УДК 510.676, 519.7

ОГРАНИЧЕННЫЕ ПСЕВДОКОНЕЧНАЯ ОДНОРОДНОСТЬ И ИЗОЛИРОВАННОСТЬ[1]

М.А. Тайцлин
Кафедра информатики

In [8], it was presented a relativize version of results from [2] as to the collapse theorem. In the paper, I propose improved and more accurate presentation of the version. The properties of (M, I)-Pseudo-finite Homogeneity and (M, I)-Isolation are in the focus of the paper. They both imply the collapse theorem. It is investigated so called P-reducible theories. It is proved that, for the P-reducible theories, a version of (M, I)-Isolation Property holds. So the collapse theorem holds for P-reducible theories.

In [5], it was proposed an expansion of Presburger's arithmetics by a unary function such that the first-order theory of the expansion is decidable and the expansion has an independent formula. I prove that the (M, I)-Isolation Property does not hold for the expansion.

В [8] я предложил специализированную версию достаточных условий для того, чтобы использование общих знаний, собранных в основных операциях и отношениях универсума, не увеличивало выразительных возможностей языка запросов. Это усиление результатов работы [2] позволило охватить и теории без независимой формулы, справедливость трансляционной теоремы для которых была доказана в [1]. Здесь я предлагаю усовершенствованное и более аккуратное изложение этой версии. Вместе с замечательной теоремой С.М. Дудакова о том, что любая P-сводимая теория является P-ограниченной, это даёт короткое доказательство трансляционной теоремы для P-сводимых теорий и, в частности, для теорий без независимой формулы, которые, как доказано в [1], все являются P-сводимыми.

В [10] указано много примеров обогащений арифметики Пресбургера одной одноместной операцией с разрешимой элементарной теорией. Там же замечено, что для всех этих примеров имеет место трансляционная теорема. Принципиально другой такой пример предложен в [5]. Я предлагаю некоторое усовершенствование этого примера и замечаю, что свойство ограниченной изолированности для него не выполняется. Остаётся открытым вопрос, справедлива ли для этого примера трансляционная теорема.

Введение. Типичной моделью базы данных со времён Кодда является реляционная модель, в которой база данных мыслится как собрание конечного числа конечных таблиц [6, 7]. Эта модель реализуется в большинстве существующих средств

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (номер проекта 0001 00254).

управлениями базами данных и в предлагаемых ими языках запросов. При этом в качестве языка запросов обычно предлагается та или другая стилизация языка логики предикатов первого порядка.

Обычно при этом удобно предполагать, что элементы хранящихся таблиц выбираются из фиксированного множества, называемого универсумом. Например, в качестве такового можно взять множество натуральных чисел, множество всех слов некоторого конечного алфавита или какое-то другое множество. Это множество должно быть бесконечным. Оно может быть снабжено своими собственными отношениями и операциями. Эти отношения и операции обычно по своей природе не могут быть заданы конечными таблицами.

Ещё Кодд в качестве языка запросов предложил использовать язык реляционных выражений, практически эквивалентный языку логики предикатов первого порядка.

В языке запросов, кроме имён хранящихся таблиц, можно использовать и имена отношений и операций самого универсума. Другими словами, в языке запросов можно рассматривать как хранящуюся информацию, так и общие знания об универсуме. Например, язык SQL, используемый в системе Oracle и в других подобных системах, разрешает использовать как имена хранящихся таблиц, так и отношение сравнения и арифметические операции над числами.

Итак, запросами являются формулы логики предикатов первого порядка. Расширяет ли использование общих знаний выразительные возможности языка запросов?

Обычно рассматривают упорядоченные универсумы. Более специальный вопрос: расширяет ли использование упорядочения универсума выразительные возможности языка запросов.

Понятно, что надо рассматривать только запросы, не зависящие от упорядочения универсума, другими словами, не меняющиеся при любой перестановке элементов универсума. Такие запросы называют генерическими.

Ответ не зависит от универсума и является положительным. Даже если мы ничего не знаем о порядке, мы всегда можем предложить генерический запрос, который нельзя записать без использования отношения порядка [2].

Поразительно, но во многих случаях имеет место трансляционная теорема: использование других общих знаний дополнительно к упорядочению уже не расширяет выразительные возможности языка запросов. Подробнее об этом можно прочитать в [1, 2, 3].

