

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 517.9:51-76

ДИНАМИКА РАЗВИТИЯ РАЗНОВОЗРАСТНЫХ КОГОРТ ЛЕСНЫХ НАСАЖДЕНИЙ (НА ПРИМЕРЕ РЕСПУБЛИКИ МОРДОВИЯ)

Сыромясов А.О., Мамедова Т.Ф., Шалаева А.А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,
г. Саранск

Поступила в редакцию 20.04.2024, после переработки 10.06.2024.

В работе модифицируется и исследуется математическая модель, позволяющая описывать развитие лесонасаждений с целью прогнозирования динамики разновозрастных когорт лесных экосистем. Модель представляет собой систему разностных уравнений, учитывает конкуренцию внутри когорт и угнетение младших возрастных групп старшими. Полученные результаты позволяют проводить дальнейшее моделирование экологических процессов в биоценозе с точки зрения управления ими. Работоспособность модели проверена на реальных статистических данных. Проведена оценка значимости «конкурентных» слагаемых.

Ключевые слова: разновозрастные когорты, модель «хищник – жертва», модель Ферхюльста, динамика численности, внутривидовая конкуренция, характеристики древостоя.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 2. С. 5–17.
<https://doi.org/10.26456/vtprm706>

1. Введение

Лесные ресурсы – одно из важнейших достояний России, поэтому их исследование с целью сохранения и роста является одной из приоритетных задач. Республика Мордовия граничит с двумя природными зонами: лесостепной и зоной хвойных и широколиственных лесов. В среднем по республике защитными и эксплуатационными лесами занято около 40 процентов от общей площади региона, так что указанная задача становится особенно актуальной.

Возобновление лесного массива – весьма длительный и дорогостоящий процесс; чтобы не проводить многочисленные практические эксперименты с реальными насаждениями, для исследования динамики древостоя можно использовать различные подходы, в частности, математическое моделирование [1]. Так, оно является

эффективным инструментом исследования разновозрастных когорт лесонасаждений, сосуществующих в рамках одного биоценоза.

Основоположителем применения математического моделирования для исследования динамики разновозрастных лесных массивов является М.Д. Корзухин. В своих работах он взял за основу предположение, что все деревья могут быть разделены на несколько групп по своим размерам и возрасту [2, 3].

Дальнейшие исследования в данном направлении уточняли и модифицировали упомянутую модель. Среди первых исследований на эту тему можно указать [4]. В некоторых работах, например, в [5], рассматривалась трехвозрастная динамика леса и вводилась функция выживаемости семян. Исследование [6] рассматривает развитие лесонасаждений как управляемый стохастический процесс. Различные уровни роста леса были описаны В.Л. Гавриковым [7]. Авторами статьи [8] разработаны актуальные сценарии имитационного моделирования лесных массивов.

Целью настоящей работы является прогнозирование изменений лесного обеспечения Республики Мордовия на основе уточненной модели динамики взаимодействия деревьев из различных возрастных когорт. Для ее достижения предполагается решить следующие задачи:

1. Построение модифицированной модели динамики численности лесонасаждений, учитывающей внутри- и межкогортную конкуренцию.
2. Обработка статистических данных по республике Мордовия для определения коэффициентов модели.
3. Оценка значимости «конкурентных» слагаемых.
4. Предсказание численности лесонасаждений в регионе на основе уточненной модели динамики популяции.

2. Описание модели

В качестве отправной точки рассуждений примем уже упомянутую ранее трехвозрастную модель М.Д. Корзухина [2, 3]:

$$\frac{dx}{dt} = \rho(y, z) - \gamma(z)x - fx, \quad \frac{dy}{dt} = fx - (q + d)y, \quad \frac{dz}{dt} = qy - hz. \quad (1)$$

Здесь и далее буквами x , y , z обозначена численность (объем, занятая площадь) деревьев трех групп: молодняка, средневозрастной и старшей, t есть время.

В системе (1) коэффициенты f , q отвечают за переход деревьев из одной возрастной когорты в другую, а d и h – за вымирание средней и старшей групп. Функции $\rho(y, z)$ и $\gamma(z)$ описывают скорость рождения деревьев и интенсивность гибели подростка вследствие его угнетения деревьями старшей когорты.

