УДК 519.216.8

РАЗЛОЖЕНИЕ БАНАХОВОЗНАЧНЫХ СЕМИМАРТИНГАЛОВ

Лаврентьев В.В.
Лаборатория статистического анализа,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Поступила в редакцию 09.02.2010, после переработки 20.02.2010.

В данной работе уточняется структура семимартингалов, принимающих значения в сепарабельном банаховом пространстве, с помощью предсказуемого процесса локально ограниченной вариации, локально квадратично интегрируемого мартингала и стохастического интеграла по целочисленной случайной мере скачков.

In this paper clarifies the structure of semimartingales taking values in a separable Banach space, with a predictable process of locally bounded variation, locally square integrable martingale and stochastic integral with integer random measure of jumps.

Ключевые слова: семимартингал, мартингал, банахово пространство.
Keywords: semimartingale, martingale, Banach space.

Введение

Мартингалы и семимартингалы стали одним из основных предметов исследования в теории случайных процессов, полученные результаты используются в финансовой и страховой математике [1]. Естественным обобщением являются семимартингалы со значениями в банаховом пространстве.

Пусть $(\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}))$ - банахово пространство с σ -алгеброй борелевских множеств (относительно сильной топологии, порожденной нормой $\|.\|$). Через $\mathbb{H}^*$ будем обозначать пространство сопряженное с $\mathbb{H}$ и $(h, h^*) = h^*(h)$, $\quad h \in \mathbb{H}, \quad h^* \in \mathbb{H}^*$.

Напомним [2], что банахово пространство $\mathbb{H}$ имеет свойство Радона-Никодима, если для любого измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ и любой $\mathbb{H}$-значной меры m, которая имеет ограниченную вариацию абсолютно непрерывную относительно меры μ, существует $\mathbb{H}$-значная интегрируемая (по Бохнеру) функция f такая, что

$$m(A) = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - полное вероятностное пространство и в нем семейство σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, удовлетворяющее обычным условиям полноты, неубывания и непрерывности справа. Пусть $X = (X_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ - семимартингал, принимающий значения в банаховом пространстве $\mathbb{H}$, т.е.

$$X_t = X_0 + M_t + V_t, \tag{1}$$

где M - локальный мартингал $(\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{H})), V$ - процесс локально ограниченной вариации $(\mathcal{V}_{loc}(\mathbb{H}))$.

Обозначим через $\mu = \mu\,(dt, dx)$ целочисленную случайную меру скачков семимартингала X:

$$\mu\,((0,t],\Gamma) = \sum_{0<s\le t} I\,(\Delta X_s \in \Gamma)\,, \quad \Gamma \in \mathcal{B}\,(\mathbb{H}\setminus\{0\})\,. \tag{2}$$

Основным результатом этой статьи является следующее уточнение структуры семимартингала.

Теорема

Для семимартингалов, принимающих значения в сепарабельном банаховом пространстве со свойством Радона-Никодима (в частности, в рефлексивном пространстве), справедливо следующее разложение:

$$X_t = X_0 + B_t^a + M_t^a + \int_0^t \int_{\|x\|>a} x\,\mu\,(ds, dx) \tag{3}$$

с предсказуемым процессом $B^a = (B_t^a, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ *из класса процессов локально интегрируемой вариации* $\mathcal{A}_{loc}(\mathbb{H})$ *и локально квадратично интегрируемым мартингалом* $M^a \in \mathcal{M}_{loc}^2\,(\mathbb{H})$. *В отличии от (1) такое представление единственно.*

Доказательство теоремы.

Положим для некоторого $a > 0$

$$X_t^a = X_0 + \sum_{s\le t} \Delta X_s I\,(\|\Delta X_s\| > a)\,, \tag{4}$$

тогда

$$X^a = (X_t^a, \mathcal{F}_t; \mathbb{H}) \in \mathcal{V}_{loc}\,(\mathbb{H})\,,$$

процесс $X - X^a$ также является семимартингалом и имеет ограниченные скачки. Более того, справедливо следующее утверждение, из которого следует существенная часть утверждений теоремы.

Лемма 1

Пусть сепарабельное банахово пространство $\mathbb{H}$ *имеет свойство Радона-Никодима, тогда процесс* $X - X^a$ *допускает представление*

$$X - X^a = B^a + M^a \tag{5}$$

с предсказуемым процессом $B^a = (B_t^a, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ *из класса процессов локально интегрируемой вариации* $\mathcal{A}_{loc}(\mathbb{H})$ *и локально квадратично интегрируемым мартингалом* $M^a \in M_{loc}^2\,(\mathbb{H})$. *При этом*

$$\|\Delta B_s^a\| \le a, \|\Delta M_s^a\| \le 2a, t \ge 0 \quad (\mathbb{P} - \text{п.н.})\,.$$

Доказательство.

Последовательно проверим следующие утверждения:

1. $X - X^a = A^a + M^a$, где $A^a \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbb{H})\,, M^a \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{H})$.

2. $X - X^a = B^a + M^a$, где B^a - предсказуемый процесс из класса $A_{loc}(\mathbb{H})\,,$ $M^a \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{H})$.