Вопрос, изучению которого посвящена эта работа, состоит в описании тех универсумов, для которых верна трансляционная теорема. Ряд достаточных условий для этого содержится в [2]. Это — условия псевдоконечной однородности и изолированности. С другой стороны, в [1] трансляционная теорема доказана для универсумов без независимой формулы. Как связаны между собой эти условия?

В [8] я предложил более ограниченные понятия (M, I)-псевдоконечной однородности и (M, I)-изолированности, в которых рассматриваются состояния не над любыми неразличимыми последовательностями, а над некоторой фиксированной неразличимой последовательностью. Это во многих случаях позволяет значительно облегчить доказательство трансляционной теоремы. Здесь я предлагаю упрощённое и более аккуратное изложение результатов [8]. В частности, оказывается, что универсумы без независимой формулы удовлетворяют условию (M, I)-изолированности и, значит, справедливость трансляционной теоремы для них является следствием моих теорем.

Доказательство трансляционной теоремы для универсумов без независимой формулы в [1] состоит из двух частей. Сначала доказывается, что для такого универсума U сигнатуры L найдётся такая малая (M, I), которая P-сводима для L и для которой $M \equiv U$. Для краткости, такие универсумы назовём P-сводимыми. Эта часть очень понятна и проста. Затем доказывается, что такие универсумы P-ограничены. Эта часть использует отсутствие независимой формулы, и понять её я не в состоянии.

Уже в [8] я доказал, что P-сводимые и P-ограниченные универсумы обладают трансляционной теоремой. Но недавно С.М. Дудаков доказал замечательную теорему, что каждая (M, I) с неразличимой последовательностью I, которая является P-сводимой, является также P-ограниченной. Доказательство Дудакова достаточно простое и прозрачное. Значит, для всех P-сводимых универсумов справедлива трансляционная теорема. Отсюда получается простое и понятное доказательство трансляционной теоремы для универсумов без независимой формулы.

В [10] указано много примеров обогащений арифметики Пресбургера одной одноместной операцией с разрешимой элементарной теорией. Там же замечено, что для всех этих примеров имеет место трансляционная теорема. Принципиально другой пример обогащения арифметики Пресбургера одной одноместной операцией с разрешимой элементарной теорией предложен в [5]. Я предлагаю некоторое усовершенствование этого примера и замечаю, что свойство ограниченной изолированности для него не выполняется. Остаётся открытым вопрос, справедлива ли для этого примера трансляционная теорема. Если бы это было не так, то опровергалась бы старая гипотеза, что все обогащения арифметики Пресбургера с разрешимой элементарной теорией обладают трансляционной теоремой.

Статья организована следующим образом. Начальные сведения из теории моделей, нужные для понимания определений и доказательств, не приводятся. Их можно найти в [9]. Определения, заимствованные из [3, 2, 1], напротив, напоминаются. Делается это хотя бы для уточнения перевода на русский язык. По этой причине имеется некоторое пересечение с [10].

1. Определения. Под универсумом сигнатуры L понимается любая модель для языка L, где L есть последовательность символов отношений и операций. *Схемой базы данных* является конечный набор имён отношений с указанием числа аргументных мест каждого отношения. Все отношения, имена которых включены в рассматриваемую схему базы данных, предполагаются конечноместными. Для заданного универсума U *состоянием* рассматриваемой схемы ρ базы данных, или ρ-состоянием, или базой данных с рассматриваемой схемой ρ называется отображение, которое каждому имени отношения местности k из рассматриваемой схемы ρ приписывает конкретное подмножество множества U^k. Это конкретное отношение представляет собой набор последовательностей длины k элементов универсума и может быть задано как таблица с k столбцами и некоторым множеством строк. По этой причине каждая база данных с данной схемой ρ представляет собой собрание конечного числа таблиц. Число таблиц и число столбцов в каждой таблице задаются схемой ρ. Но множество строк и сами эти строки в таблицах могут меняться. Так что имеется много разных состояний у заданной схемы. Если все элементы всех строк всех таблиц для рассматриваемого состояния s содержатся во множестве X элементов универсума, то мы будем говорить, что это состояние s является состоянием над X. Состояние является конечным, если все таблицы конечны, другими словами, если каждая таблица содержит конечное число строк. Итак, состояние для схемы ρ задаёт некоторое обогащение универсума сигнатуры L до модели языка $L \cup \rho$.

