МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

УДК 519.6

T-ОБОБЩЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ОТНОШЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ФОРМАЛИЗАЦИИ ПРЕДПОЧТЕНИЙ[1]

Гордеев Р.Н.
Кафедра информационных технологий

Поступила в редакцию 01.08.2010, после переработки 18.10.2010.

В работе рассматриваются T-обобщения нечетких отношений и их применение при формализации предпочтений в возможностном контексте. Установлены некоторые основные свойства T-обобщенных отношений предпочтения.

We are going to focuse on T-fuzzy extensions of possibilistic binary relations. And research how we may use it in a preference detection problem. Also some main properties of fuzzy extensions are established.

Ключевые слова: t-норма; t-конорма; функция агрегирования; возможностные отношения; T-обобщения возможностных отношений; возможностные отношение подобия.
Keywords: t-norm; t-conorm; aggregation function; possibilistic relations; T-extensions of possibilistic relations; possibilistic similarity relation.

Введение

В работе [13] мы обобщили нечеткое бинарное отношение на случай, когда оно связывает возможностные величины. При этом предполагалось, что нечеткие величины минисвязанны, а в качестве функции агрегирования при построении образа нечеткого отображения использовалась t-норма $T = \min$. В настоящей работе мы продолжаем развитие данного подхода и обобщаем результаты работ [5, 7, 9] на контекст T-связанных возможностных величин в предположении, что в качестве функции агрегирования используется, вообще говоря, произвольная t-норма.

1. Нечеткие отношения

Пусть тройка $(\Gamma, \mathscr{P}(\Gamma), \pi)$ есть возможностное пространство, $\mathbb{R}$ – числовая прямая.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №10-01-00052-а.

Определение 1. Возможностным (нечетким) отношением *называется отображение* $R : \Gamma \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *где* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *– декартово произведение. Распределением возможных значений отношения* R *называется функция* $\mu_R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,1]$, *определяемая по правилу*

$$\mu_R(x,y) = \pi\big\{\gamma \in \Gamma \mid R(\gamma) = (x,y)\big\}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$\mu_R(x,y)$ *– возможность того, что* x *и* y *находятся в отношении* R.

Определение 2. *Для заданного нечеткого отношения* R *на* $\mathbb{R}$ *его* нечетким обобщением *на* $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R})$ *называется отображение* $\widetilde{R} : \Gamma \to \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R})$, *характеризуемое функцией распределения возможностей* $\mu_{\widetilde{R}} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to [0,1]$, *такой что*

$$\mu_{\widetilde{R}}(x,y) = \mu_R(x,y) \tag{1}$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$. *Здесь* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ *– множество возможностных величин.*

Определение 3. *Пусть* $\mathbb{R}$ *– вещественная прямая,* T *–* t*-норма, а* R *– нечеткое отношение. Обобщенное нечеткое отношение* $\widetilde{R}^T$ *на* $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R})$, *определенное для всех возможностных величин* X *и* Y, *характеризуемых функциями распределения возможностей* $\mu_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ *и* $\mu_Y : \mathbb{R} \to [0,1]$, *и имеющее функцию распределения возможностей* $\mu_{\widetilde{R}^T}(X,Y)$, *такую что*

$$\mu_{\widetilde{R}^T}(X,Y) = \sup\big\{T(\mu_R(x,y), T(\mu_X(x), \mu_Y(y))) \mid x, y \in \mathbb{R}\big\}, \tag{2}$$

называется T-нечетким расширением (или T-расширением) отношения R.

Определение 4. *Будем говорить, что нечеткое отношение*

i. *рефлексивное, если* $R(a,a) = 1$, $\forall a \in A$,

ii. *иррефлексивное, если* $R(a,a) = 0$, $\forall a \in A$,

iii. *симметричное, если* $R(a,b) = R(b,a)$, $\forall a,\ b \in A$,

iv. *антисимметричное, если* $\min\{R(a,b), R(b,a)\} = 0$, $\forall a,\ b \in A$,

v. *транзитивное, если* $\min\{R(a,b), R(b,c)\} \le R(a,c)$, $\forall a,\ b,\ c \in A$.

Определение 5. *Для заданного нечеткого отношения* R *на множестве* A *мы определим следующие нечеткие отношения:*

i. *отношение обратное к заданному,* $R^{-1}(a,b) = R(b,a)$,

ii. *дополнение,* $R^c(a,b) = 1 - R(a,b)$,

iii. *двойственное,* $R^d(a,b) = 1 - R(b,a)$, *или, эквивалентно,* $R^d = (R^{-1})^c$.

