УДК 519.95

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТНО-ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ ПОРТФЕЛЯ МИНИМАЛЬНОГО РИСКА[1]

Язенин А.В., Шефова Н.А.
Кафедра информационных технологий

Поступила в редакцию 21.06.2010, после переработки 27.06.2010.

В работе исследуется проблема выбора инвестиционного портфеля в возможностно-вероятностном контексте. При таком рассмотрении проблемы доходности финансовых активов моделируются нечеткими случайными величинами. Их моменты второго порядка определяются как четкие величины. Представлена возможностно-вероятностная модель портфеля минимального риска. Получен и исследован ее эквивалентный четкий аналог.

In the paper a problem of portfolio analysis in possibilistic-probabilistic context is investigated. As a model of an asset profitability a fuzzy random variable is used. To determine a portfolio risk function the crisp moments of the second order are used. A possibilistic-probabilistic model of minimal risk portfolio is presented. Its equivalent crisp (unfuzzy) analogue is obtained.

Ключевые слова: портфель минимального риска, нечеткая случайная величина, эквивалентный четкий аналог, сильная и слабая t-нормы.
Keywords: portfolio of minimal risk, fuzzy random variable, equivalent crisp (unfuzzy) analogue, strongest and weakest t-norms.

1. Введение

Данная работа посвящена исследованию моделей и методов оптимизации инвестиционного портфеля в условиях нечетких случайных данных. Этому научному направлению посвящен ряд работ, наиболее релевантными из которых являются [1-7]. Полученные в них результаты являют собой обобщение классических моделей, представленных в портфельной теории [8]. Они позволяют, в частности, расширить сферу применения портфельной теории путем предоставления моделей и методов обработки данных, включающих в себя элементы неопределенности как вероятностного, так и нечеткого типов. Снятие комбинированного типа неопределенности в этих моделях основано на принципе ожидаемой возможности. Его применение выражается в усреднении нечеткой случайной функции, представляющей доходность портфеля, которая становится функцией возможностных

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №10-01-00052а.

параметров. Это позволяет применить принципы принятия решений в условиях нечетких (возможностных) данных для снятия возможностной неопределенности.

В предлагаемом исследовании принципы снятия неопределенности возможностного и вероятностного типов являются идентичными. Мы требуем, чтобы ограничение на приемлемый для инвестора уровень доходности портфеля, выполнялось с заданными возможностью и вероятностью. Тем самым мы обобщаем модели ограничения по вероятности или возможности, известные в стохастическом [9] и возможностном [10,11] программировании, на комбинированный тип неопределенности. Моменты второго порядка определяются в четкой форме, следуя [12]. Построен и исследован эквивалентный четкий аналог модели.

2. Базовые понятия и обозначения

Следуя [11, 13-18], введем необходимые понятия. Пусть Γ есть множество элементов, обозначаемых далее через $\gamma \in \Gamma$, $P(\Gamma)$ - множество всех подмножеств Γ, E^1 – числовая прямая.

Определение 1. Мерой возможности называется функция множества

$$\pi : P(\Gamma) \to E^1,$$

обладающая свойствами:

$$1.\ \pi\{\emptyset\} = 0,\ \ \pi\{\Gamma\} = 1;\ 2.\ \pi\{\bigcup_{i\in I} A_i\} = \sup_{i\in I} \pi\{A_i\},$$

для любого индексного множества I и множеств $A_i \in P(\Gamma)$.

Триплет $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$ называется возможностным пространством.

Определение 2. Возможностной (нечеткой) величиной называется отображение $Z : \Gamma \to E^1$. Распределением возможностных значений величины Z называется функция $\mu_Z(\cdot) : E^1 \to [0, 1]$, определяемая по правилу:

$$\mu_Z(z) = \pi\{\gamma \in \Gamma : Z(\gamma) = z\},\quad \forall z \in E^1.$$

$\mu_Z(z)$ есть возможность того, что переменная Z может принять значение z.

Мерой, двойственной возможностной мере, является мера необходимости, определяемая следующим образом:

$$\nu(A) = 1 - \pi(A^c),\ \ \forall A \in P(\Gamma),$$

A^c - есть дополнением множества A.