В качества языка запросов мы используем язык логики предикатов первого порядка. Это значит, что запросами являются формулы этого языка. В формулах можно использовать либо имена отношений рассматриваемой схемы ρ и символ $<$ отношения порядка, либо также и все другие символы операций и отношений из сигнатуры универсума. Формулы первого вида мы называем *ограниченными* ρ-запросами, а формулы второго вида — *расширенными* ρ-запросами. Если формула, задающая запрос, является замкнутой (не содержит свободных переменных), то запрос называется булевым.

Запись $\Phi(\overline{x})$ означает, что все свободные переменные формулы Φ содержатся в последовательности $\overline{x}$. Тогда записи $\overline{a} \in \Phi(s)$ и $s \models \Phi(\overline{a})$ означают, что формула Φ истинна на состоянии s, когда набору переменных $\overline{x}$ приписаны в качестве значений натуральные числа $\overline{a}$.

Мы рассматриваем только формулы специального вида, которые задают так называемые *локально генерические запросы*. Запрос Φ называется локально генерическим для состояний из класса K (или относительно состояний из класса K), если

$$\overline{a} \in \Phi(s) \;\Leftrightarrow\; \rho(\overline{a}) \in \Phi(\rho(s))$$

для любого такого частичного $<$-изоморфизма $\rho : X \to U$, что $X \subseteq U$, для любого состояния s над X из класса K и для любой последовательности $\overline{a}$ элементов X. Здесь образ последовательности есть последовательность образов, а образ конечной таблицы является таблицей, составленной из образов элементов заданной таблицы. Образ состояния (конечной совокупности таблиц) представляет собой совокупность образов этих таблиц. Если K является классом всех конечных состояний, то говорят о локальной генеричности запроса для конечных состояний.

Формулу логики предикатов первого порядка сигнатуры Ω мы короче называем Ω-формулой. Структуры U и V сигнатуры Ω называются *элементарно эквивалентными* (мы пишем, что $U \equiv V$), если для любой замкнутой Ω-формулы ϕ выполняется условие:

$$\phi \text{ истинна в } U \text{ тогда и только тогда, когда } \phi \text{ истинна в } V.$$

Замкнутая Ω-формула короче называется Ω-высказыванием. Ω-теорией называется совокупность Ω-высказываний. Ω-теория T называется полной, если все её модели элементарно эквивалентны. Полная Ω-теория T называется Ω-теорией структуры U сигнатуры Ω и обозначается через $\mathrm{Th}(U)$, если T есть множество всех Ω-высказываний, истинных в U.

Обогащение сигнатуры L универсума схемой ρ базы данных (другими словами, объединение сигнатур L и ρ) мы обозначаем через $L(\rho)$. Для $L(\rho)$-высказывания ψ и натурального числа m легко строится такое L-высказывание ψ_m, что для любой L-структуры V это высказывание ψ_m справедливо в V тогда и только тогда, когда ψ выполняется для всех ρ-состояний над V, активная область которых содержит не более m элементов. Активная область состоит из всех элементов всех строк всех таблиц.

Мы включаем $L(\rho)$-высказывание ψ во множество $F(V, \rho)$ тогда и только тогда, когда ψ_m принадлежит $\mathrm{Th}(V)$ для любого натурального m. Понятно, что $W \equiv V$ влечёт $F(V, \rho) = F(W, \rho)$.

По этой причине $L(\rho)$-теория $F(T,\rho)$ корректно определяется как $F(W,\rho)$, где W есть произвольная модель полной L-теории T.

ρ-состояние s для L-структуры W называется *псевдоконечным* в W, если (W,s) есть модель $L(\rho)$-теории $F(W,\rho)$.

2. Достаточные условия для справедливости трансляционной теоремы.

Теорема 1. *Пусть U — произвольный универсум, а расширенный булевый ρ-запрос ϕ является локально генерическим для конечных состояний над U.*

Предположим, что для некоторой несчётной мощности κ, удовлетворяющей условию $\kappa = \kappa^*$, существует такая специальная модель (V,J) мощности κ, что J является неразличимой последовательностью в V, $V \equiv U$ и запрос ϕ является локально генерическим относительно псевдоконечных состояний над J в V.

Тогда ϕ эквивалентна в U для конечных состояний над U некоторой ограниченной ρ-формуле.

Доказательство. Пусть κ и (V,J) удовлетворяют условиям теоремы. Это означает, что κ является несчётной мощностью, удовлетворяющей условию $\kappa = \kappa^*$, (V,J) имеет мощность κ, J является неразличимой последовательностью в V, $V \equiv U$ и запрос ϕ является локально генерическим относительно псевдоконечных состояний над J в V.

