УДК 519.681, 510.52

СЛОЖНОСТЬ ОБНОВЛЕНИЙ ДЕДУКТИВНЫХ БАЗ ДАННЫХ С ФИКСИРОВАННЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ ЦЕЛОСТНОСТИ[1]

С.М. Дудаков
Кафедра информатики

The paper continues [3, 4, 5, 6, 7]. Here we consider the computational complexity of database update problems in case when an integrity constraints being a logic program is fixed. We prove that in this case the computational complexity is less than or equal to the complexity in case of a ground non-fixed integrity constraints. And we construct some fixed integrity constraints using one predicate symbol for which the complexity is the same as in the case of ground non-fixed integrity constraints.

Статья продолжает [3, 4, 5, 6, 7]. Рассматривается вычислительная сложность обновлений баз данных с фиксированным ограничением целостности, которое представлено логической программой. Доказывается, что в такой ситуации вычислительная сложность не превосходит сложности аналогичной задачи в случае базисного ограничения целостности (но не фиксированного). Существуют такие ограничения целостности, для которых сложность в точности совпадает с «базисным» случаем.

Введение. С 80-х годов исследователи и практики уделяют большое внимание задачам обновления дедуктивных баз данных (см., например, [2]). В этой области есть несколько основных направлений. Одно из них — обновление представлений баз данных. Для этого разработаны многие методы обновления с использованием абдукции [10, 12, 9]. Другое направление — непосредственные изменения модели, которые, однако, могут приводить к противоречиям с уже существующими данными и ограничениями целостности. Традиционые системы управления базами данных в таких случаях отменяют все сделанные изменения. Более интеллектуальное поведение предполагает, что система сама должна найти новое корректное состояние базы данных, которое учитывало бы и сделанные изменения, и ограничения целостности и при этом как можно меньше отличалось бы от исходного. В этом случае либо производится дополнительное изменение модели (опосредованное обновление базы знаний, см., например, [14, 15]), либо изменяется ограничение целостности с помощью логической программы (программа изменения, [1]).

В этой статье мы исследуем следующую проблему (изучение было начато в [11, 3, 4, 5, 6, 7]). Ограничение целостности представлено в виде логической программы (ЛП) Ф. Корректные состояния БД — эрбрановские модели I ЛП Ф. Необходимо обновить модель I, добавляя множество атомов D^+ и удаляя множество атомов D^-. Интерпретация $(I \cup D^+) \setminus D^-$ может не быть моделью Ф. Следовательно, нужно найти «ближайшую» к I интерпретацию I', которая была бы моделью Ф. Мы исследуем вычислительную сложность задач **OFIP**[2] и **PFIP**[3] (см. [8]). Первая задача — проверить, что $I' \models l$ для некоторой «ближайшей» к I модели I', а вторая — проверить,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 00-01-00254.
[2]Optimistic Fall-Into Problem.
[3]Pessimistic Fall-Into Problem.

что $I' \models l$ для всех «ближайших» I', где l — базисный атом. Решение этих задач необходимо при построении «ближайших» к I интерпретаций.

П р и м е р 1. *Рассмотрим пример задачи обновления. Пусть ЛП Φ имеет следующий вид:*

$$\{Ancestor(x, y) \leftarrow Ancestor(x, z), Parent(z, y);$$
$$Ancestor(x, y) \leftarrow Parent(x, y)\}.$$

Для краткости будем писать «A» и «P» вместо «Ancestor» и «Parent» соответственно. Рассмотрим множество констант

$$C = \{Jane, John, Mary, William\}$$

и интерпретацию

$$I = \{P(Jane, John), P(John, Mary),$$
$$A(Jane, John), A(John, Mary), A(Jane, Mary)\}.$$

Очевидно, что $I \models \Phi$. Пусть

$$\Delta_1 = \Big(\{P(William, John)\}, \varnothing\Big),$$

т.е. мы хотим добавить «$P(William, John)$». Тогда

$$I_1 = \Big\{P(Jane, John), P(John, Mary), P(William, John),$$
$$A(Jane, John), A(John, Mary), A(Jane, Mary),$$
$$A(William, John), A(William, Mary)\Big\}$$

будет «ближайшей» к I. Нетрудно понять, что она является единственной. Теперь удалим «$A(Jane, Mary)$»:

$$\Delta_2 = \Big(\varnothing, \{A(Jane, Mary)\}\Big).$$

Здесь есть две «ближайшие» к I интерпретации:

$$I_2 = \{P(John, Mary), A(John, Mary)\},$$
$$I_3 = \{P(Jane, John), A(Jane, John)\}.$$