Дадим определение нечеткой случайной величины.

Пусть (Ω, B, P) есть вероятностное пространство.

Определение 3. Нечеткая случайная величина X есть вещественная функция $X(\cdot,\cdot) : \Omega \times \Gamma \to E^1$, такая, что при любом фиксированном $\gamma \in \Gamma$, величина $X_\gamma = X(\omega, \gamma)$ является случайной величиной, определенной на (Ω, B, P).

Определение 4. r – уровневым множеством нечеткой случайной величины называется множество $X_\omega(r) = \{t \in E^1 : \mu_{X_\omega}(t) \geq r\},\ \ 0 < r \leq 1$.

Определение 5. Носителем нечеткой величины Z называется множество $supp(Z) = \{z \in E^1 | \mu_Z(z) > 0\}$.

Определим моменты второго порядка в соответствии с [12]. Пусть X и Y– нечеткие случайные величины.

Определение 6. Ковариация нечетких случайных величин X и Y определяется как

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{2}\int_0^1 (Cov(X_\omega^-(r), Y_\omega^-(r)) + Cov(X_\omega^+(r), Y_\omega^+(r)))dr.$$

Здесь $X_\omega^-(r)$, $Y_\omega^-(r)$ и $X_\omega^+(r)$, $Y_\omega^+(r)$ есть левая и правая границы r-уровневых множеств соответствующих нечетких величин.

Определяемая таким образом ковариация, как нетрудно видеть, является четкой величиной. Альтернативный подход к определению моментов второго порядка нечетких случайных величин предлагается в [19].

Определение 7. Дисперсия нечеткой случайной величины X определяется как

$$DX = Cov(X,X).$$

Определение 8. Коэффициент корреляции нечетких случайных величин X и Y рассчитывается как $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$.

Определение 9. Математическое ожидание нечеткой случайной величины есть нечеткая величина, такая что $[EX(r)] = E[X(r)] = [EX^-(r), EX^+(r)], \quad 0 < r \le 1$.

3. Модель портфеля минимального риска в нечёткой случайной среде при ограничении по возможности (необходимости) и вероятности на уровень доходности

Введем модель портфеля минимального риска в нечёткой случайной среде при ограничении по возможности (необходимости) / вероятности на уровень доходности, приемлемый для инвестора:

$$V_p(w) \to \min, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \tau\left\{P\left\{R_p(w,\,\omega,\,\gamma) \ge m_d\right\} \ge p_0\right\} \ge \alpha_0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w_1,\,...,\,w_n \ge 0. \end{cases} \tag{2}$$

В этой модели $w = (w_1,\,...,\,w_n)$ есть вектор долей капитала, $V_p(w)$ - риск портфеля, $R_p(w,\,\omega,\,\gamma)$- доходность портфеля, $\tau \in \{\pi,\,\nu\}$; p_0 и α_0 - заданные уровни вероятности и возможности, $p_0,\,\alpha_0 \in (0,\,1]$, m_d - уровень доходности, приемлемый для инвестора. В общем случае параметр m_d может быть нечёткой случайной величиной.

При наличии случайных и нечётких факторов доходность портфеля $R_p(w,\,\omega,\,\gamma)$ может быть представлена следующим образом:

$$R_p(w,\,\omega,\,\gamma) \;=\; \sum_{i=1}^{n} R_i(\omega,\,\gamma) \cdot w_i,$$

где $R_i(\omega,\,\gamma)$ - нечёткая случайная величина, имеющая сдвиг-масштабное представление, моделирующая доходность i-го финансового актива:

$$R_i(\omega,\,\gamma)\;=\;a_i(\omega)+\sigma_i(\omega)\cdot X_i(\gamma).$$

Предполагаем далее, что $a_i(\omega)\in N_p(a_i^0,\,g_{a_i})$, $\sigma_i(\omega)\in N_p(\sigma_i^0,\,g_{\sigma_i})$, где N_p - есть класс нормальных вероятностных распределений.