Предположим, что ϕ не эквивалентна в U никакой ограниченной ρ-формуле для конечных состояний над U.

По теореме 5.1 из [2] тогда существуют такие модель $(W,I) \equiv (V,J)$ и псевдоконечное $\bar{\rho}$-состояние (p,p') над (W,I), что некоторый $<$-автоморфизм h модели W переводит p в p', но при этом $(W,p) \models \phi(\rho)$ и $(W,p') \models \neg\phi(\rho')$. Можно предполагать, что (W,I,p,p') является специальной моделью мощности κ. Но тогда $(W,I) = (V,J)$.

Пусть σ и σ' — это такие копии ρ, что $\rho, \rho', \sigma, \sigma'$ попарно не содержат общих символов. Пусть

$$\eta = \rho \cup \rho' \cup \sigma \cup \sigma' \cup \{F, F'\},$$

где F, F' — новые бинарные символы отношений.

$L(P)$-теорию структуры (V,J) обозначим через T. Мы желаем доказать совместность совокупности $L(P,\eta)$-высказываний Γ, утверждающей существование такого η-состояния (r,r',s,s',F,F') для некоторой модели $L(P)$-теории T, для которого:

1. (r,r') удовлетворяет $\mathrm{Th}(V,J,p,p')$.

2. (r,r',s,s',F,F') удовлетворяет $F(T,\eta)$.

3. F и F' являются частичными $<$-изоморфизмами, переводящими r в s и r' в s', соответственно.

4. s and s' являются состояниями над P.

5. s удовлетворяет $\phi(\sigma)$, и s' удовлетворяет $\neg\phi(\sigma')$.

Допустим, что Γ совместна. Пусть $(W_1, J_1, r_1, r_1', s_1, s_1', F_1, F_1')$ является специальной моделью мощности κ для Γ. Тогда (W_1, J_1) — специальная модель мощности κ. Так что можно предполагать, что $(W_1, J_1) = (V,J)$. Из (1) следует, что (W_1, r_1, r_1') и (V,p,p') изоморфны. Пусть $<$-автоморфизм h_1 структуры V переводит r_1 в r_1'. Из (2) следует, что η-состояние $(r_1, r_1', s_1, s_1', F_1, F_1')$ псевдоконечно в (V, J). Из (3) следует, что частичный $<$-изоморфизм $g = F_1' \circ h_1 \circ F_1^{-1}$ переводит s_1 в s_1'. Из (4) следует, что s_1 в s_1' являются состояниями над J. Из (5) следует, что s_1 удовлетворяет $\phi(\sigma)$, а s_1' не удовлетворяет $\phi(\sigma')$. Это означает, что ϕ не является локально генерическим для псевдоконечных состояний над J в V, что противоречит выбору (V, J).

По теореме компактности осталось доказать конечную совместность Γ. Достаточно для каждой $\gamma \in \mathrm{Th}(V, J, p, p')$ найти конечное η-состояние (r, r', s, s', F, F') над V, которое удовлетворяет γ, (3), (4) и (5).

Так как (p, p') является псевдоконечным над (V, J), найдётся конечное $\bar{\rho}$-состояние (r, r') над V, удовлетворяющее $\gamma \wedge \phi(\rho) \wedge \neg\phi(\rho')$. Совсем просто найти s, s', F, F', удовлетворяющие (3) и (4). Так как ϕ локально генеричен для конечных состояний, выполняется (5). Это доказывает конечную совместность Γ и завершает доказательство теоремы. ■

Определение 1. *Пусть M — модель полной теории T и бесконечное множество I является неразличимой последовательностью в M.*

Теория T обладает первым свойством (M, I)-псевдоконечной однородности, если для всяких $(N, J) \equiv (M, I)$, псевдоконечных подмножеств A и B множества J в модели N, конечных подмножеств C и D модели N, элементарного отображения $h : (A \cup C) \to (B \cup D)$ в N с ω-насыщенной (N, A, B, h) и для любого $a \in N$ существует такой элемент $b \in N$, что $h \cup \{(a, b)\}$ является элементарным отображением в N.

