.* τ-нетеровым*), если* строго убывающая *(соотв.* строго возрастающая*) цепь его τ-замкнутых подмодулей конечна.*

Понятие цоколя модуля относительно кручения впервые введено в [14].

Определение 8. *τ-полупростой модуль M называется* τ-критическим*, если $C_\tau(M) = \{0; M\}$.*

Определение 9. τ-цоколем *τ-полупростого модуля M ($Soc_\tau(M)$)называется τ-замыкание суммы τ-критических подмодулей M. Если модуль M не является τ-полупростым, то* τ-цоколь *определяется как полный прообраз $Soc_\tau(M/\tau(M))$ при естественном эпиморфизме $M \longrightarrow M/\tau(M)$.*

Утверждение 3. Для произвольного модуля M и кручения τ следующие утверждения эквивалентны:

1. $Soc_\tau(M) = M$;
2. $C_\tau(M)$ является решеткой с дополнениями и любой τ-замкнутый подмодуль $N \subset M$, не являющийся τ-радикальным, содержит τ-критический подмодуль K;
3. для каждого τ-замкнутого подмодуля $N \subset M$ существует τ-критический K такой, что $N \cap K = \tau(M)$.

Доказательство. Приведено в [13], prop.25.10, стр. 238. $\square$

Далеее это утверждение потребуется нам в другой, более удобной для использования форме.

Утверждение 4. τ-полупростой модуль совпадает со своим τ-цоколем тогда и только тогда, когда не существует τ-замкнутого $N \subset_{es} M$.

Доказательство. Непосредственно следует из утверждения 3. □

2. Артиновы и нетеровы модули относительно кручения

Утверждение 5. Если модуль M является τ-артиновым (или τ-нетеровым), то $M/\tau(M)$ имеет конечную размерность Голди.

Доказательство. Предположим, что $M/\tau(M)$ имеет бесконечную размерность Голди. Тогда он содержит бесконечное число прямых слагаемых, т.е. $\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i \subseteq M/\tau(M)$.

Рассмотрим цепочки подмодулей $M/\tau(M)$: $A_k = \bigoplus_{i<k} M_i$ и $B_k = \bigoplus_{i>k} M_i$. Имеем строго возрастающую цепочку подмодулей $0 = A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_k \subset ...$ и строго убывающую цепочку подмодулей $M/\tau(M) \supseteq B_1 \supset B_2 \supset ... \supset B_k \supset ...$.

Обозначим через $\widetilde{A_k}$ и $\widetilde{B_k}$ прообразы A_k и B_k при естественном эпиморфизме $M \longrightarrow M/\tau(M)$. $[\widetilde{A_i}]^c \neq [\widetilde{A_j}]^c$ при $i \neq j$. Действительно, пусть $i < j$, но $[\widetilde{A_i}]^c = [\widetilde{A_j}]^c$. Тогда $\widetilde{A_j}/\widetilde{A_i}$ – τ-радикальный модуль, поэтому при морфизме в $M/\tau(M)$ переходит в 0. Следовательно, $A_i = A_j$. Полученное противоречие показывает, что $\{[\widetilde{A_i}]^c\}$ строго возрастающая цепочка τ-замкнутых подмодулей и модуль M не является τ-нетеровым.

Аналогичное рассуждение для $\{[\widetilde{B_i}]^c\}$ показывает, что модуль M не является τ-артиновым. □

Поскольку решетки $C_\tau(M)$ и $C_\tau(M/\tau(M))$ изоморфны, то из утверждения 3 следует, что τ-полупростой τ-артинов (τ-нетеров) модуль имеет конечную размерность Голди.

Утверждение 6. Если в τ-полупростом модуле M любая строго возрастающая (соотв. убывающая) цепь τ-замкнутых *существенных* подмодулей имеет конечную длину, то это остается верным для любого подмодуля и фактормодуля модуля M.

Доказательство. Схема доказательства для убывающих и возрастающих цепей одинакова, поэтому рассмотрим только случай возрастающих цепей.

1. Докажем утверждение для произвольного подмодуля $N \subset M$. Рассмотрим сначала случай τ-замкнутого подмодуля. Пусть $N \subset M$ и $[N]^c = N$.

Если $N \subset_{es} M$, то любой τ-замкнутый подмодуль модуля N будет τ-замкнутым подмодулем M; любой существенный подмодуль модуля N будет существенным подмодулем M. Т.о., утверждение тривиально.

Если N не является существенным подмодулем M, то выберем τ-замкнутый L такой, что $(N \bigoplus L) \subseteq_{es} M$.