Зафиксируем значение нечёткого параметра $X_i(\gamma)$. Пусть $X_i(\gamma)=t_i$. Тогда с возможностью $\mu_{X_i}(t_i)$ случайная величина $R_i(\omega,\gamma)$ принимает значение $R_i^{t_i}(\omega)=a_i(\omega)+\sigma_i(\omega)\cdot t_i$ и имеет математическое ожидание $a_i^0+\sigma_i^0\cdot t_i$ и дисперсию $g_{a_i}^2+g_{\sigma_i}^2\cdot t_i^2$. $R_i^{t_i}(\omega)$ имеет нормальное распределение, так как композиция нормальных законов при фиксированном t_i есть нормальная случайная величина:

$$R_i^{t_i}(\omega)\in N_p(a_i^0+\sigma_i^0\cdot t_i,\,\sqrt{g_{a_i}^2+g_{\sigma_i}^2\cdot t_i^2}).$$

Введём обозначения

$$R_i^0(t)=a_i^0+\sigma_i^0\cdot t_i;\quad D_i^0(t)=g_{a_i}^2+g_{\sigma_i}^2\cdot t_i^2.$$

В предположении взаимной минисвязанности возможностных величин $X_1(\gamma),\,\ldots,\,X_n(\gamma)$ вектор $R_p^t(\omega)\;=\;\left(R_1^{t_i}(\omega),\,...,\,R_n^{t_i}(\omega)\right)$ с возможностью $\mu_p(t)\;=\;\min\limits_{1\le i\le n}\{\mu_{X_i}(t_i)\}$ есть вектор доходностей портфеля, а $R_p^t(w,\omega)\;=\;\sum\limits_{i=1}^{n}R_i^{t_i}(\omega)\cdot w_i$ с возможностью $\mu_p(t)$ - его доходность, $t=(t_1,\,...,\,t_n)$.

Получим числовые характеристики данного портфеля.

С возможностью $\mu_p(t)$

$$\begin{aligned}\overline{R}_p^t(w)&=E\left\{R_p^t(w,\,\omega)\right\}=E\left\{\sum_{i=1}^{n}R_i^{t_i}(\omega)\cdot w_i\right\}=\\&=E\left\{\sum_{i=1}^{n}w_i\left(a_i(\omega)+\sigma_i(\omega)\cdot t_i\right)\right\}=\sum_{i=1}^{n}w_i\left(a_i^0+\sigma_i^0\cdot t_i\right)\end{aligned}$$

есть ожидаемая доходность портфеля, а

$$D_p^t(w)=E\left\{\left(R_p^t(w,\,\omega)-E\left\{R_p^t(w,\,\omega)\right\}\right)^2\right\}$$

есть риск портфеля.

Получим формулу, определяющую риск портфеля, учитывающую и отражающую представление исходной информации. Имеем:

$$
\begin{aligned}
&D_p^t(w) = E\left\{\left(R_p^t(w,\omega) - E\left\{R_p^t(w,\omega)\right\}\right)^2\right\} = \\
&= E\left\{\left(\sum_{i=1}^n w_i\left(a_i(\omega)+\sigma_i(\omega)\cdot t_i\right) - \sum_{i=1}^n w_i\left(a_i^0+\sigma_i^0\cdot t_i\right)\right)^2\right\} = \\
&= E\left\{\left(\sum_{i=1}^n w_i\left[\left(a_i(\omega)-a_i^0\right)+\left(\sigma_i(\omega)-\sigma_i^0\right)\cdot t_i\right]\right)^2\right\} = \\
&= E\{\ \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n [\ w_i\left(\left(a_i(\omega)-a_i^0\right)+\left(\sigma_i(\omega)-\sigma_i^0\right)\cdot t_i\right)\cdot w_j\ (\ \left(a_j(\omega)-a_j^0\right)+ \\
&\left(\sigma_j(\omega)-\sigma_j^0\right)\cdot t_j\ )\ ]\ \} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n E\,[\ w_i\left(\left(a_i(\omega)-a_i^0\right)+\left(\sigma_i(\omega)-\sigma_i^0\right)\cdot t_i\right)\cdot \\
&\cdot w_j\left(\left(a_j(\omega)-a_j^0\right)+\left(\sigma_j(\omega)-\sigma_j^0\right)\cdot t_j\right)\ ] = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n w_i w_j E\{\ (\ \left(a_i(\omega)-a_i^0\right)+ \\
&+\left(\sigma_i(\omega)-\sigma_i^0\right)\cdot t_i\ )\cdot\left(\left(a_j(\omega)-a_j^0\right)+\left(\sigma_j(\omega)-\sigma_j^0\right)\cdot t_j\right)\ \}
\end{aligned}
$$

