

УДК 531

## РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ТОРОИДАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Колдунов В.А.\*, Кудинов А.Н.\*, Черепанов О.И.\*\*

\*Кафедра математического моделирования (ТвГУ)

\*\*Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,  
институт физики прочности и материаловедения СО РАН

Представлены алгоритм и результаты расчета напряженно-деформированного состояния и устойчивости твердых тел, оболочек, пластин с трехмерных позиций. В основу реализованного алгоритма расчета положены энергетические принципы механики деформируемых твердых тел и вариационно-разностный метод. Исходные соотношения представлены в тороидальной системе координат общего типа.

Algorithm of calculation of the stress-strain condition and stability of solid bodies, shells, plates from three-dimensional positions are represented. The calculation is based on energy principles of mechanics of solid deformed bodies and realized by the variations difference method. The coordinate system that can be regarded as generalization of the circular toroidal one is used.

Целью данной работы является разработка эффективных алгоритмов расчета упругопластических деформаций и критических нагрузок потери устойчивости элементов конструкций сложной формы на основе вариационно-разностного метода. Примерами таких элементов конструкций могут служить цилиндрические тела с сечением круговой или эллиптической формы, тороидальные оболочки с эллиптической, овальной или более сложной формой поперечного сечения, пластины, оболочки (и массивные тела) сферической формы или с образующей более сложной формы. Область, в которой остаются актуальными задачи расчета деформаций таких тел, весьма широка: от проблем проектирования относительно небольших измерительных приборов до оценки напряженно-деформированного состояния элементов Земной коры.

В частности, относительно толстостенные тороидальные трубки (трубчатые пружины) применяются в качестве чувствительных элементов датчиков давления – трубок Бурдона, гофрированные цилиндрические мембраны широко применяются в манометрах. Примеры таких типичных элементов изображены на рис. 1.

Расчет напряжений и деформаций в докритической области проводится вариационно-разностным методом, в основе которого лежит уравнение Лагранжа [1]:

$$\iiint_V [(\sigma_{ij}^E + \Delta^* \sigma_{ij}) \cdot \delta \Delta^* e_{ij} \cdot dV^{(n)}] + \iiint_V [(\sigma_{ij}^E + \Delta^* \sigma_{ij}) \cdot \delta \Delta^* \omega_{ij} \cdot dV^{(n)}]$$

$$\iiint_V (\bar{P}_i + \Delta \bar{P}_i) \cdot \delta(\Delta u_i) \cdot dV^{(n)} - \iint_{S_\sigma} (\bar{T}_i + \Delta \bar{T}_i) \cdot \delta(\Delta u_i) \cdot dS^{(n)} = 0, \quad (1)$$

где  $\bar{P}_i + \Delta \bar{P}_i$  и  $\bar{T}_i + \Delta \bar{T}_i$  - заданные объемные и поверхностные силы соответственно. Ограничения вида  $u_i = \bar{u}_i$  перемещений на части поверхности  $S_u$  учитываются в формуле (1) равенством:  $\delta(\Delta \bar{u}_i) = 0$  на  $S_u$ .