3. $M^a \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{H})\,, \|\Delta B^a_s\| \le a, \|\Delta M^a_s\| \le 2a \quad (\mathbb{P} - \text{п.н.})$.

По определению семимартингала

$$X_t - X^a_t = X_0 + N_t + V_t - X^a_t,$$

где $N \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{H})$ и определим $A^a \equiv X_0 + V_t - X^a_t \in V_{loc}(\mathbb{H})\,.$

Положим

$$\tau_k = \inf\left\{t > 0 : \int_0^t \|dA^a_s\| > k\right\} \text{ и } \inf\varnothing = \infty.$$

Тогда для каждого k τ_k - момент остановки и $\tau_k \uparrow \infty \quad (\mathbb{P} - \text{п.н.})$. Пусть (τ'_k) - локализующая последовательность для N. Положим $\sigma_k = \tau_k \wedge \tau'_k$, тогда

$$\mathbb{E}\int_0^{\sigma_k} \|dA^a_t\| = \mathbb{E}\int_0^{\sigma_k -} \|dA^a_t\| + \mathbb{E}\left\|\Delta A^a_{\sigma_k}\right\| \le k + \mathbb{E}\left\|\Delta A^a_{\sigma_k}\right\|,$$

но

$$\left\|\Delta A^a_{\sigma_k}\right\| = \left\|\Delta\left(X - X^a\right)_{\sigma_k} - \Delta N_{\sigma_k}\right\| \le a + \|\Delta N_{\sigma_k}\|\,,$$

следовательно,

$$\mathbb{E}\int_0^{\sigma_k} \|dA^a_t\| \le k + a + \mathbb{E}\,\|\Delta N_{\sigma_k}\|\,,$$

т.е. $A^{a\sigma_k} = \left(A^a_{t\wedge\sigma_k}, \mathcal{F}_t; \mathbb{H}\right) \in A_{loc}(\mathbb{H})\,.$

Для доказательства утверждения (2) воспользуемся следующей леммой, которая вытекает из работы [3].

Лемма 2.

Если сепарабельное банахово пространство $\mathbb{H}$ имеет свойство Радона-Никодима, в частности, если $\mathbb{H}$ рефлексивно, то для процесса локально интегрируемой вариации A со значениями в $\mathbb{H}$ (т.е. $A \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbb{H})$) существует и единственный (с точностью до неразличимости) предсказуемый процесс $A' \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbb{H})\,,$ называемый компенсатором, такой, что $A - A' \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{H})\,.$

Доказательство леммы 1 (продолжение).

В силу этой леммы существует предсказуемый процесс $B^a \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbb{H})$ такой, что $A^a - B^a \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{H})\,,$ тогда можно положить $M^a = A^a - B^a + N^a$.

Покажем теперь, что $M^a \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{H})$. Пусть (τ_k) - локализующая последовательность моментов остановки для B^a и M^a, τ - предсказуемый момент остановки, тогда

$$\mathbb{E}\left\{\Delta M^{a\tau_k}_\tau | \mathcal{F}_{\tau-}\right\} = 0,$$

$$\Delta B^{a\tau_k}_\tau = \mathbb{E}\left\{\Delta\left(X - X^a\right)^{\tau_k}_\tau | \mathcal{F}_{\tau-}\right\}$$

на $(\tau < \infty)$ и $\|\Delta B^{a\tau_k}_\tau\| \leq a$. Отсюда и из равенства

$$\Delta M^a_\tau = \Delta\left(X - X^a\right)_\tau - \Delta B^a_\tau$$

вытекает соотношение $\|\Delta M^a_\tau\| \leq 2a$ на $(\tau < \infty)$.

Пусть теперь τ - вполне недостижимый момент остановки, тогда (см. [4]) для любого

$$h^* \in \mathbb{H}^* : \ (\Delta B^a_\tau, h^*) = 0$$

на $(\tau < \infty)$, следовательно, $\Delta B^a_\tau = 0$ и $\Delta M^a_\tau = \Delta\left(X - X^a\right)_\tau$, т.е. $\|\Delta M^a_\tau\| \leq a$ на $(\tau < \infty)$ и (как процесс с ограниченными скачками) $M^a \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{H})$.

Доказательство теоремы (продолжение).

Из леммы 1, поскольку (4):

$$X^a_t = X_0 + \int_0^t \int_{\|x\|>a} x\,\mu\left(ds, dx\right), \tag{6}$$

получаем утверждение теоремы.

Список литературы

[1] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1: Факты. Модели. Том 2: Теория. — М.: ФАЗИС, 1998. - Т.1. - 512 с, Т.2. - 544 с.

[2] Diestel J. Geometry of Banach Spaces - Selected Topics. - Berlin etc.: Springer-Verlag, 1975. - 282 p. - (Lect.Notes Math., Vol. 485).

[3] Pellaumail J. Sur l'integrale stochastique et la decomposition de Doob-Meyer. - Paris: Soc. Math. France, 1973. - 125 p. - (Asterisque. 9).

[4] Гальчук Л.И. Обобщение теоремы Гирсанова о замене меры на случай полумартингалов со скачками. -Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, вып. 2, с. 279-294.