По определению *возможностное (нечеткое) отношение предпочтения* R, заданное на множестве A, есть бинарное возможностное отношение. Для двух произвольных элементов $a, b \in A$, $R(a,b)$ есть степень, с которой a предпочтительнее b.

Аналогичное утверждение справедливо и для *обобщенного возможностного отношения предпочтения* $\widetilde{R}$, заданного на $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Оно представляет собой обобщенное возможностное бинарное отношение, характеризующее для двух возможностных величин $X, Y \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ степень превосходства одной величины над другой.

2. t-нормы и функции отрицания

Триангулярной нормой (или t-нормой) называется вещественная функция двух переменных $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, обладающая следующими свойствами:

i. $T(0,0) = 0$, $T(1,x) = T(x,1) = x$, (граничное условие);

ii. $T(x,y) = T(y,x)$, (коммутативность);

iii. $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$, (ассоциативность);

iv. Если $w \le x$ и $y \le z$, то $T(w,y) \le T(x,z)$, (монотонность).

Если помимо приведенных выше четырех условий t-норма удовлетворяет условию

v. $T(x,x) < x$, $\forall x \in (0,1)$,

то она нызвается *Архимедовой* t-нормой.

Пусть $R^+ = [0, +\infty)$, тогда справедливо следующее утверждение [11].

Теорема 1. *t-норма является непрерывной Архимедовой t-нормой тогда и только тогда, когда*

$$T(x,y) = f(g(x) + g(y)), \tag{3}$$

где

- $g : [0,1] \to R^+$ *- непрерывная, убывающая функция, такая что* $g(1) = 0$,
- $f : R^+ \to [0,1]$ *- непрерывная функция, такая что* $f(x) = g^{-1}(x)$, $\forall x \in [0, g(0)]$ *и* $f(x) = 0$, $\forall x > g(0)$*;*

или, эквивалентно,

$$T(x,y) = g^{-1}(\min(g(x) + g(y), g(0))). \tag{4}$$

Будем говорить, что t-норма T имеет *нулевые делители*, если она помимо прочих удовлетворяет условию

vi. $T(x,y) = 0$ для каких либо $x, y \in (0,1]$.

Справедливо следующее утверждение [11].

Лемма 1. *Непрерывная Архимедова t-норма T имеет нулевые делители тогда и только тогда, когда в выражении (3) функция* $g(0) < +\infty$.

Каноническим примером t-нормы с нулевыми делителями является t-норма Лукасевича

$$W(x,y) = \max\{x + y - 1, 0\}.$$

Теорема 2. *t-норма T является непрерывной Архимедовой t-нормой с нулевыми делителями тогда и только тогда, когда существует автоморфизм ϕ единичного интервала такой, что*

$$T(x, y) = \phi^{-1}(W(\phi(x), \phi(y))$$

Функция ϕ называется W-генератором t-нормы T.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть t-норма T определена выражением (4), где $g(0) < +\infty$. Положим

$$\phi(x) = 1 - \frac{g(x)}{g(0)}. \tag{5}$$

Очевидно, что ϕ является автоморфизмом единичного интервала. Далее, из (5)

$$g(x) = g(0) - g(0)\phi(x)$$

и

$$g^{-1}(x) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{x}{g(0)}\right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} T(x, y) &= g^{-1}(\min(g(x) + g(y), g(0))) \\ &= \phi^{-1}\left(1 - \frac{\min(g(0) - g(0)\phi(x) + g(0) - g(0)\phi(y), g(0))}{g(0)}\right) \\ &= \phi^{-1}(\max(\phi(x) + \phi(y) - 1, 0)) \\ &= \phi^{-1}(W(\phi(x), \phi(y))). \end{aligned}$$

Доказательство достаточности очевидно. □

Определение 6. Триангулярной конормой (t-конормой) *называется вещественная функция двух переменных $S : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, удовлетворяющая следующим условиям:*

- ***i.*** *$S(1, 1) = 1$, $S(0, x) = S(x, 0) = x$, (граничное условие);*
- ***ii.*** *$S(x, y) = S(y, x)$, (коммутативность);*
- ***iii.*** *$S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$, (ассоциативность);*
- ***iv.*** *Если $w \leq x$ и $y \leq z$, то $S(w, y) \leq S(x, z)$, (монотонность).*

t-конорма S двойственна *данной t-норме T, если*

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$$

верно для всех $x, y \in [0, 1]$. Обратно, t-норма T двойственна *данной t-конорме S, если*

$$T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y)$$

верно для всех $x, y \in [0, 1]$. Кроме того заметим, что каждая t-конорма удовлетворяет дополнительному граничному условию $S(1, x) = S(x, 1) = 1$ для всех $x \in [0, 1]$.