Определение 2. *Пусть M — модель полной теории T и бесконечное множество I является неразличимой последовательностью в (M, I).*

Теория T обладает вторым свойством (M, I)-псевдоконечной однородности, если для всяких $(N, J) \equiv (M, I)$, псевдоконечных подмножеств A и B множества J в модели N, конечных подмножеств C и D модели N, элементарного отображения $h : (A \cup C) \to (B \cup D)$ в (N, J) с ω-насыщенной (N, J, A, B, h) и для любого $a \in N$ существует такой элемент $b \in N$, что $h \cup \{(a, b)\}$ является элементарным отображением в (N, J).

Теорема 2. *Пусть $M \equiv U$ и бесконечное множество I является неразличимой последовательностью в M (в (M, I)).*

Предположим, что теория универсума U имеет первое (второе) свойство (M, I)-псевдоконечной однородности.

Тогда каждый расширенный локально генерический для конечных состояний над U запрос ϕ эквивалентен для конечных состояний над U некоторому ограниченному запросу.

Доказательство теоремы 2 следует доказательству теоремы 5.4 из [2].

Доказательство. Достаточно проверить, что ϕ удовлетворяет условию теоремы 1.

Пусть $\kappa = \kappa^* > \omega$. Пусть $(V, J) \equiv (M, I)$ и (V, J) — специальная модель мощности κ.

Рассмотрим такие псевдоконечные ρ-состояния r и r' над J в V, что r переводится в r' частичным $<$-изоморфизмом g в V, область определения которого есть псевдоконечное в V множество A, являющееся активной областью состояния r, а множество значений g есть псевдоконечное множество A', являющееся активной областью состояния r'.

Надо проверить, что ϕ выполняется в (V,r) тогда и только тогда, когда ϕ выполняется в (V,r').

При этом можно предполагать, что (V,J,A,A',g) является ω-насыщенной. Действительно, (V,J,A,A',g) является ω-насыщенной, если ω-насыщенной является модель (V,J,r,r',g). Рассмотрим специальную модель

$$(V_0, I_0, r_0, r'_0, g_0)$$

мощности κ, элементарно эквивалентную (V,J,r,r',g). Достаточно доказать утверждение для $(V_0, I_0, r_0, r'_0, g_0)$. Но последняя модель является ω-насыщенной, так как $\mathrm{cf}(\kappa) \geqslant \omega$.

Достаточно показать, что g является $L(\rho)$-элементарным частичным отображением из (V,r) в (V,r'). Но благодаря L-неразличимости J (соответственно (L,P)-неразличимости J), отображение g заведомо является L-элементарным ((L,P)-элементарным) отображением, и, кроме того, частичным $L(\rho)$-изоморфизмом.

Для доказательства, используя игру Эренфойхта, достаточно для конечного C_i допустить, что $g_i : (A \cup C_i) \to (A' \cup C'_i)$ продолжает g и является L-элементарным ((L,P)-элементарным) отображением, выбрать произвольное $c \in V$ и найти такой $c\,' \in V$, что, положив $g_{i+1} = g_i \cup \{(c, c\,')\}$, отображение g_{i+1} окажется L-элементарным ((L,P)-элементарным) отображением.

Но существование такого $c\,'$ следует из определения (M,I)-псевдоконечной однородности, из того, что активная область каждого псевдоконечного состояния является псевдоконечным множеством (это замечено в доказательстве теоремы 5.4 из [2]) и из того, что обогащение ω-насыщенной структуры конечным множеством выделенных элементов оставляет структуру ω-насыщенной. ■

Определение 3. *Пусть M — модель полной теории T и бесконечное множество I — неразличимая последовательность в M.*

Теория T обладает первым свойством (M,I)- изолированности, если для любых специальной $(N,J) \equiv (M,I)$, псевдоконечного подмножества A множества J в N, конечного подмножества C модели N и элемента a модели N, существует такое счётное $A_0 \subseteq A$, что $\mathrm{tp}(a/(A_0 \cup C))$ изолирует $\mathrm{tp}(a/(A \cup C))$ в N.

Определение 4. *Пусть M — модель полной теории T и бесконечное множество I — неразличимая последовательность в (M,I).*

Теория T обладает вторым свойством (M,I)- изолированности, если для любых специальной $(N,J) \equiv (M,I)$, псевдоконечного подмножества A множества J в N, конечного подмножества C модели N и элемента a модели N, существует такое счётное $A_0 \subseteq A$, что $\mathrm{tp}(a/(A_0 \cup C))$ изолирует $\mathrm{tp}(a/(A \cup C))$ в (N,J).