Преобразуем отдельное слагаемое в двойной сумме. Для этого представим математическое ожидание в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\left(\left(a_i(\omega)-a_i^0\right)+\left(\sigma_i(\omega)-\sigma_i^0\right)\cdot t_i\right)\cdot\left(\left(a_j(\omega)-a_j^0\right)+\left(\sigma_j(\omega)-\sigma_j^0\right)\cdot t_j\right)\right\} = \\
&= E\left\{\left(a_i(\omega)-a_i^0\right)\cdot\left(a_j(\omega)-a_j^0\right)+\left(a_i(\omega)-a_i^0\right)\cdot\left(\sigma_j(\omega)-\sigma_j^0\right)\cdot t_j+\right. \\
&\left.+\left(\sigma_i(\omega)-\sigma_i^0\right)\cdot\left(a_j(\omega)-a_j^0\right)\cdot t_i+\left(\sigma_i(\omega)-\sigma_i^0\right)\cdot\left(\sigma_j(\omega)-\sigma_j^0\right)\cdot t_i\cdot t_j\right\} = \\
&= E\left\{\left(a_i(\omega)-a_i^0\right)\cdot\left(a_j(\omega)-a_j^0\right)\right\}+E\left\{\left(a_i(\omega)-a_i^0\right)\cdot\left(\sigma_j(\omega)-\sigma_j^0\right)\cdot t_j\right\}+ \\
&+E\left\{\left(\sigma_i(\omega)-\sigma_i^0\right)\cdot\left(a_j(\omega)-a_j^0\right)\cdot t_i\right\}+ \\
&+E\left\{\left(\sigma_i(\omega)-\sigma_i^0\right)\cdot\left(\sigma_j(\omega)-\sigma_j^0\right)\cdot t_i\cdot t_j\right\}\ .
\end{aligned}
$$

Введём обозначения для коэффициентов ковариации случайных величин, участвующих в сдвиг-масштабном представлении нечётких случайных величин:

$$c_{a_i a_j} = cov(a_i,\, a_j), c_{\sigma_i\sigma_j} = cov(\sigma_i,\, \sigma_j), c_{a_i\sigma_j} = cov(a_i,\, \sigma_j), c_{\sigma_i a_j} = cov(\sigma_i,\, a_j).$$

Тогда, с использованием этих обозначений,

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\left(a_i(\omega)-a_i^0\right)\cdot\left(a_j(\omega)-a_j^0\right)\right\}+E\left\{\left(a_i(\omega)-a_i^0\right)\cdot\left(\sigma_j(\omega)-\sigma_j^0\right)\cdot t_j\right\}+ \\
&+E\left\{\left(\sigma_i(\omega)-\sigma_i^0\right)\cdot\left(a_j(\omega)-a_j^0\right)\cdot t_i\right\}+ \\
&+E\left\{\left(\sigma_i(\omega)-\sigma_i^0\right)\cdot\left(\sigma_j(\omega)-\sigma_j^0\right)\cdot t_i\cdot t_j\right\} = \\
&= c_{a_i a_j}+c_{a_i\sigma_j}\cdot t_j+c_{\sigma_i a_j}\cdot t_i+c_{\sigma_i\sigma_j}\cdot t_i\cdot t_j.
\end{aligned}
$$

Пусть далее $C_{ij} = c_{a_i a_j}+c_{a_i\sigma_j}\cdot t_j+c_{\sigma_i a_j}\cdot t_i+c_{\sigma_i\sigma_j}\cdot t_i\cdot t_j$.