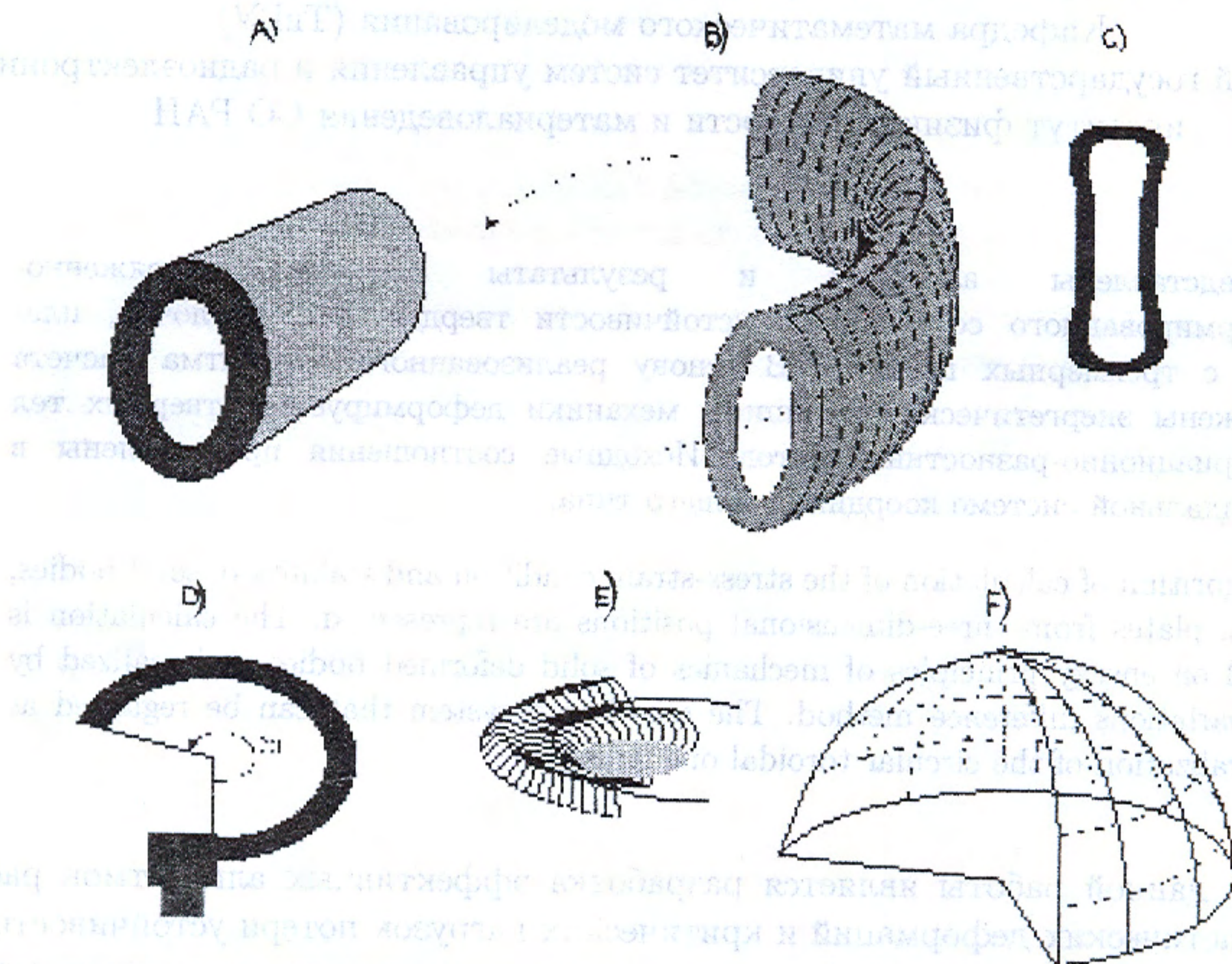


Рис. 1: Примеры схематичного представления элементов конструкций в виде типичных тел вращения: цилиндра А); фрагмента тора с сечениями эллиптической В) или более сложной С) формы, которые применяются, в частности, при изготовлении манометрических трубок D); круглых гофрированных пластин E); фрагментов сферических тел F), например, при идеализированном представлении элементов Земной коры

Для определения критической нагрузки используется энергетический критерий устойчивости и соответствующее и вариационное уравнение [1]:

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij*}) \cdot \delta(e_{ij}^{(n)} + e_{ij*}) \cdot dV^{(n)} - \\ & - \iiint_V (\bar{P}_i^{(n)} + \bar{P}_{i*}) \cdot \delta(u_*^i) \cdot dV^{(n)} - \\ & - \iint_{S_\sigma} (\bar{R}_i^{(n)} + \bar{R}_{i*}) \cdot \delta(u_*^i) \cdot dS^{(n)} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где варьируются только величины, которые зависят от величин  $u_*^i$ , соответствующих появлению смежной формы равновесия.