Предположим, что имеется строго возрастающая бесконечная последовательность τ-замкнутых существенных подмодулей модуля N, $0 = N_1 \subset N_2 \subset ... \subset N_k \subset ...$ Подмодули $[N_i \bigoplus L]^c$ будут существенными в M и, поскольку $\tau((N_{n+1} \bigoplus L)/(N_n \bigoplus L)) = \tau(N_{n+1}/N_n) = 0$, последовательность

$0=[N_1 \bigoplus L]^c \subset [N_2 \bigoplus L]^c \subset ... \subset [N_k \bigoplus L]^c \subset ...$ строго возрастающая. Полученное противоречие показывает, что N_i имеет конечную длину.

2. Пусть теперь $N \subset M$ не является τ-замкнутым. Из п.1 доказательства следует, что конечна строго возрастающая цепь τ-замкнутых существенных подмодулей $[N]^c$. Так как решетки τ-замкнутых подмодулей для модуля $[N]^c$ и его τ-плотного подмодуля N изоморфны, условие обрыва цепей верно и для N.

3. Докажем утверждение для фактормодуля M/N. Предположим, что имеется строго возрастающая бесконечная последовательность τ-замкнутых существенных подмодулей модуля M/N, $0=K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_k \subset ...$. Их полные прообразы при естественном эпиморфизме $M \longrightarrow M/N$ будут τ-замкнутыми существенными подмодулями M, и из $K_i \neq K_j$ при $i \neq j$ следует $K_i^{-1} \neq K_j^{-1}$. □

Теорема 1. *Пусть модуль M является τ-полупростым. Тогда из условий:*

1. *Модуль M имеет конечную размерность Голди;*
2. *Любая строго убывающая (соотв. возрастающая) цепь τ-замкнутых существенных подмодулей M имеет конечную длину;*

следует, что

3. *Любая строго убывающая (соотв. возрастающая) цепь τ-замкнутых подмодулей M имеет конечную длину.*

Доказательство. Докажем теорему для возрастающих цепей (для убывающих цепей доказательство аналогично).

Предположим, что в M существует бесконечная строго возрастающая цепь τ-замкнутых подмодулей $0=N_1 \subset N_2 \subset ... \subset N_k \subset ...$. Разобьем $\mathbb{N}$ на классы эквивалентности, положив $i \sim j$, если $N_i \subseteq_{es} N_j$ или $N_j \subseteq_{es} N_i$. Модули, принадлежащие одному классу эквивалентности, образуют строго возрастающую цепь. При этом каждый модуль является существенным и τ-замкнутым в объединении всех модулей данного класса. В соответствии с утверждением 5, количество модулей в каждом классе эквивалентности, конечно. Таким образом, количество классов эквивалентности, бесконечно. Выбрав по одному модулю K_i из каждого класса, получим бесконечную строго возрастающую цепь τ-замкнутых подмодулей $0=K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_i \subset ...$, каждый из которых не является существенным в следующем. Следовательно, найдутся ненулевые L_i, для которых $K_i \bigoplus L_i \subseteq K_{i+1}$.

Таким образом, $\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i \subseteq M$, что противоречит предположению о конечной размерности Голди M. □

Обратное утверждение тоже верно (см. Утверждение 5).

Утверждение 7. Пусть M – τ-полупростой модуль, в котором любая строго возрастающая (соотв. строго убывающая) цепь подмодулей имеет конечную длину. Тогда сумма τ-замкнутых подмодулей M, каждый из которых не равен своему τ-цоколю, может содержать лишь конечное число слагаемых.

Доказательство. Предположим, что такая бесконечная прямая сумма $\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ существует. Без ограничения общности можно считать, что $\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_i \subseteq_{es} M$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ выберем τ-замкнутый существенный $P_i \subset_{es} Q_i$ (это можно сделать по утверждению 4). Рассмотрим возрастающую цепь τ-замкнутых существенных подмодулей M

$$\{U_k = [(\bigoplus_{i<k} P_i) \bigoplus (\bigoplus_{i\geqslant k} Q_i)]^c\}$$

и убывающую цепь τ-замкнутых существенных подмодулей M

$$\{V_k = [(\bigoplus_{i<k} Q_i) \bigoplus (\bigoplus_{i\geqslant k} P_i)]^c\}.$$

Найдется $i \in \mathbb{N}$, для которого $U_k = U_{k+1}$ (соотв. $V_k = V_{k+1}$). Получаем, что $[P_k]^c = Q_k$, что противоречит выбору P_k. $\square$

Теорема 2. *Пусть M – τ-полупростой модуль. Тогда любая строго возрастающая (соотв. убывающая) цепь τ-замкнутых существенных подмодулей имеет конечную длину тогда и только тогда, когда модуль $M/Soc_\tau(M)$ τ-нетеров (соотв. артинов).*

Доказательство. Рассмотрим случай возрастающих цепей и τ-нетеровости $M/Soc_\tau(M)$.