Известные модели возрастной динамики леса развивают идеи (1) и, как правило, также представляют собой системы дифференциальных уравнений. Такой подход предполагает, что происходящие процессы (в частности, размножение) непрерывны по времени. На самом же деле в средней полосе России они имеют годовую периодичность: зимой биологическая активность деревьев практически отсутствует. В связи с этим более адекватным представляется моделирование изменения

численности возрастных когорт с помощью разностных уравнений. В общих чертах этот подход применительно к смене поколений в популяции при дискретном изменении времени намечен еще П. Лесли и описан, например, в [1, 3].

Предположим, что изучаемый биоценоз (леса Республики Мордовия) изолирован, т.е. приток семян извне практически отсутствует. В определении возрастных когорт будем следовать [9, 10]. Статистическая информация об этих группах деревьев указывается в форме ведения государственного лесного реестра №2-ГЛР; такие когорты учитывались и в исследовании [6]. При описании внутрикогортной конкуренции станем ориентироваться на модель Ферхюльста, а при моделировании межкогортного взаимодействия – на модель «хищник – жертва» [1].

Молодняк находится в начале интенсивного роста и не способен к плодоношению. Его запасы пополняются двумя путями: путем целенаправленной высадки деревьев человеком (этот прирост будем описывать функцией S), либо при размножении деревьев более старших когорт. Преимущественным способом размножения древесных популяций в естественных условиях является половое, при котором скорость прироста пропорциональна квадрату численности популяции. Однако этот прирост относится к категории т.н. самосева, большая часть которого гибнет, не успев развиться. Поэтому примем более простую гипотезу: скорость размножения молодняка линейно зависит от суммарной численности двух старших когорт.

Средневозрастные деревья приобретают способность к плодоношению и продолжают расти. Для молодой и средней когорт характерны естественное изреживание и дифференциация, в первую очередь, вследствие их угнетения более высокими деревьями с развитой кроной. Можно предполагать, что этот процесс односторонний: деревья младшей когорты угнетаются старшими. Фактически, речь идет о внутри- и межгрупповой конкуренции с интенсивностью, пропорциональной произведению численностей взаимодействующих когорт.

В *старшей группе* (приспевающие, спелые и перестойные деревья) рост замедляется, увеличение биомассы отстает от скорости ее отмирания, а процессы дифференциации и изреживания затухают. Деревья старшей когорты вырубаются со скоростью W с целью заготовки древесины (рубка главного пользования).

По мере взросления растения переходят из одной возрастной группы в другую. Кроме того, лесонасаждения могут погибать в силу естественных причин (погодные катаклизмы и т.д.; сюда же отнесем санитарную вырубку древостоя). Скорость такой убыли пропорциональна количеству деревьев каждого из возрастов. К уменьшению численности древостоя ведет и конкуренция внутри первых двух когорт; ее интенсивность зависит от квадрата численности популяции.

Для наглядности сведем все упомянутые процессы в Таблицу 1.

Коэффициенты размножения (k_x), перехода ($\alpha_{x,y}$), вымирания ($\beta_{x,y,z}$), конкуренции ($\gamma_{x,y}$) и угнетения ($\delta_{x_1,x_2,y}$) считаются постоянными и неотрицательными.

Обозначим через t количество лет, прошедших с момента начала наблюдений за развитием биоценоза и тем самым введем последовательности $\{x_t\}$, $\{y_t\}$, $\{z_t\}$, отражающие изменение численности когорт по годам. Тогда, складывая скорости роста и убыли возрастных групп, обусловленные различными факторами, получим, что искомая математическая модель описывается следующей системой разностных уравнений:

$$\Delta x_t = R_x(t, x_t, y_t, z_t), \quad \Delta y_t = R_y(t, x_t, y_t, z_t), \quad \Delta z_t = R_z(t, x_t, y_t, z_t), \quad (2)$$

Таблица 1: Факторы изменения численности когорт деревьев

Процессы	Молодняк	Сред. группа	Старш. группа
Размножение	$k_x(y+z)$	–	–
Переход в след. когорту	$-\alpha_x x$	$-\alpha_y y$	–
Переход из пред. когорты	–	$+\alpha_x x$	$+\alpha_y y$
Естественная убыль	$-\beta_x x$	$-\beta_y y$	$-\beta_z z$
Внутренняя конкуренция	$-\gamma_x x^2$	$-\gamma_y y^2$	–
Угнетение старшими	$-\delta_{x1}xy - \delta_{x2}xz$	$-\delta_y yz$	–
Посадка / вырубка	S	–	$-W$