Определение 7. *Отрицанием называют строго убывающую функцию* $N : [0,1] \to [0,1]$, *такую что* $N(N(x)) = x$, $\forall x, y \in [0,1]$.

Определенная таким образом функция удовлетворяет граничным условиям:

- $\mathrm{N}(0) = 1$,
- $\mathrm{N}(1) = 0$.

Примером отрицания может служить функция $N(x) = 1 - x$.

Справедливо следующее утверждение [12].

Предложение 1. *Функция* $N(x)$ *является отрицанием тогда и только тогда, когда существует непрерывная строго возрастающая функция* $\eta : [0,1] \to R$ *такая, что* $\eta(0) = 0$ *и*

$$N(x) = \eta^{-1}(\eta(1) - \eta(x)). \tag{6}$$

Теорема 3. *Функция* $N(x)$ *является отрицанием тогда и только тогда, когда существует автоморфизм* ϕ *единичного интервала такой, что*

$$N(x) = N^{\phi}(x) = \phi^{-1}(1 - \phi(x)). \tag{7}$$

Функция ϕ *называется генератором отрицания* N

Доказательство. Следует непосредственно из соотношения (6), если положить $\eta(x) = \eta(1)\phi(x)$. □

Заметим, что отрицание, определенное выражением (7), является стандартным отрицанием только в том случае, если

$$\phi(x) + \phi(1 - x) = 1, \forall x \in [0,1]. \tag{8}$$

3. Нечеткие отношения строгого предпочтения

Есть множество способов определения нечеткого отношения строгого предпочтения P, связанного с нечетким отношением предпочтения R. Рассмотрим несколько примеров.

В [5] приводится следующий пример нечеткого отношения строгого предпочтения.

Пример 1. $P(a,b) = \max\{R(a,b) - R(b,a), 0\}$, $\forall a, b \in A$

В [7] это делается следующим образом.

Пример 2.

$$P(a,b) = \begin{cases} R(a,b), & R(a,b) > R(b,a), \forall a, b \in A. \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В [9] предложен следующий пример.

Пример 3. Пусть T - t-норма, удовлетворяющая условию $T(x,y) = 0$, если $x + y \le 1$, для всех $x, y \in [0,1]$. Тогда

$$P(a,b) = T(R(a,b), 1 - R(b,a)) = T(R(a,b), R^d(a,b)).$$

Заметим, что примеры 1, 3 идентичны, если $T = W$. Все приведенные выше нечеткие отношения строгого предпочтения являются транзитивными и антисимметричными нечеткими отношениями, если соответствующие им нечеткие отношения R являются транзитивными [5, 7, 9]. Более того, они удовлетворяют классическому определению: aPb тогда и только тогда, когда aRb и не bRa.

Мы будем придерживаться общего определения нечеткого отношения строгого предпочтения.

Определение 8. *Пусть R - нечеткое отношение, заданное на множестве A. Тогда антисимметричное нечеткое отношение P будем называть нечетким отношением строгого предпочтения (связанным с R), если оно удовлетворяет условиям:*

- *Независимость несвязанных альтернатив (IA). Для произвольных $a, b \in A$ $P(a, b)$ зависит только от значений $R(a, b)$ и $R(b, a)$. Таким образом существует функция $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ такая, что*

$$P(a, b) = f(R(a, b), R(b, a)), \forall a, b \in A. \tag{9}$$

- *Положительная связь (PA). Функция f в выражении (9) неубывающая по первому аргументу и невозрастающая по второму аргументу.*

Нечеткие отношения из примеров 1 - 3, очевидно, удовлетворяют этим условиям.

Теорема 4. *Нечеткое бинарное отношение P, удовлетворяющее условиям (IA) и (PA), является антисимметричным тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &f(x, y) = 0, \text{ если } x \le y, \\ &\text{или, эквивалентно,} \\ &f(x, y) > 0, \text{ если } x > y, \end{aligned} \tag{10}$$