Теорема 3. *Первая (вторая) (M,I)-изолированность влечёт первую (вторую) (M,I)-псевдоконечную однородность.*

Доказательство теоремы 3 совпадает с доказательством в [2] теоремы 5.8.

Формулы сигнатуры $\{<\}$ называются порядковыми.

Определение 5. *Пусть K — некоторая совокупность (L, P)-формул. (M, I) называется (P, K)-сводимой, если для каждой формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ из K существует такая порядковая формула $\psi(\bar{w}, \bar{y})$, что для каждой последовательности $\bar{m}$ элементов M существует последовательность $\bar{c}_{\bar{m}} \in I$, для которой*

$$(\forall \bar{y} \in P)(\psi(\bar{c}_{\bar{m}}, \bar{y}) \equiv \phi(\bar{m}, \bar{y})).$$

Если K —это множество всех L-формул, то (P, K)-сводимость называется P-сводимостью. Если же K состоит из всех (L, P)-формул, то (P, K)-сводимость называется сильной P-сводимостью.

Определение 6. *(L, P)-формула называется P-ограниченной, если она не содержит P или имеет вид $(\forall x \in P)\Psi$ или $(\exists x \in P)\Psi$, где Ψ является P-ограниченной формулой. Структура (M, I) называется P-ограниченной, если каждая (L, P)-формула эквивалентна в (M, I) некоторой P-ограниченной формуле.*

Лемма 4. [1, 8]. *Каждая P-сводимая и P-ограниченная структура является сильно P-сводимой.*

Доказательство. Допустим, что для $\phi(\bar{x}, \bar{y}, z)$ существует такая порядковая формула $\psi(\bar{w}, \bar{y}, z)$, что для каждой последовательности $\bar{m}$ найдётся последовательность $\bar{c}_{\bar{m}} \in I$, для которой

$$(\forall \bar{y} \in P)(\forall z \in P)(\psi(\bar{c}_{\bar{m}}, \bar{y}, z) \equiv \phi(\bar{m}, \bar{y}, z)).$$

Тогда

$$(\forall \bar{y} \in P)((\forall z \in P)\psi(\bar{c}_{\bar{m}}, \bar{y}, z) \equiv (\forall z \in P)\phi(\bar{m}, \bar{y}, z)).$$

■

Теорема 5. *Пусть M — модель полной L-теории T и бесконечное множество I является неразличимой плотно упорядоченной без концевых точек последовательностью в M.*

Пусть (M, I) является P-сводимой и P-ограниченной. Тогда I является неразличимой последовательностью в (M, I) и T обладает вторым свойством (M, I)-изолированности.

Доказательство. Прежде всего заметим, что I является неразличимой последовательностью в (M, I).

Действительно, I не различается бескванторными (L, P)-формулами и L-формулами. Допустим, что I не различается P-ограниченными формулами с числом P-кванторов, не превосходящим n, и рассмотрим формулу $(\exists x \in P)\Psi$. Понятно, что если Ψ выполняется на первом наборе при некотором значении x, то Ψ выполняется и на так же упорядоченном втором наборе при таком значении x, относительное расположение которого относительно второго набора аналогично расположению первого значения x относительно первого набора. Рассмотрение формулы $(\forall x \in P)\Psi$ сводится к тому, что для каждого значения x можно найти другое значение x, которое расположено относительно первого набора аналогично тому, как первое значение x расположено относительно второго набора.

Возьмём произвольные элемент a и конечную последовательность элементов $\bar{m}$ в M. Для каждой (L, P)-формулы $\phi(z, \bar{x}, \bar{y})$ найдётся такая порядковая формула $\psi_\phi(\bar{w}, \bar{y})$, что найдётся последовательность $\bar{c}_{\bar{m},a} \in I$, для которой

$$(\forall \bar{y} \in P)(\psi_\phi(\bar{c}_{\bar{m},a}, \bar{y}) \equiv \phi(a, \bar{m}, \bar{y})). \tag{1}$$