где прирост $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$, обозначения Δy_t и Δz_t расшифровываются аналогично, а правые части равенств задаются формулами:

$$\begin{aligned}
R_x &= k_x(y_t + z_t) - \alpha_x x_t - \beta_x x_t - \gamma_x x_t^2 - \delta_{x1} x_t y_t - \delta_{x2} x_t z_t + S(t), \\
R_y &= -\alpha_y y_t + \alpha_x x_t - \beta_y y_t - \gamma_y y_t^2 - \delta_y y_t z_t, \\
R_z &= \alpha_y y_t - \beta_z z_t - W(t).
\end{aligned} \tag{3}$$

По сравнению с (1) в системе (2)–(3) конкретизирован вид $\rho(y, z) = k_x(y + z)$; параметры $\alpha_x = f$, $\alpha_y = q$, а также $\beta_y = d$ и $\beta_z = h$ имеют тот же смысл, что и ранее. Более детально описано явление угнетения: вместо одной функции $\gamma(z)$, отвечающей *только* за взаимодействие молодой поросли с древостоем старшей когорты, введены три коэффициента типа δ . Еще одним отличием предлагаемой модели является учет конкуренции внутри групп одного возраста. Наконец, время теперь является дискретным.

Далее определим коэффициенты выведенных уравнений на основе статистических данных по Мордовии и сделаем прогноз о динамике численности лесонасаждений в республике на ближайшие несколько лет.

Одной из задач нашего исследования служит оценка вклада конкуренции внутри когорт в динамику роста популяции деревьев. Поэтому помимо (3) будем рассматривать упрощенный вариант системы без «конкурентных» слагаемых:

$$\begin{aligned}
R_x &= k_x(y_t + z_t) - \alpha_x x_t - \beta_x x_t + S(t), \\
R_y &= -\alpha_y y_t + \alpha_x x_t - \beta_y y_t, \\
R_z &= \alpha_y y_t - \beta_z z_t - W(t).
\end{aligned} \tag{4}$$

Коэффициенты последней модели также следует найти по данным статистики; затем будет проведено сравнение скорости роста популяции согласно (3) и (4).

3. Обработка статистических данных по республике Мордовия

Нами была проанализирована информация о состоянии лесных массивов, предоставленная Министерством лесного, охотничьего хозяйства и природопользования Республики Мордовия [11]. В качестве переменных x , y , z были выбраны

суммарные площади, занятые преимущественно лесонасаждениями соответствующей возрастной группы, измеренные в тыс. га и заносимые в форму ведения государственного лесного реестра №2-ГЛР. Такое допущение обосновывается тем, что количество деревьев пропорционально занятой ими площади. Далее термины «численность» и «площадь» считаются синонимами.

Для того, чтобы определить коэффициенты в системах (3) и (4), желательно иметь значения величин x , y , z в нескольких равноотстоящих моментах времени, например, ежегодно с 2014 по 2021 г. К сожалению, в упомянутом выше открытом источнике найти полную информацию такого характера не удалось; например, сведения за 2018 г. отсутствовали. Недостающие данные были выведены путем интерполяции. К примеру, если бы в 2017 г. площадь, занятая молодняком, составляла 90, а в 2020 г. – 120 тыс. га, то в 2018 г. величина x была бы принята равной 100 тыс. га.

Полученные результаты дополнительно корректировались с учетом информации о природных и техногенных явлениях, влияющих на лесонасаждения. Например, пусть по расчетам в 2018 г. суммарные запасы молодняка должны составить 100, средней группы – 200 и старшей группы – 300 тыс. га. Если дополнительно известно, что в этом же году лесные пожары затронули 300 га, то, поделив указанную площадь пропорционально доле каждой из когорт, получим, что значение x необходимо уменьшить на $300 * 100 / (100 + 200 + 300) = 50$ га.