для всех $x, y \in [0, 1]$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть R будет нечетким отношением предпочтения таким, что $R(a, b) = x$ и $R(b, a) = y$ для некоторых заданных $x \le y$. Поскольку выполнено условие (PA), то

$$f(x, y) \le f(y, y) \le f(y, x).$$

Поэтому

$$0 = \min\{P(a, b), P(b, a)\} = \min\{f(x, y), f(y, x)\} = f(x, y).$$

Необходимость. Пусть $R(a, b) = x$ и $R(b, a) = y$. Тогда

$$\min\{P(a, b), P(b, a)\} = \min\{f(x, y), f(y, x)\} = 0$$

согласно (10), так как либо $x \le y$, либо $y \le x$. □

Согласно выражению (10) антисимметричность нечеткого отношения строгого предпочтения P эквивалентна следующему условию:

$$P(a,b) > 0, \text{ если } R(a,b) > R(b,a), \forall a,b \in A. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда нечеткое отношение строгого предпочтения определено посредством t-норм и отрицаний. Пусть T - t-норма, а N - отрицание. Определим P следующим образом:

$$P(a,b) = T\{R(a,b), N(R(b,a))\}. \tag{12}$$

В выражении (12) T можно рассматривать как модель связи «И», а N как модель связи «НЕ». Тогда, согласно (12), «a строго предпочтительнее b» тогда и только тогда, когда «a предпочтительнее b» И «b НЕ предпочтительнее a».

Если отрицание в выражении (12) является стандартным отрицанием с генератором ϕ, удовлетворяющем условию (8), то выражение (12) определяет нечеткое отношение строгого предпочтения из примера 3, приведенном в [9].

Любое нечеткое отношение P, определенное согласно (12), удовлетворяет условиям (IA) и (PA). Тогда, согласно (10), оно является нечетким отношением строгого предпочтения тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &T(x,N(y)) = 0, \text{ если } x \le y, \\ &\text{или, эквивалентно,} \\ &T(x,y) = 0, \text{ если } x \le N(y), \end{aligned} \tag{13}$$

для всех $x,y \in [0,1]$.

Лемма 2. *Условие (13) эквивалентно*

$$T(x,N(x)) = 0, \forall x \in [0,1]. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $x = y$. Тогда (14) непосредственно следует из (13). Положим, что $T(x,N(x)) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, и $x \le y$. Тогда $N(x) \ge N(y)$ и $0 = T(x,N(x)) \ge T(x,N(y))$. □

Заметим, что (14) можно рассматривать как модель закона исключенного третьего в многозначной логике.

Из (14) следует, что T должна иметь нулевые делители. Поэтому существует два автоморфизма единичного интервала ϕ и ψ такие, что

$$P(a,b) = W^{\phi}(R(a,b)), N^{\psi}(R(b,a))). \tag{15}$$

Теорема 5. *Нечеткое бинарное отношение P, определенное выражением (15), является нечетким отношением строгого предпочтения тогда и только тогда, когда*

$$N^{\psi} \le N^{\phi} \tag{16}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что (16) эквивалентно выражению

$$W^{\phi}(x, N^{\psi}(x)) = 0.$$

Действительно,

$$W^{\phi}(x, N^{\psi}(x)) = \phi^{-1}(\max\{\phi(x) + \phi(\psi^{-1}(1 - \psi(x))) - 1, 0\}) = 0$$

эквивалентно

$$\phi(x) + \phi(\psi^{-1}(1 - \psi(x))) \leq 1,$$

что эквивалентно (16). □

4. Транзитивность нечетких отношений строгого предпочтения

В классической теории отношение строгого предпочтения, построенное на основе транзитивного отношения предпочтения, является транзитивным. Для нечетких отношений строгого предпочтения из примеров 1 и 2 транзитивность установлена в [5] и [7] соответственно. В этом разделе мы покажем, что любое нечеткое отношение строгого предпочтения, построенное на основе транзитивного нечеткого отношения предпочтения, является транзитивным.

Лемма 3. *Пусть R - транзитивное нечеткое отношение такое, что*

$$R(c, a) < R(a, c) \text{ и } R(b, c) < R(c, b),$$

для некоторых a, b и c из A. Тогда

$$R(b, a) = \min\{R(b, c), R(c, a)\}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\min\{R(c, a), R(b, c)\} < \min\{R(a, c), R(c, b)\}. \tag{17}$$

Далее, из транзитивности R, имеем

$$\min\{R(b, c), R(c, a)\} \leq R(b, a), \tag{18}$$

$$\min\{R(c, b), R(b, a)\} \leq R(c, a), \tag{19}$$

$$\min\{R(b, a), R(a, c)\} \leq R(b, c). \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует

$$\min\{R(c, b), R(a, c), R(b, a)\} \leq \min\{R(c, a), R(b, c)\},$$

учитывая (17), имеем

$$R(b, a) \leq \min\{R(c, a), R(b, c)\}. \tag{21}$$

Окончательно из (18) и (21) имеем

$$R(b, a) = \min\{R(b, c), R(c, a)\}.$$

□

Теорема 6. *Нечеткое отношение строгого предпочтения P, построенное на основе транзитивного нечеткого отношения предпочтения R, является транзитивным нечетким отношением.*