Предположим, что $M/Soc_\tau(M)$ τ-нетеров. Рассмотрим строго возрастающую цепь τ-замкнутых существенных подмодулей M $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset ....$ Для любого $i \in \mathbb{N}$ верно $Soc_\tau(M) \subseteq M_i$, поэтому при каноническом эпиморфизме данная цепь переходит в строго возрастающую цепь τ-замкнутых подмодулей $M/Soc_\tau(M)$, что противоречит предположению о его τ-нетеровости.

Для доказательства обратного найдем подмодуль K такой, что $[Soc_\tau(M) \bigoplus K]^c \subseteq_{es} M$. Модуль $M/[Soc_\tau(M) \bigoplus K]^c$ является τ-нетеровым, поскольку полный прообраз любого его τ-замкнутого подмодуля при естественном эпиморфизме $M \longrightarrow M/[Soc_\tau(M) \bigoplus K]^c$ является τ-замкнутым существенным подмодулем модуля M.

Модуль $[Soc_\tau(M) \bigoplus K]^c/Soc_\tau(M)$ также является τ-нетеровым. Действительно, $Soc_\tau([Soc_\tau(M) \bigoplus K]^c/Soc_\tau(M)) = 0$, следовательно, по утверждению 5, он имеет конечную размерность Голди. Из теоремы 1 вытекает, что модуль $[Soc_\tau(M) \bigoplus K]^c/Soc_\tau(M)$ – τ-нетеров.

Итак, и модуль $M/[Soc_\tau(M) \bigoplus K]^c$, и модуль $[Soc_\tau(M) \bigoplus K]^c/Soc_\tau(M)$ являются τ-нетеровыми. Следовательно, $M/Soc_\tau(M)$ – также τ-нетеров.

Доказательство для случая убывающих цепей и τ-артиновости $M/Soc_\tau(M)$ проводится аналогично. $\square$

Заключение

В работе рассматривается связь нетеровости/артиновости модуля относительно кручения (наследственного идемпотентого радикала) τ с условиями обрыва цепей существенных τ-замкнутых подмодулей.

Приведена вводная информация о кручениях, замкнутых относительно кручения подмодулях, цоколе модуля относительно кручения.

Доказано, что для τ-полупростого модуля конечномерность по Голди и выполнение условия обрыва возрастающих (соотв. убывающих) цепей τ-замкнутых существенных подмодулей равносильно τ-нетеровости (соотв. τ-артиновости).

Доказано, что для τ-полупростого модуля выполнение условия обрыва цепей возрастающих (соотв. убывающих) цепей τ-замкнутых существенных подмодулей равносильно τ-нетеровости (соотв. τ-артиновости) фактормодуля по τ-цоколю.

Список литературы

[1] Albu T. Chain Conditions in Modular Lattices with Applications to Grothendieck Categories and Torsion Theories. Monograph Series of the Parana's Mathematical Society, Maringa, Parana, Brasil. 2015.

[2] Albu T., Iosif M. New results on C11 and C12 lattices, with applications to Grothendieck categories and torsion theories // Frontiers of Mathematics in China. 2016. Vol. 11. Pp. 815–828.

[3] Durgun Y., Cobankaya A. Proper classes generated by τ-closed submodules // Analele Universitatii Ovidius Constanta - Seria Matematica. 2019. Vol. 27, № 3. Pp. 83–95.

[4] Albu T. The Osofsky-Smith theorem in rings, modules, categories, and lattices // Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie. Nouvelle Serie. 2022. Vol. 65(113), № 4. Pp. 371–387.

[5] Чернев А.М. О модулях с конечной размерностью Голди и относительной размерностью Крулля // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1996. № 5. С. 98–101.

[6] Чернев А.М. Нильпотентность первичного радикала в PI-кольцах, имеющих точный модуль с относительной размерностью Крулля // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3, № 4. С. 1229–1237.

[7] Davoudian M. Modules with chain condition on uncountably generated submodules // Journal of Algebra and its Applications. 2023. Vol. 22, № 6. ID 2350134. https://doi.org/10.1142/S0219498823501347

[8] Chaturvedi A.K., Kumar N. On modules with chain condition on non-small submodules // International Electronic Journal of Algebra. 2023. Vol. 33. Pp. 109–124.

[9] Chaturvedi A.K, Prakash S. Properties of modules and rings satisfying certain chain conditions // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. 2023. Vol. 47, № 1. Pp. 35–48.

[10] Chaturvedi A.K, Prakash S. Some variants of ascending and descending chain conditions // Communications in Algebra. 2021. Vol. 49, № 10. Pp. 4324–4333.