Информация о рубках главного пользования (а значит, и о величине W) доступна из [12]. Несмотря на то, что этот источник содержит данные и об объемах естественного и искусственного лесовосстановления (в га), извлечь из него информацию о функции $S(t)$ не представляется возможным. Дело в том, что понятие «лесовосстановление» гораздо шире, чем высадка саженцев деревьев на новых площадях и включает в себя, например, обработку почвы, уже занятой древостоем [13]. Кроме того, суммарные площади лесовосстановления в разы меньше, чем явно указанные в сборнике значения W . Поэтому далее принято, что $S(t) = 0$.

Обобщенные статистические данные за $T = 8$ лет приведены в Таблице 2. Отметим, что информация в [11, 12] приводится на конец того или иного года, так что 2014 г. в таблице соответствует не $t = 0$, а $t = 1$.

Таблица 2: Площади, занятые когортами деревьев в республике Мордовия по годам, тыс. га

	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Молодняк (x)	115.8	119.0	123.0	131.3	129.3	125.6	124.9	123.5
Ср. группа (y)	254.3	255.7	253.5	254.8	255.5	255.8	252.3	253.5
Ст. группа (z)	266.5	266.0	264.9	265.2	264.2	263.8	262.7	269.8
W	4	4	4	4	4	4	2	2

Чтобы по этим данным подобрать коэффициенты в системах (3) и (4), исполь-

зовался метод наименьших квадратов. Точнее, рассматривалось выражение

$$Q^2 = \sum_{t=1}^{T-1} \left\{ [\Delta x_t - R_x(t, x_t, y_t, z_t)]^2 + [\Delta y_t - R_y(t, x_t, y_t, z_t)]^2 + [\Delta z_t - R_z(t, x_t, y_t, z_t)]^2 \right\},$$

минимум которого отыскивался методом Нелдера – Мида, или многогранника [14]. Данный алгоритм пригоден для оптимизации функций, зависящих от большого числа параметров. Кроме того, он реализован как в математических библиотеках на языке Python, так и в специализированных прикладных программных комплексах. Так, в использованном авторами пакете Wolfram Mathematica на примере метода Нелдера – Мида основана стандартная функция `NMinimize`.

Для модели межкогортного взаимодействия с учетом конкуренции результаты расчетов таковы:

$$\begin{aligned} Q^2 &= 110.186, \\ k_x &= 0.1073, \alpha_x = 0.0513, \beta_x = 0.0185, \gamma_x = 0.0005, \delta_{x1} = 0.0012, \delta_{x2} \approx 0, \\ \alpha_y &= 0.0164, \beta_y = 1.2 \cdot 10^{-6}, \gamma_y = 3.6 \cdot 10^{-5}, \delta_y \approx 0, \\ \beta_z &= 7.8 \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогичный результат для модели, не учитывающей конкуренцию, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} Q^2 &= 112.223, \\ k_x &= 0.1216, \alpha_x = 0.0329, \beta_x = 0.4670, \\ \alpha_y &= 0.0164, \beta_y = 0.0001, \\ \beta_z &\approx 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Приближенное равенство параметров нулю в приведенных равенствах выполнено как минимум с точностью до 10^{-8} .

Как видно, учет внутри- и межкогортной конкуренции незначительно повышает точность модели: значение Q^2 уменьшается на 2%.

В качестве примера использования построенной модели на Рис. 1 приведен график величины x_t , вычисленной в соответствии со схемой (2), (3), (5), в сравнении с данными Таблицы 2. Предполагается, что при $t = 1$ значения x_t, y_t, z_t в разностных уравнениях равны табличным (своего рода «начальные данные» в соответствующей рекуррентной схеме).

Сплошная линия на графике соответствует расчету, табличные данные обозначены точками.

4. Анализ моделей динамики и прогнозирование численности когорт

Одним из вопросов, представляющих интерес, является равновесная численность возрастных групп при условии, что годовая площадь рубки главного пользования неизменна. Примем функцию $W(t)$ тождественно равной $W(T) = \text{const}$; тогда функции R_x, R_y и R_z перестанут зависеть от времени. Решая систему

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0, \quad (7)$$

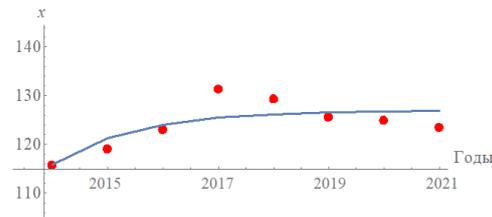


Рис. 1: Сравнение расчетных значений x_t со статистическими данными

найдем, что в отсутствие конкуренции единственной точкой равновесия служит

$$x_t = 61.183, \quad y_t = 121.879, \quad z_t = 129.635.$$

Такая численность когорт принципиально возможна, но лишь при крайне неблагоприятном сценарии: найденные площади в разы меньше тех, что в настоящее время заняты лесонасаждениями.