При расчете напряженно-деформированного состояния тел вращения, которые представляют собой идеализацию формы реальных конструкций или составляющих их элементов, немаловажное значение имеет выбор удобной для моделирования системы координат. Правильный учет симметрии геометрических форм, механических свойств материала конструкции, способа приложения нагрузки в ряде случаев дает либо снижение размерности задачи, либо может существенно снизить вычислительные затраты за счет приемлемого увеличения шага дискретизации по пространству и времени.

Для разработки алгоритма расчета тел цилиндрической, сферической или тороидальной формы, использована специальная система криволинейных координат  $O\gamma\psi\theta$  (рис. 2), в которой компоненты тензора деформаций принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} \quad (\gamma = x^1, \quad \psi = x^2, \quad \theta = x^3), \\ \varepsilon_{\psi\psi} &= \frac{1}{R_1 + \gamma} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{u_\gamma}{R_1 + \gamma} X_2, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{[R_0 + (R_2 + \gamma) \sin \psi]} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{u_\psi \cos \psi}{[R_0 + (R_2 + \gamma) \sin \psi]} + \frac{u_\gamma \sin \psi}{[R_0 + (R_2 + \gamma) \sin \psi]}, \\ \varepsilon_{\gamma\psi} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_\psi}{\partial \gamma} + \frac{1}{(R_1 + \gamma)} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi} - \frac{u_\psi}{(R_1 + \gamma)} \right\}, \\ \varepsilon_{\psi\theta} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(R_1 + \gamma)} \frac{\partial u_\theta}{\partial \psi} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{[R_0 + (R_2 + \gamma) \sin \psi]} \frac{\partial u_\psi}{\partial \theta} - \frac{u_\theta \cos \psi}{[R_0 + (R_2 + \gamma) \sin \psi]} \right\}, \\ \varepsilon_{\theta\gamma} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{[R_0 + (R_2 + \gamma) \sin \psi]} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \gamma} - \right. \\ &\left. - \frac{u_\theta \sin \psi}{[R_0 + (R_2 + \gamma) \sin \psi]} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $R_0$  – радиус оси тора,  $R_1, R_2$  – радиусы кривизны, которые характеризуют локальную кривизну элемента поверхности тора эллиптического сечения.

Соотношения для деформаций в цилиндрической и сферической системах координат получаются как частные из приведенных формул. Для сферы угол  $\theta$  будет соответствовать долготе, угол  $\psi$  – широте,  $\gamma$  – радиальной координате.

Квазистатический процесс деформации материала рассматривается как последовательность шагов нагружения и соответствующая последовательность состояний равновесия, устойчивость которых проверяется на каждом шаге. При появлении смежной формы равновесия, прежде всего, уточняется значение критической нагрузки, а затем определяется соответствующая форма потери устойчивости.

На каждом шаге нагружения используются линеаризованные определяющие соотношения вида:

$$\Delta^* \sigma_{ij} = C_{ijkl}^* \cdot \Delta^* e_{kl} - \beta_{ij}^* \cdot \Delta T, \quad (4)$$

причем разгрузка считается упругой (здесь  $\Delta T$  – изменение температуры).

Тензоры касательных модулей  $C_{ijkl}^*, \beta_{ij}^*$  на каждом шаге нагружения рассчитываются на основе модели пластичности, предложенной в [2] с учетом поправок на изменение температуры. Уравнения модели подробно описаны в [3, 4] и имеют вид:

$$f(\sigma_{ij}, \beta, T) = s_{ij} \cdot s_{ij} - 2p(\beta) \cdot (I_1^0 - \sigma_{kk}) \cdot F(T) = 0,$$

$$p(\beta) = p_0 + [(2/3)I_1^0/a] \beta - \beta^2, \quad (5) \quad \beta = a \cdot \varepsilon_{kk}^{pl}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon_{kk}^{pl}}{\varepsilon^D},$$

где  $\varepsilon_{kk}^{pl}$  - объемная пластическая деформация,  $p_0, I_1^0, a$  - параметры модели, определяющие упрочнение и накопление повреждений.

Расчет напряженно-деформированного состояния и критических нагрузок осуществляется вариационно-разностным методом с использованием межэлементных аппроксимирующих соотношений [5,6].