В результате получаем следующую формулу для определения риска портфеля с возможностью $\mu_p(t)$:

$$D_p^t(w) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n C_{ij}\cdot w_i\cdot w_j. \tag{3}$$

В том случае, когда случайные величины являются некоррелированными, формула (3) приобретает вид:

$$D_p^t(w) = \sum_{i=1}^{n} \left(c_{a_i a_i} + c_{\sigma_i \sigma_i} \cdot t_i^2\right) \cdot w_i^2.$$

Следующие две леммы характеризуют свойства дисперсии, определяемой формулой (3).

Лемма 1. Функция $D_p^t(w)$ является выпуклой функцией относительно переменных w_1, ..., w_n.

Доказательство леммы представляется очевидным.

Лемма 2. Пусть коэффициенты ковариации $c_{a_i\sigma_j}$, $c_{\sigma_i\sigma_j}$ являются неотрицательными. Тогда функция $D_p^t(w)$ является монотонной относительно переменных t_1, ..., t_n.

4. Построение эквивалентного детерминированного аналога задачи

Рассмотрим ограничение $P\left\{R_p(w,\omega,\gamma) \geq m_d\right\} \geq p_0$.

Сначала построим для него эквивалентное, с возможностью $\mu_p(t)$. В соответствии с классическими результатами стохастического программирования [9] имеем:

$$\begin{aligned}
&P\left\{R_p(w,\omega,\gamma) \geq m_d\right\} = P\left\{\tfrac{R_p(w,\omega,\gamma)-\bar{R}_p^t(w)+\bar{R}_p^t(w)}{\sqrt{D_p^t(w)}} \geq \tfrac{m_d}{\sqrt{D_p^t(w)}}\right\} = \\
&= P\left\{\tfrac{R_p(w,\omega,\gamma)-\bar{R}_p^t(w)}{\sqrt{D_p^t(w)}} \geq \tfrac{m_d-\bar{R}_p^t(w)}{\sqrt{D_p^t(w)}}\right\} = 1 - P\left\{\tfrac{R_p(w,\omega,\gamma)-\bar{R}_p^t(w)}{\sqrt{D_p^t(w)}} < \tfrac{m_d-\bar{R}_p^t(w)}{\sqrt{D_p^t(w)}}\right\} = \\
&= 1 - \Phi_0\left(\tfrac{m_d-\bar{R}_p^t(w)}{\sqrt{D_p^t(w)}}\right) \geq p_0,
\end{aligned}$$

где Φ_0 - функция стандартного нормального распределения вероятностей.

Последнее неравенство эквивалентно неравенству:

$$\frac{m_d - \bar{R}_p^t(w)}{\sqrt{D_p^t(w)}} \leq \beta_0,$$

в котором β_0 есть решение уравнения $\Phi_0(t) = 1 - p_0$.

Окончательно получаем следующее неравенство, эквивалентное исходному, с возможностью $\mu_p(t)$:

$$\bar{R}_p^t(w) + \beta_0 \cdot \sqrt{D_p^t(w)} \geq m_d. \qquad (4)$$

Функция $D_p^t(w)$ является выпуклой. Поэтому при $p_0 \geq 0,5$ параметр $\beta_0 \leq 0$ и ограничение (4) будет определять выпуклое множество допустимых решений с возможностью $\mu_p(t)$.

Предположим, что функции распределения возможностей μ_{X_i} являются квазивогнутыми, полунепрерывными сверху, имеющими конечные носители.

Пусть

$$F_t(w, X_1(\gamma), ..., X_n(\gamma)) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(a_i^0 + \sigma_i^0 \cdot X_i(\gamma)\right) +$$
$$+\beta_0 \,(\sum_{i,j=1}^{n} (c_{a_i a_j} + c_{a_i \sigma_j} \cdot X_j(\gamma) + c_{\sigma_i a_j} \cdot X_i(\gamma) +$$
$$+c_{\sigma_i \sigma_j} \cdot X_i(\gamma) \cdot X_j(\gamma)) \cdot w_i \cdot w_j \,)^{\frac{1}{2}}$$