При учете конкуренции ситуация меняется. Теперь система (7) имеет четыре решения, из которых два являются комплексно-сопряженными, а еще одно содержит отрицательные компоненты. Единственным набором положительных чисел, удовлетворяющих (7), является

$$x_t = 1.398 \cdot 10^6, \quad y_t = 44487.8, \quad z_t = 9.309 \cdot 10^9.$$

Однако эти значения столь велики, что оказываются недостижимыми: площадь всей Республики Мордовия составляет около $2.613 \cdot 10^6$ тыс. га.

Итак, в обоих случаях (с учетом конкуренции или без нее) можно полагать, что система эволюционирует, не достигая положения равновесия.

Воспользуемся моделью (2), (3) с коэффициентами (5) для предсказания численности древесных когорт на период до 2030 г. ($t = 17$ в наших обозначениях). При этом вновь будем предполагать, что после 2022 г. ($t > T$) рубки главного пользования ведутся с постоянной интенсивностью $W(T)$.

Рис. 2 иллюстрирует прогнозируемую динамику изменения площади x_t , занятой молодым древостоем.

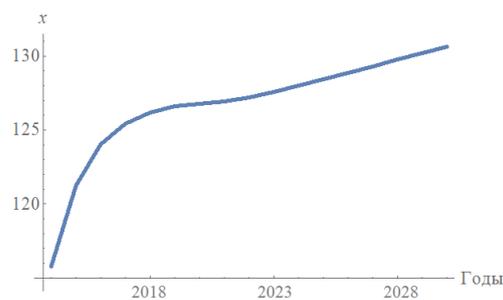


Рис. 2: Прогноз динамики численности древесных когорт

Как и ранее, предполагается, что значения x_1, y_1, z_1 в расчетной схеме совпадают с табличными.

Более детально, в 2030 г. предполагаемые площади, занятые тремя исследуемыми возрастными группами, равны

$$x_{17} = 130.643, \quad y_{17} = 254.564, \quad z_{17} = 289.007.$$

Этот прогноз достаточно благоприятен: численность молодой и старшей когорт увеличивается, а средней – почти не изменяется.

Модель, не учитывающая конкуренцию, дает практически такие же значения x_{17} , y_{17} , z_{17} . Это, а также малая разница в значениях Q^2 согласно (5) и (6), дает основания считать, что конкуренция и угнетение младших когорт старшими не вносят весомого вклада в динамику численности древостоя (в разрезе данных формы №2-ГЛР). Решающую роль играет размножение деревьев, их переход из младших когорт в старшие, отмирание старшей возрастной группы и рубки главного пользования.

Очевидно, при наличии более подробных данных (например, выделение информации о собственно высадке новых саженцев среди всей площади, затронутой лесовосстановлением, и т.д.) коэффициенты модели могли бы быть скорректированы. Возможно, при этом несколько изменилась бы и оценка значимости конкуренции в популяции.

В свою очередь, понимание роли каждого из слагаемых в уравнениях (2)–(4) помогло бы решить важную хозяйственную задачу управления лесными ресурсами. В частности, практически важным является вопрос: какой должна быть зависимость объема вырубki $W(t)$ от времени, чтобы сохранять общую площадь лесонасаждений в регионе на одном и том же уровне. Задачи подобного класса могут быть предметом отдельного исследования.

Заключение

В настоящей статье предложена трехвозрастная модель с дискретным временем, описывающая динамику древесной популяции. Коэффициенты модели найдены численно исходя из статистических данных по республике Мордовия.

Рассмотрено два варианта модели: с учетом и без учета конкуренции внутри и между когортами деревьев одного возраста. Получено, что упомянутая конкуренция не является решающим фактором, влияющим на величину площади, занятой древостоем того или иного возраста.