Доказательство. Нам необходимо доказать, что

$$\min\{P(a,c), P(c,b)\} \leq P(a,b),$$

для любых a, b и c из A. Достаточно рассмотреть случай, когда $P(a,c) > 0$ и $P(c,b) > 0$. Тогда, согласно (11), $R(c,a) < R(a,c)$ и $R(b,c) < R(c,b)$, что влечет, согласно лемме 3,

$$R(b,a) = \min\{R(b,c), R(c,a)\}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\min\{P(a,c), P(c,b)\} &= \min\{f(R(a,c), R(c,a)), f(R(c,b), R(b,c))\} \\
&\leq \min\{f(R(a,c), R(b,a)), f(R(c,b), R(b,a))\} \\
&= f(\min\{R(a,c), R(c,b)\}, R(b,a)) \\
&\leq f(R(a,b), R(b,a)) \\
&= P(a,b).
\end{aligned}$$

□

Если A является конечным множеством, что нечеткое отношение на нем может быть представлено матрицей. В этом случае теорема 6 является частным случаем теоремы 2 из [3].

Заключение

В работе в возможностном контексте представлены T-обобщенные нечеткие отношения предпочтения и выявлены условия их транзитивности. Развитие идей T-связанных возможностных величин и функций агрегирования на основе t-нормы позволит в дальнейшем применить полученные результаты при построении эквивалентных детерминированных аналогов задач возможностной оптимизации с T-связанными возможностными параметрами и T-обобщенными нечеткими отношениями. В указанном направлении активно ведутся исследования, в частности, получены результаты для задач возможностной оптимизации с T-связанными возможностными параметрами [14]. Представляется логичным обобщить эти результаты на случай использования T-обобщенных возможностных бинарных отношений.

Список литературы

[1] Azcél J. Lectures on Functional Equations and their Applications / J. Azcél. — New York: Academic Press, 1969.

[2] Calvo T. On fuzzy similarity relations / T. Calvo // Fuzzy Sets and Systems. — 1992. — no. 47. — Pp. 121–123.

[3] Hashimoto H. Transitivity of generalized fuzzy matrices / H. Hashimoto // Fuzzy Sets and Systems. — 1985. — no. 17. — Pp. 83–90.

[4] Mayor G. Contribució a l'estudi de models matematics per a la lógic de la vaguetat: Ph.d. thesis / Univ. Islas Baleares. — 1984.

[5] Orlovski S. Decision-making with a fuzzy preference relation / S. Orlovski // Fuzzy Sets and Systems. — 1978. — no. 1. — Pp. 155–167.

[6] Ovchinnikov S. V. Fuzzy relations / S. V. Ovchinnikov // Fuzzy Sets and Systems. — 1981. — no. 6. — Pp. 169–195.

[7] Ovchinnikov S. V. Structure of fuzzy binary relations / S. V. Ovchinnikov // Fuzzy Sets and Systems. — 1981. — no. 6. — Pp. 169–195.

[8] Ovchinnikov S. V. On fuzzy classifications / S. V. Ovchinnikov, T. Riera // Recent Developments in Fuzzy Sets and Possibility Theory / Ed. by R. R. Yager. — New York: Pergamon Press, 1980. — Pp. 119–132.

[9] Roubens M. Some properties of choice functions based on valued binary relations / M. Roubens // European J. Oper. Res. — 1989. — no. 40. — Pp. 309–321.

[10] Schweizer B. Associative functions and statistical triangle inequalities / B. Schweizer, A. Sklar // Publ. Math. Debrecen. — 1961. — no. 8. — Pp. 77–80.

[11] Schweizer B. Probabilistic Metric Spaces / B. Schweizer, A. Sklar. — North-Holland: Amsterdam, 1983.

[12] Trillas E. Sobre functiones de negation en ia teoria de conjunctos diffusos / E. Trillas // Stochastica. — 1979. — no. 3. — Pp. 47–59.

[13] Гордеев Р. Н. Метод решения одной задачи возможностного программирования / Р. Н. Гордеев, А. В. Язенин // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2006. — № 3. — С. 121–128.

[14] Солдатенко И. С. Задачи возможностной оптимизации с взаимно T-связанными параметрами: сравнительное изучение / И. С. Солдатенко, А. В. Язенин // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 5. — С. 87–98.