Тогда при $\tau = \pi$ ограничение (2) может быть приведено к следующей эквивалентной записи:

$$\pi \{\gamma \in \Gamma : \, F_t(w, \, X_1(\gamma), ..., X_n(\gamma)) \geq m_d\} =$$
$$= \pi \left\{ \bigcup_{m_d \leq t} (\gamma \in \Gamma : \, F_t(w, X_1(\gamma), ..., X_n(\gamma)) = t) \right\} =$$
$$= \sup_{m_d \leq t} \pi \{\gamma \in \Gamma : \, F_t(w, X_1(\gamma), ..., X_n(\gamma)) = t\} =$$
$$= \sup_{m_d \leq t} \pi \left\{ \bigcup_{u_1, \, ..., \, u_n : \, F_t(w, u_1, ..., u_n) = t} (\gamma \in \Gamma : \, X_1(\gamma) = u_1, \, ..., \, X_n(\gamma) = u_n) \right\} =$$
$$= \sup_{m_d \leq t} \pi \left\{ \bigcup_{u_1, \, ..., \, u_n : \, F_t(w, u_1, ..., u_n) = t} \mu_{X_1, \, ..., X_n} \, (u_1, \, ..., \, u_n) \right\} =$$
$$= \sup_{m_d \leq t} \; \sup_{u_1, \, ..., \, u_n : \, F_t(w, u_1, ..., u_n) = t} \min \{\mu_{X_1}(u_1), \, ..., \, \mu_{X_n}(u_n)\} \geq \alpha_0.$$

При сделанных предположениях относительно свойств возможностных распределений, на основании обобщённой теоремы Вейерштрасса, $\exists$ точки $t^* \in E^1$, $u_i^* \in X_i(\alpha_0)$, $i = 1, \, ..., \, n$, $X_i(\alpha_0) - \alpha_0$ - уровневое множество нечёткой величины X_i, на которых достигается sup функции $\min \{\mu_{X_1}(u_1), \, ..., \, \mu_{X_n}(u_n)\}$ при ограничении $F_t(w, u_1, ..., u_n) = t$ и при этом

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \left(a_i^0 + \sigma_i^0 \cdot u_i^*\right) + \beta_0 \,(\sum_{i,j=1}^{n} (c_{a_i a_j} + c_{a_i \sigma_j} \cdot u_j^* + c_{\sigma_i a_j} \cdot u_i^* +$$
$$+c_{\sigma_i \sigma_j} \cdot u_i^* \cdot u_j^*) \cdot w_i \cdot w_j \,)^{\frac{1}{2}} = t^* \geq m_d,$$

а $\min \{\mu_{X_1}(u_1^*), \, ..., \, \mu_{X_n}(u_n^*)\} \geq \alpha_0$

При выполнении условий леммы 2 функция, находящаяся в левой части последнего неравенства, является монотонной функцией по параметрам $u_1^*, \, ..., \, u_n^*$, параметр t^* неограничен сверху. Поэтому ограничение по возможности и вероятности эквивалентно неравенству:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \left(a_i^0 + \sigma_i^0 \cdot u_i^+(\alpha_0)\right) + \beta_0 \,(\sum_{i,j=1}^{n} (c_{a_i a_j} + c_{a_i \sigma_j} \cdot u_j^+(\alpha_0) + c_{\sigma_i a_j} \cdot u_i^+(\alpha_0) +$$
$$+c_{\sigma_i \sigma_j} \cdot u_i^+(\alpha_0) \cdot u_j^+(\alpha_0)) \cdot w_i \cdot w_j \,)^{\frac{1}{2}} \geq m_d,$$

Здесь $u_j^+(\alpha_0)$ есть правая граница α_0 уровневого множества нечёткой величины $X_j(\gamma)$.

В случае $\tau = \nu$ и $\alpha_0 = 0,5$ можно показать аналогичным образом, что ограничение (2) имеет эквивалентный детерминированный аналог

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \left(a_i^0 + \sigma_i^0 \cdot u_i^-(\alpha_0)\right) + \beta_0 \, (\sum_{i,j=1}^{n} (c_{a_i a_j} + c_{a_i \sigma_j} \cdot u_j^-(\alpha_0) + c_{\sigma_i a_j} \cdot u_i^-(\alpha_0) +$$
$$+ c_{\sigma_i \sigma_j} \cdot u_i^-(\alpha_0) \cdot u_j^-(\alpha_0)) \cdot w_i \cdot w_j \,)^{\frac{1}{2}} \geq m_d.$$

где $u_j^-(\alpha_0)$ есть левая граница α_0 уровневого множества нечёткой величины $X_j(\gamma)$.