[11] Golan J.S. Modules satisfying both chain conditions with respect to a torsion theory // Proceedings of the American Mathematical Society. 1975. Vol. 52. Pp. 103–108.

[12] Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. Кишинев: Штиинца, 1983.

[13] Golan J.S. Torsion theories. Essex, New York: Longman Scientific and Technical, Wiley, 1986.

[14] Bueso J.L., Jara P. A Generalization of Semisimple Modules // Methods in Ring Theory. Vol. 129. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1984. Pp. 53–65.

Образец цитирования

Чернев А.М. Артиновы и нетеровы модули относительно кручения и условия обрыва цепей существенных подмодулей // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 1. С. 84–93. https://doi.org/10.26456/vtpmk704

Сведения об авторах

1. **Чернев Андрей Михайлович**
старший преподаватель кафедры высшей математики Национального исследовательского университета «МЭИ».

Россия, 111250, Россия, г. Москва, ул. Краснoказарменая, д.17, Б-308.
E-mail: chernev@mail.ru

ON ARTINIAN AND NOETERIAN MODULES RELATIVE TO A TORSION THEORY AND ACC/DCC ON ESSENTIAL SUBMODULES

Chernev A.M.
MPEI, Moscow

Received 30.08.2023, revised 12.12.2023.

The paper concern on the properties of Artinian and Noeterian modules relative to a torsion theory. It is shown that ACC (resp. DCC) on essential submodules equivalents that a module is Artinian (resp. Noeterian), for modules with finite Goldie dimension. It is shown that ACC (resp. DCC) on essential closed submodules equivalents factor on relative socle is Artinian (resp. Noeterian).

Keywords: torsion theory, Artinian module, Noeterian module, socle of module relative to a torsion theory.

Citation

Chernev A.M., "On Artinian and Noeterian modules relative to a torsion theory and ACC/DCC on essential submodules", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 1, 84–93 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk704

References

[1] Albu T., *Chain Conditions in Modular Lattices with Applications to Grothendieck Categories and Torsion Theories*, Monograph Series of the Parana's Mathematical Society, Maringa, Parana, Brasil, 2015.

[2] Albu T., Iosif M., "New results on C11 and C12 lattices, with applications to Grothendieck categories and torsion theories", *Frontiers of Mathematics in China*, **11** (2016), 815–828.

[3] Durgun Y., Cobankaya A., "Proper classes generated by τ-closed submodules", *Analele Universitatii Ovidius Constanta - Seria Matematica*, **27**:3 (2019), 83–95.

[4] Albu T., "The Osofsky-Smith theorem in rings, modules, categories, and lattices", *Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie. Nouvelle Serie*, **65(113)**:4 (2022), 371–387.

[5] Chernev A.M., "On modules with finite Goldie dimension and relative Krull dimension", *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika [Bulletin of the Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics]*, 1996, № 5, 98–101 (in Russian).

[6] Chernev A.M., “The nilpotence of the primary radical in PI rings having an exact modulus with relative Krull dimension”, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika [Fundamental and Applied Mathematics]*, **3**:4 (1997), 1229–1237 (in Russian).

[7] Davoudian M., “Modules with chain condition on uncountably generated submodules”, *Journal of Algebra and its Applications*, **22**:6 (2023), 2350134, https://doi.org/10.1142/S0219498823501347.

[8] Chaturvedi A.K., Kumar N., “On modules with chain condition on non-small submodules”, *International Electronic Journal of Algebra*, **33** (2023), 109–124.

[9] Chaturvedi A.K, Prakash S., “Properties of modules and rings satisfying certain chain conditions”, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **47**:1 (2023), 35–48.

[10] Chaturvedi A.K, Prakash S., “Some variants of ascending and descending chain conditions”, *Communications in Algebra*, **49**:10 (2021), 4324–4333.

[11] Golan J.S., “Modules satisfying both chain conditions with respect to a torsion theory”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **52** (1975), 103–108.

[12] Kashu A.I., *Radikaly i krucheniya v modulyakh [Radicals and torsions in modules]*, Stiinets Publ., Chisinau, 1983 (in Russian).

[13] Golan J.S., *Torsion theories*, Longman Scientific and Technical, Essex; Wiley, New York, 1986.

[14] Bueso J.L., Jara P., “A Generalization of Semisimple Modules”, *Methods in Ring Theory.* V. 129, Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984, 53–65.

Author Info

1. **Chernev Andrey Mikhaylovich**
   Senior Lecturer at the Department of Higher Mathematics, National Research University «Moscow Power Engineering Institute».

   Russia, 111250, Moscow, ul.Krasnokazarmennaya, 17, B-308.
   E-mail: chernev@mail.ru