На основании построенной модели сделан прогноз численности популяции деревьев в республике Мордовия до 2030 г.

Список литературы

- [1] Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 560 с.
- [2] Корзухин М.Д. Возрастная динамика популяций деревьев, являющихся сильными эдификаторами // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. 1980. Т. 3. С. 162–178.

- [3] Корзухин М.Д., Семевский Ф.Н. Синэкология леса. СПб.: Гидрометеиздат, 1992. 192 с.
- [4] Бузыкин А.И., Гавриков В.Л., Секретенко О.П., Хлебопрос Р.Г. Анализ структуры древесных ценозов // . 1985.
- [5] Корзухин М.Д., Мацкявичюс В.К., Антоновский М.Я. Периодическое поведение возрастно-распределенной популяции деревьев // Проблемы экологического мониторинга и моделирование экосистем. 1989. Т. 12. С. 284–310.
- [6] Дмитриева О.Н. Математическое моделирование процесса развития лесонасаждений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2007. 16 с.
- [7] Гавриков В.Л. Рост леса: уровни описания и моделирования. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2013. 176 с.
- [8] Тебенькова Д.Н., Лукина Н.В., Катаев А.Д., Чумаченко С.И. Разработка сценариев для имитационного моделирования экосистемных услуг лесов // Вопросы лесной науки. 2022. Т. 5, № 2. С. 1–87.
- [9] ОСТ 56-108-98. Лесоводство. Термины и определения. Введен 03.12.1998. М.: ВНИИЦлесресурс, 1999. 56 с.
- [10] Бакшеева Е.О., Матвеева Т.А., Иванова Г.А. Основы лесоводства. Красноярск: СибГТУ, 2016. 355 с.
- [11] Министерство лесного, охотничьего хозяйства и природопользования Республики Мордовия [Электронный ресурс] // Официальный портал органов государственной власти Республики Мордовия. URL: <https://e-mordovia.ru/otkrytye-dannye/statisticheskaya-informatsiya/ministerstvo-lesnogo-okhotnichego-khozyaystva-i-prirodopolzovaniya-rm/>.
- [12] Мордовия: Стат. ежегодник. Саранск: Мордовиястат, 2022. 417 с.
- [13] Российская Федерация. Законы. Лесной кодекс Российской Федерации. Текст с изменениями и дополнениями, вступившими в силу с 01 января 2024 г. : [принят Государственной думой 8 ноября 2006 года : одобрен Советом Федерации 24 ноября 2006 г.].
- [14] Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.

Образец цитирования

Сыромясов А.О., Мамедова Т.Ф., Шалаева А.А. Динамика развития разновозрастных когорт лесных насаждений (на примере республики Мордовия) // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 2. С. 5–17. <https://doi.org/10.26456/vtpmk706>

Сведения об авторах**1. Сыромьясов Алексей Олегович**

доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва.

Россия, 430005, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1, Мордовский государственный университет. E-mail: syal1@yandex.ru

2. Мамедова Татьяна Фанадовна

доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва.

Россия, 430005, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1, Мордовский государственный университет. E-mail: mamedovatf@yandex.ru

3. Шалаева Анна Андреевна

преподаватель кафедры систем автоматизированного проектирования факультета математики и информационных технологий Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва.

Россия, 430005, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1, Мордовский государственный университет. E-mail: Liyaskinaa@mail.ru

GROWTH DYNAMICS OF DIFFERENT-AGED FOREST CONTINGENTS (ON THE EXAMPLE OF MORDOVIA REPUBLIC)

Syromyasov A.O., Mamedova T.F., Shalaeva A.A.
Ogarev Mordovia State University, Saransk

Received 20.04.2024, revised 10.06.2024.

Authors of the paper modify and analyze the mathematical model that describes afforestation dynamics in order to predict evolution of different-aged contingents of forest ecosystems. The model under study includes system of difference equations and takes into account competition inside the contingents and between them. The results obtained allow further modelling of ecological processes in biocenosis from a control point of view. The model is validated on real statistical data. Importance of “concurrency” terms in equations obtained is estimated.

Keywords: different-aged contingents, Lotka – Volterra model, Verhulst model, populaton dynamics, intraspecific competition, characteristics of forest stand.