В окончательном виде эквивалентный чёткий аналог задачи (1), (2) принимает следующую форму:

$$V_p(w) \to \min, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i \left(a_i^0 + \sigma_i^0 \cdot u_i^+(\alpha_0)\right) + \beta_0 \, (\sum_{i,j=1}^{n} (c_{a_i a_j} + c_{a_i \sigma_j} \cdot u_j^+(\alpha_0) + \\ + c_{\sigma_i a_j} \cdot u_i^+(\alpha_0) + c_{\sigma_i \sigma_j} \cdot u_i^+(\alpha_0) \cdot u_j^+(\alpha_0)) \cdot w_i \cdot w_j \,)^{\frac{1}{2}} \geq m_d, \\ \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ \qquad w_1, \ldots, w_n \geq 0, \end{cases} \tag{6}$$

при $\tau = \pi$, и

$$V_p(w) \to \min, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i \left(a_i^0 + \sigma_i^0 \cdot u_i^-(\alpha_0)\right) + \beta_0 \, (\sum_{i,j=1}^{n} (c_{a_i a_j} + c_{a_i \sigma_j} \cdot u_j^-(\alpha_0) + \\ + c_{\sigma_i a_j} \cdot u_i^-(\alpha_0) + c_{\sigma_i \sigma_j} \cdot u_i^-(\alpha_0) \cdot u_j^-(\alpha_0)) \cdot w_i \cdot w_j \,)^{\frac{1}{2}} \geq m_d, \\ \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ \qquad w_1, \ldots, w_n \geq 0, \end{cases} \tag{8}$$

при $\tau = \nu$.

Полученные модели представляют собой задачи квадратичного программирования.

5. Исследование модели

Прежде всего отметим, что в частном случае, при $p_0 = 0.5$ и α_0=0.5, эквивалентные детерминированные аналоги (5),(6) и (7),(8) принимают следующий вид:

$$V_p(w) \to \min, \tag{9}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i \left(a_i^0 + \sigma_i^0 \cdot u_i^+(\alpha_0)\right) \geq m_d, \\ \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ \qquad w_1, \ldots, w_n \geq 0. \end{cases} \tag{10}$$

при $\tau = \pi$, и

$$V_p(w) \to \min, \tag{11}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \left(a_i^0 + \sigma_i^0 \cdot u_i^-(\alpha_0) \right) \geq m_d, \\ \quad \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ \quad w_1, \, ..., \, w_n \geq 0. \end{cases} \tag{12}$$

при $\tau = \nu$, так как при $p_0 = 0.5$ β_0=0.

В этих моделях исключается влияние моментов второго порядка на формирование множества допустимых портфелей. Модели (9),(10) и (11),(12) совпадают также с эквивалентными детерминированными аналогами модели

$$V_p(w) \to \min, \tag{13}$$

$$\begin{cases} \tau \left\{ E \left\{ R_p(w, \, \omega, \, \gamma) \geq m_d \right\} \right\} \geq \alpha_0, \\ \quad \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ \quad w_1, \, ..., \, w_n \geq 0, \end{cases} \tag{14}$$

исследованной в [7]. В модели (13),(14) учет неопределенности основывается на принципе ожидаемой возможности. При $p_0 \geq 0,5$ модели (5),(6) и (7),(8) являются задачами выпуклого программирования, так как в этом случае $\beta_0 \leq 0$.

6. Заключение

В работе представлена и исследована одна из моделей портфеля минимального риска. Установлена ее связь с моделью портфеля минимального риска, основанной на принципе принятия решения известном, как ожидаемая возможность. Следующим шагом в развитии данной концепции моделирования неопределенности может быть обобщение этих моделей на случай, когда моменты второго порядка нечетких случайных величин, представляющих доходности финансовых активов, определяются в нечеткой форме [19].