Для каждой $\phi(z, \bar{x}, \bar{y})$ зафиксируем одну последовательность $\bar{c}_{\bar{m},a}$, для которой имеет место (1). Из псевдоконечности A следует, что для каждого элемента b последовательности $\bar{c}_{\bar{m},a}$ либо этот элемент лежит в A и мы включаем b в A_ϕ, либо этот элемент больше всех элементов A и мы включаем наибольший элемент A в A_ϕ, либо этот элемент меньше всех элементов A и мы включаем наименьший элемент A в A_ϕ, либо существуют самый больший элемент $a^<(b)$ в A из меньших b и самый меньший элемент $a^>(b)$ в A из больших b, и мы включаем оба эти крайние элементы $a^<(b)$ и $a^>(b)$ в A_ϕ. Ясно, что порядковый бескванторный тип последовательности $\bar{d} \in A$ над $\bar{c}_{\bar{m},a}$ определяется порядковым бескванторным типом этой последовательности $\bar{d} \in A$ над A_ϕ. Объединение A_0 всех A_ϕ для всех ϕ счётно. Понятно, что тип a над A_0 в $(M, I, \bar{m})$ изолирует тип a над A в $(M, I, \bar{m})$. ■

Т е о р е м а 6. (Дудаков, 2002). *Каждая P-сводимая структура является P-ограниченной.*

С л е д с т в и е 1. *Пусть M — модель полной L-теории T и бесконечное множество I является неразличимой плотно упорядоченной без концевых элементов последовательностью в M.*

Пусть (M, I) является P-сводимой структурой. Тогда I является неразличимой последовательностью в (M, I) и T обладает вторым свойством (M, I)-изолированности.

О п р е д е л е н и е 7. *Пусть M — L-структура. L-формула $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ называется независимой в M, если она обладает следующим свойством:*

для каждого натурального n найдутся такие наборы значений

$$\overline{a}_1, \ \ldots, \ \overline{a}_n$$

для набора переменных $\overline{x}$, что для любого $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ найдётся такой набор значений $\overline{b}_I$ для набора переменных $\overline{y}$, что

$$I \ = \ \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \phi(\overline{a}_i, \overline{b}_I)\}.$$

Т е о р е м а 7. [1]. *Пусть M — модель T и бесконечное множество I является неразличимой плотно плотно упорядоченной без концевых элементов последовательностью в M.*

Если M не имеет никакой независимой формулы, то (M, I) является P-сводимой.

С л е д с т в и е 2. [1]. *Если U не имеет никакой независимой формулы, то каждый расширенный локально генерический для конечных состояний над U запрос эквивалентен для конечных состояний над U некоторому ограниченному запросу.*

Доказательство. Это непосредственно вытекает из следствия 1 и теоремы 5.2 из [1]. ■

3. Пример обогащения арифметики Пресбургера одной одноместной операцией, имеющего разрешимую элементарную теорию и независимую формулу, для которого свойство (M, I)-изолированности не выполняется. Через $\mathbb{N}$ обозначаем множество натуральных чисел. В [5] доказано, что элементарная теория структуры $< \mathbb{N}, <, +, |_p >$, где $p > 1$ — натуральное число и

$$x|_p\, y \leftrightarrow (\exists u)(\exists k)(x = p^u \& y = kx),$$

разрешима.

Тривиально и замечено в [4], что $< \mathbb{N}, <, +, |_p >$ имеет независимую формулу.

Пусть $x_i = p^{u_i}$ для $i = 1, 2, \ldots, m$, где $u_1, \ldots, u_m$ попарно различны. Пусть $y = x_1 + \cdots + x_m$. Тогда формула

$$(\exists u)(\exists v)(px|_p\, u \& v < x \& y = x + u + v) \tag{2}$$

выполняется для x тогда и только тогда, когда $x \in \{x_1, \ldots, x_m\}$. Поэтому (2) является независимой формулой.

Пусть $f_p(x) = y$ означает, что $(y|_p\, x \& \neg(py|_p\, x))$. Тогда

$$(y|_p\, x) \leftrightarrow (f_p(x) \geqslant y \& f_p(y) = y).$$

Поэтому структуры $< \mathbb{N}, <, +, |_p >$ и $< \mathbb{N}, <, +, f_p >$ интерпретируемы друг в друге.

Заметим ещё, что структуры $< \mathbb{N}, <, +, |_2 >$ и $< \mathbb{N}, <, \in>$ тоже интерпретируемы друг в друге, где $x \in y$ означает, что

$$(\exists z)(\exists u)(y = z + x + u \& z < x \& 2x|_2 u).$$

В самом деле, $x|_2 y$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$(x \in x \& (\forall v)(v < x \rightarrow v \notin y)).$$