Для проверки разработанного алгоритма проведены трехмерные тестовые расчеты некоторых известных задач для стальных изотропных оболочек: расчет напряженно-деформированного состояния трубок Бурдона, для которых имеются аналитические решения [7], расчет критических нагрузок и форм потери устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии, некоторых других задач. Хотя ограничения памяти современных компьютеров все еще ограничивают возможности решения трехмерных квазистатических задач, тем не менее, некоторые из них уже могут быть решены на сетках, обеспечивающих приемлемую точность.

В качестве примера сравнения в табл. 1 приведены результаты расчета перемещений свободного конца трубки Бурдона (трубчатой пружины) при различных значениях параметров в сравнении с аналитическим решением [7], которое имеет вид:

$$w = p \frac{1-\nu^2}{E} \frac{R^2}{bh} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{\alpha}{\beta + \kappa^2} \times \sqrt{(1 - \cos \gamma_0)^2 + (\gamma_0 - \sin \gamma_0)^2}, \quad \kappa = \frac{Rh}{a^2}$$

где  $p$  - давление,  $R$  - радиус пружины,  $a, b$  - полуоси эллиптического сечения трубки,  $h$  - толщина трубки,  $\gamma_0$  - угол раствора пружины,  $E, \nu$  - модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

Таблица 1: Сравнение решений (сетка 80\*40\*10)

Параметры $P=1$ МПа	Аналитическое решение, $w$	Численное решение, $w$
$\gamma_0 = 356^\circ, R=10$ см, $a=3$ см, $b=2$ см, $h=0.5$ см, $\alpha=0.636, \beta=0.062$	0.0027 см	0.0026
$\gamma_0 = 178^\circ$	0.00159 см	0.0017

Результаты сравнительных расчетов подтверждают хорошую точность решения, при этом численное решение, основанное на более полном учете характеристик конструкции, значительно информативнее приближенных аналитических формул.

На рис. 3 приведены результаты расчета вариационно-разностным методом формы потери устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Эти расчеты проводились с целью тестирования алгоритма и сравнения расчетных данных с результатами экспериментов Р. Теннисона [8] по устойчивости оболочек при осевом сжатии. Разница между критическими нагрузками, полученными в экспериментах [8] и рассчитанными по предлагаемой методике составляет  $\approx 5\%$ .

Таким образом, разработанные алгоритмы расчета напряженно-деформированного состояния, оценки критических нагрузок и форм потери устойчивости могут послужить эффективным средством проектирования элементов конструкций различного назначения.