В плане дальнейших исследований представляется также необходимым развитие модели на ситуацию, когда агрегирование возможностной информации осуществляется на основе слабой t-нормы [20]. Известно, что в этом случае «размытость» результата при аддитивных операциях снижается. В конечном итоге это должно выразиться в сужении коридора для риска, определяемого моделями (9),(10) и (11),(12), в рассматриваемом контексте «возможность-необходимость».

Список литературы

[1] И.А.Язенин. Портфели минимального риска и максимальной эффективности в условиях нечетких случайных данных, Сложные системы: моделирование и оптимизация, Тверь, ТвГУ, 2001г., С. 59 – 63.

[2] И.А.Язенин. О методах оптимизации инвестиционного портфеля в нечеткой случайной среде, Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация, Тверь, ТвГУ, 2002г., С. 130 – 135.

[3] И.А.Язенин. Об одной модели оптимизации инвестиционного портфеля, Вестник ТвГУ, №2. Серия «Прикладная математика», выпуск 1, 2003г., С. 102 – 105.

[4] A.V.Yazenin. Optimization with Fuzzy Random Data and its Application in Financial Analysis, International Conference on Fuzzy Sets and Soft Computing in Economics and Finance, June 17-20, Proceedings, 2004, Saint-Petersburg, Russia, pp.16-32.

[5] E.N.Grishina. On One Method of Portfolio Optimization with Fuzzy Random Data, International Conference on Fuzzy Sets and Soft Computing in Economics and Finance, June 17-20, Proceedings, 2004, Saint-Petersburg, Russia, pp.493-498.

[6] Yazenin A.V., E.N.Grishina. About one approach to portfolio optimization, 11th Zittau East West fuzzy Colloguium, Proceedings (Wissenschaftliche Berichte, Heft 81, Nr. 2029-2059), HS Zittau/Gorlitz, Germany, 2004, pp. 219-226

[7] A.V. Yazenin, E.N.Grishina, M.Wagenknecht. Metods of searching for quasieffective portfolios in fuzzy random environment, 15th Zittau East West fuzzy Colloguium, Proceedings (Wissenschaftliche Berichte, Heft 100, Nr. 2360-2395), HS Zittau/Gorlitz, Germany, 2008, pp. 121-125

[8] H.Markowitz. Portfolio selection: efficient diversification of investments. Wiley. New York, 1959.

[9] Ю.М. Ермольев. Методы стохастического программирования. М., Наука, 1976.

[10] A.V.Yazenin. On the problem possibilistic optimization, Fuzzy sets and systems 81(1996) 133-140.

[11] A.V.Yazenin, M.Wagenknecht. Possibilistic optimization. Brandenburgische Technische Universitat. Cottbus. Germany. 1996.

[12] Y.Feng, L.Hu, H.Shu. The variance and covariance of fuzzy random variables, Fuzzy sets and systems 120(2001) 487-497.

[13] S.Nahmias. Fuzzy variables, Fuzzy sets and systems 1(1978) 97-110.

[14] S.Nahmias. Fuzzy variables in random environment, In: Gupta M.M. et. al.(eds.). Advances in fuzzy sets Theory. NHCP. 1979.

[15] H.Kwakernaak. Fuzzy random variables – 1.Definitions and theorems, Inf. Sci.. 15(1978) 1-29.

[16] M.D.Puri, D.Ralesky. Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Appl. 114(1986) 409-422.

[17] L.A.Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy sets and systems 1(1978) 3-28.

[18] Д.Дюбуа, А.Прад. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.,1990.

[19] М.Ю. Хохлов, А.В. Язенин. Расчет числовых характеристик нечетких случайных величин. Вестник ТвГУ, №2, Серия «Прикладная математика», выпуск 1, 2003г., с.39-43.

[20] Солдатенко И.С., Язенин А.В. Задача возможностной оптимизации с взаимно t-связанными параметрами: сравнительное изучение, Известия РАН. Теория и системы управления, 2008, № 5, с.87-98.