Кроме того, $x + y = z$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered}(\exists u)(1 \notin u \& (\forall v)(\forall w)((v \in v \& w \in w \& \\ v < w \& (\forall t)((t \in t \& v < t) \rightarrow w \leqslant t)) \rightarrow \\ ((w \in u \leftrightarrow ((v \in x \& v \in y) \vee (v \in x \& v \in u) \vee (v \in y \& v \in u)))\& \\ (v \in z \leftrightarrow ((v \in x \& v \in y \& v \in u) \vee \\ (v \in x \& v \notin u \& v \notin y) \vee (v \in y \& v \notin u \& v \notin x))))))).\end{gathered}$$

Заметим, наконец, что $x < y$ можно использовать только для таких x и y, для которых $x \in x$ и $y \in y$. Действительно, $u < v$ для произвольных u и v выражается как

$$(\exists x)(x \in v \& x \notin u \& (\forall y)(x < y \rightarrow (y \in u \leftrightarrow y \in v))).$$

Поэтому мы рассматриваем структуру $< \mathbb{N}, <, \in>$, где $<$ определено только на $\{x \mid x \in x\}$.

Т е о р е м а 8. *Пусть* $M \equiv < \mathbb{N}, <, \in >$. *Пусть* I — *такое подмножество множества* $\{x \in M \mid x \in x\}$, *что* I *является неразличимой последовательностью в* M *and* $<$ *является плотным порядком без концевых точек на* I. *Тогда* $\mathrm{Th}(< \mathbb{N}, <, \in >)$ *не имеет свойства* (M, I)*-изолированности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(N, J) \equiv (M, I)$ и A — несчётное псевдоконечное подмножество множества J в N. Рассмотрим такой $a \in N$, что $x \in a$ тогда и только тогда, когда $x \in A$. Такой a найдётся обязательно, так как для любого конечного F найдётся такой b, что $x \in b$ тогда и только тогда, когда $x \in F$.

Не существует никакого такого счётного $A_0 \subsetneq A$, что $\mathrm{tp}(a/A_0)$ изолирует $\mathrm{tp}(a/A)$ в N.

Пусть, напротив, для счётного $A_0 \subsetneq A$ тип $\mathrm{tp}(a/A_0)$ изолирует $\mathrm{tp}(a/A)$ в N. Пусть u — это то единственное свободное переменной, которое присутствует в формулах из $\mathrm{tp}(a/A_0)$.

Выберем некоторое $x \in (A \setminus A_0)$. $\mathrm{tp}(a/A_0)$ влечёт $x \in u$. По теореме компактности, существует такая формула $\phi(u)$ из $\mathrm{tp}(a/A_0)$, что $(\forall u)(\phi(u) \to x \in u)$ выполняется в $(N, x, y \mid y \in A_0)$. Пусть A_1 — такое конечное подмножество множества A_0, что каждый $y \in A_0$, который входит в ϕ, лежит в A_1. Найдём такое $z \in (I \setminus A)$, что z и x одинаково расположены относительно A_1. Из неразличимости I следует, что $(\forall u)(\phi(u) \to (z \in u))$ истинна в $(N, z, y \mid y \in A_0)$. Так как $\phi(a)$ истинна в $(N, y \mid y \in A_0)$, то $z \in a$ истинна. Это, однако, противоречит выбору z. ■

Список литературы

[1] Baldwin J., Benedikt M. Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352(11). P. 4937–4969.

[2] Belegradek O.V., Stolboushkin A.P., Taitslin M.A. Extended order-generic queries // Annals of Pure and Applied Logic. 1999 V. 97(1–3). P. 85–125.

[3] Benedikt M., Dong G., Libkin L., Wong L. Relational expressive power of constraint query languages // Proc. 15th ACM Symp. on Principles of Database Systems. 1996. P. 5–16.

[4] Benedikt M., Libkin L., Schwentick T., Segoufin L. A model-theoretic approach to regular string relations // Proc. 16th IEEE Symp. on Logic in Computer Science. 2001. P. 431–442.

[5] Blumensath A., Graedel E. Automatic structures // Proc. 15th IEEE Symp. on Logic in Computer Science. 2000. P. 51–62.

[6] Codd E.F. A relational model for large shared data banks // Communications of the ACM. 1970. V. 13. P. 377–387.

[7] Codd E.F. Relational completeness of data base sublanguages // Database Systems. 1972. P. 33–64.

[8] Taitslin M.A. A general condition for collapse results // Annals of Pure and Applied Logic. 2001. V. 113(1–3). P. 323–330.

[9] Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. М., 1977.

[10] Тайцлин М.А. Трансляционные результаты в теории баз данных // Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация. Тверь, 2002. С. 5–23.