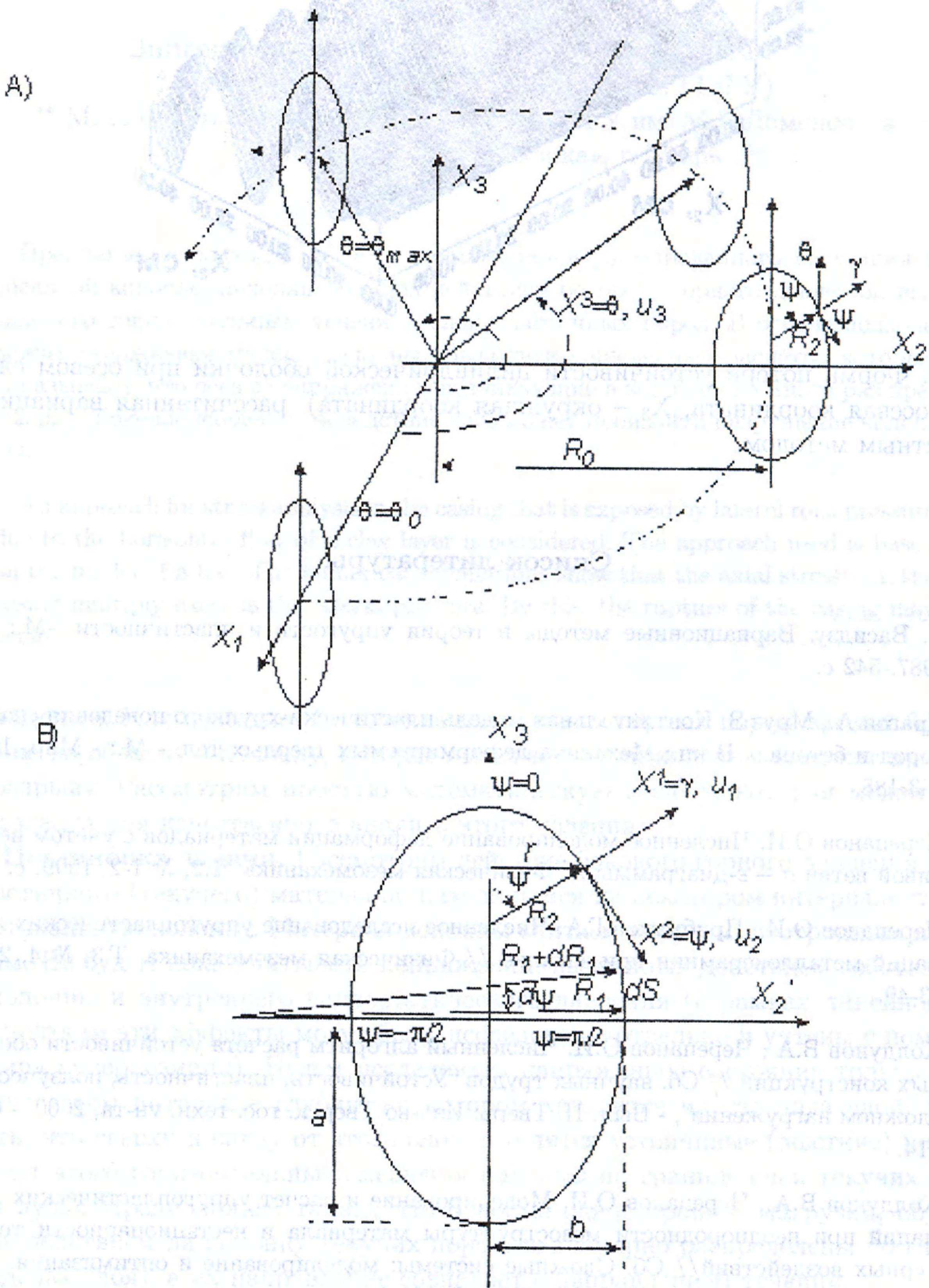


Рис. 2: Декартова  $OX_1X_2X_3$  (А) и специальная  $O\gamma\psi\theta$  (А,В) системы координат для расчета тора эллиптического сечения