Citation

Syromyasov A.O., Mamedova T.F., Shalaeva A.A., “Growth dynamics of different-aged forest contingents (on the example of Mordovia republic)”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 2, 5–17 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtprmk706>

References

- [1] Riznichenko G.Yu., *Lectures on mathematical models in biology*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2011 (in Russian), 560 pp.
- [2] Korzukhin M.D., “Age dynamics of populations of trees that are strong edifiers”, *Problemy ekologicheskogo monitoringa i modelirovaniya ekosistem [Problems of ecological monitoring and ecosystem modeling]*, **3** (1980), 162–178 (in Russian).
- [3] Korzukhin M.D., Semevskij F.N., *Sinekologiya lesa [Synecology of the forest]*, Gidrometeoizdat, SPb., 1992 (in Russian), 192 pp.
- [4] Buzykin A.I., Gavrikov V.L., Sekretenko O.P., Khlebopros R.G., “Analiz struktury drevesnykh tsenozov”, 1985 (in Russian), 94 pp.
- [5] Korzukhin M.D., Matskyavichyus V.K., Antonovskij M.Ya., “Periodic behavior of an age-distributed tree population”, *Problemy ekologicheskogo monitoringa i modelirovanie ekosistem [Problems of environmental monitoring and ecosystem modeling]*, **12** (1989), 284–310 (in Russian).

- [6] Dmitrieva O.N., *Matematicheskoe modelirovanie protsessa razvitiya lesonasazhdenij*, abstract of the thesis, Moscow, 2007 (in Russian), 16 pp.
- [7] Gavrikov V.L., *Rost lesa: urovni opisaniya i modelirovaniya*, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 2013 (in Russian), 176 pp.
- [8] Tebenkova D.N., Lukina N.V., Kataev A.D., Chumachenko S.I., “Development of scenarios for simulation of forest ecosystem services”, *Voprosy lesnoj nauki [Issues of forest science]*, **5:2** (2022), 1–87 (in Russian).
- [9] *OST 56-108-98. Forestry. Terms and definitions*, Introduced on 03.12.1998, VNI-ITslesresurs, Moscow, 1999 (in Russian), 56 pp.
- [10] Baksheeva E.O., Matveeva T.A., Ivanova G.A., *Osnovy lesovodstva [Fundamentals of forestry]*, SibGTU, Krasnoyarsk, 2016 (in Russian), 355 pp.
- [11] *Ministerstvo lesnogo, okhotnichogo khozyajstva i prirodopolzovaniya Respubliki Mordoviya*, The official portal of the state authorities of the Republic of Mordovia (in Russian), <https://e-mordovia.ru/otkrytye-dannye/statisticheskaya-informatsiya/ministerstvo-lesnogo-okhotnichogo-khozyajstva-i-prirodopolzovaniya-rm/>.
- [12] *Mordoviya: Stat. ezhegodnik [Mordovia: Statistical Yearbook]*, Mordoviyastat, Saransk, 2022 (in Russian), 417 pp.
- [13] *Rossiyskaya Federatsiya. Zakony. Lesnoj kodeks Rossijskoj Federatsii*, The text with amendments and additions that entered into force on January 01, 2024 : [adopted by the State Duma on November 8, 2006 : approved by the Federation Council on November 24, 2006] (in Russian).
- [14] Gill P.E., Murray W., Wright M.H., *Practical optimization*, Academic Press, San Diego, 1981, 509 pp.

Author Info

1. **Syromyasov Aleksei Olegovich**

Associate Professor at the department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University.

*Russia, 430005, Saransk, Bolshevistskaya str., 68/1,
Ogarev Mordovia State University. E-mail: syal1@yandex.ru*

2. **Mamedova Tatyana Fanadovna**

Associate Professor at the department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University.

*Russia, 430005, Saransk, Bolshevistskaya str., 68/1,
Ogarev Mordovia State University. E-mail: mamedovatf@yandex.ru*

3. Shalaeva Anna Andreevna

Teacher at the department of Computer-Aided Design, National Research Mordovia State University.

*Russia, 430005, Saransk, Bolshevikskaya str., 68/1,
Ogarev Mordovia State University. E-mail: Liyaskinaa@mail.ru*