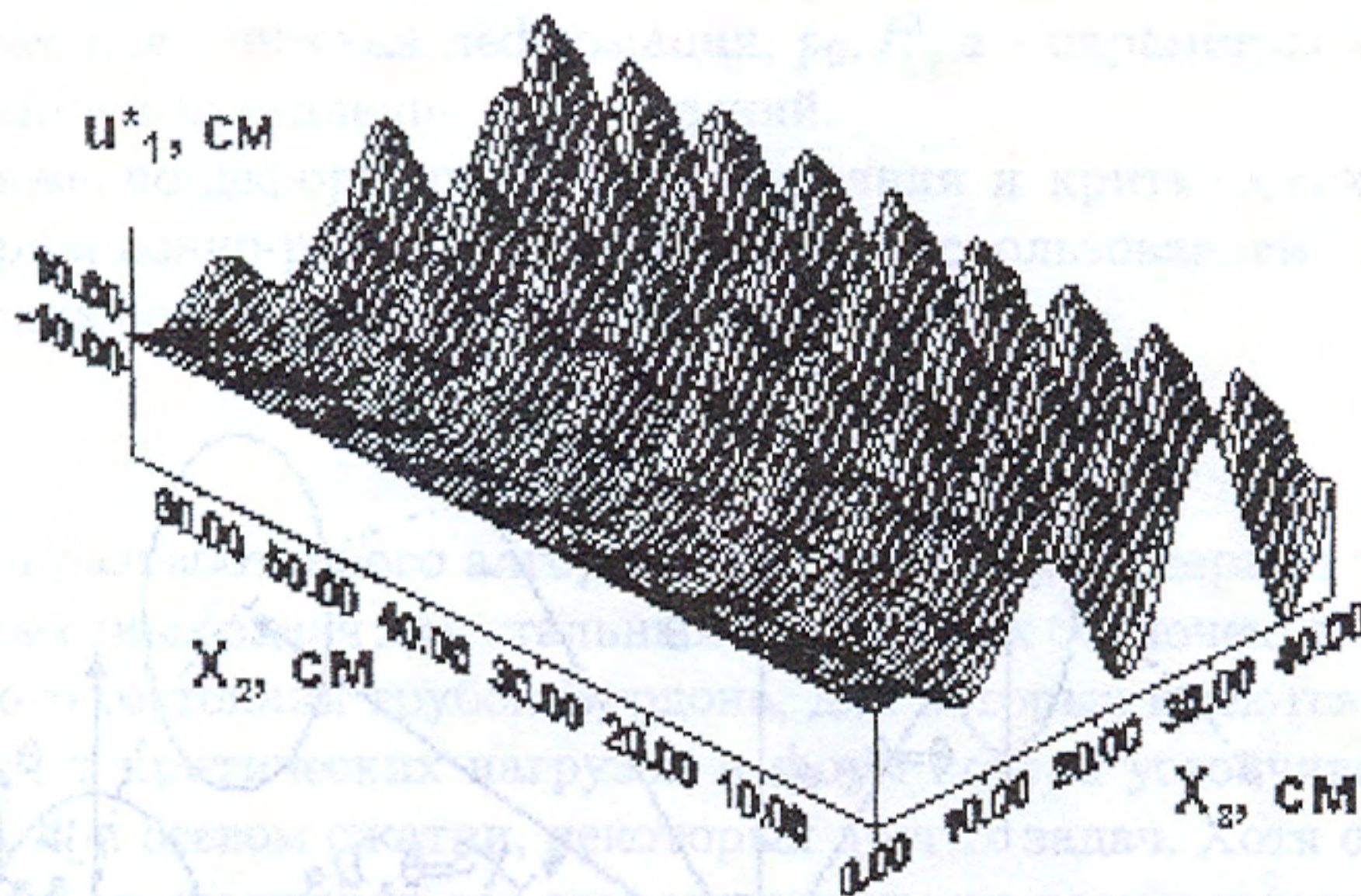


Рис. 3: Форма потери устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии ( $X_2$  – осевая координата,  $X_3$  – окружная координата), рассчитанная вариационно-разностным методом

### Список литературы

- [1] К. Васидзу. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. -М.: Мир,- 1987.-542 с.
- [2] Драгон А., Мруз З. Континуальная модель пластически-хрупкого поведения скальных пород и бетона. - В кн.: Механика деформируемых твердых тел. - М.: - Мир, 1983, с. 163-188.
- [3] Черепанов О.И. Численное моделирование деформации материалов с учетом неустойчивой ветви  $\sigma - \epsilon$ -диаграммы. // Физическая мезомеханика. Т.2, № 1-2, 1999, с. 5-16.
- [4] Черепанов О.И., Прибытков Г.А. Численное исследование упругопластических деформаций металлокерамики при закалке // Физическая мезомеханика. Т.3, № 4, 2000, с. 33-49.
- [5] Колдунов В.А., Черепанов О.И. Численный алгоритм расчета устойчивости оболочечных конструкций // Сб. научных трудов "Устойчивость, пластичность, ползучесть при сложном нагружении", - Вып. II, Тверь: Изд-во Тверск. гос. техн. ун-та, 2000. - С. 108-114.
- [6] Колдунов В.А., Черепанов О.И. Моделирование и расчет упругопластических деформаций при неоднородности мезоструктуры материала и нестационарности температурных воздействий// Сб. Сложные системы: моделирование и оптимизация. Тверь: Изд-во Тверск. гос. техн. ун-та, 2001. - С. 129-141.
- [7] Л.Е. Андреева. Упругие элементы приборов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1981. — 392 с.
- [8] Tennyson R.C. A note on the classical buckling load of circular cylindrical shells under axial compression. — AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 2, pp. 475-476.