Если мы интересуемся $l = P(John, Mary)$, то обе задачи **OFIP** *и* **PFIP** *для (I, Φ, Δ_1, l) имеют положительный ответ $I_1 \models l$.* **OFIP***-задача (I, Φ, Δ_2, l) тоже имеет положительный ответ, потому что $I_2 \models l$, но $I_3 \not\models l$, поэтому та же* **PFIP***-задача (I, Φ, Δ_2, l) имеет отрицательный ответ.*

Мы изучаем вычислительную сложность в случае, когда ЛП Φ заранее фиксирована и не изменяется от задачи к задаче. Это более естественная ситуация, чем случай с изменяющейся ЛП, потому что, как правило, ограничения целостности в ходе работы с базой данных не изменяются. Наш основной результат заключается в том, что в этом случае вычислительная сложность не превосходит сложности аналогичной задачи с базисной (но незафиксированной) ЛП. А для некоторых ЛП сложность в точности соответствует сложности в «базисном» случае. Для доказательства мы строим такую «универсальную» ЛП Ψ, которая содержит всего один двухместный предикатный символ. Затем мы показываем, что любая базисная задача обновления $\mathfrak{P}_0$ сводится за полиномиальное время к некоторой задаче $\mathfrak{P}$ с ЛП Ψ.

Во второй части даём основные определения и формулируем главный результат этой статьи. В третьей части приводим доказательства. Сведение случая с фиксированной ЛП к «базисному» случаю тривиально (теорема 1). Обратное сведение более сложно. Сначала доказываем две леммы, лемма 2 позволяет рассматривать только достаточно простые обновления, а лемма 3 — достаточно простые ЛП. Теоремы 4 и 5 дают сведение «базисного» случая к случаю с фиксированной ЛП для задач **OFIP** и **PFIP** соответственно. В последней части мы комбинируем наш результат с некоторыми уже известными результатами о вычислительной сложности задач обновления с пропозициональной ЛП. Таким образом, мы устанавливаем вычислительную сложность задач обновления дедуктивных баз данных с фиксированным ограничением целостности в виде ЛП.

1. Определения. Мы используем основные понятия и термины логического программирования (см. [13]).

Зафиксируем некоторое бесконечное множество переменных $\mathbf{V}$ и в дальнейшем предполагаем, что все переменные принадлежат $\mathbf{V}$. Пусть Σ — предикатная сигнатура. С помощью Σ^2 мы обозначаем сигнатуру, которая содержит один двухместный предикатный символ s. Мы считаем, что конечное множество констант $\mathbf{C}$ не входит в сигнатуру. $\mathbf{A}(\Sigma, \mathbf{C}, \mathbf{V})$ — это множество атомов, $\mathbf{B}(\Sigma, \mathbf{C})$ — базисных атомов, $\mathbf{L}(\Sigma, \mathbf{C}, \mathbf{V})$ — литералов (т.е. атомов и их отрицаний), и $\mathbf{LB}(\Sigma, \mathbf{C})$ — базисных литералов. В дальнейшем мы опускаем Σ, $\mathbf{C}$, и $\mathbf{V}$ и пишем $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{L}$ и $\mathbf{LB}$.

Предложение — это формула вида $l \leftarrow l_1, \ldots, l_n$, где $l_1, \ldots, l_n, l \in \mathbf{L}$. Последовательность $l_1, \ldots, l_n$ — тело предложения, l — его голова. Предложение называется *нормальным*, если $l \in \mathbf{A}$, *хорновским*, если оно нормально и $l_1, \ldots, l_n \in \mathbf{A}$. Предложение базисное, если $l_1, \ldots, l_n, l \in \mathbf{LB}$. *Логическая программа (ЛП)* Φ — это конечное множество предложений. $ground(\Phi, \mathbf{C})$ — множество всевозможных предложений, которые получаются из предложений Φ заменой всех переменных константами из $\mathbf{C}$. ЛП называется *базисной* или *пропозициональной*, если она не содержит переменных, в частности $ground(\Phi, \mathbf{C}) = \Phi$.

Эрбрановская интерпретация I — это подмножество $\mathbf{B}$: $I \subseteq \mathbf{B}$. В дальнейшем мы будем рассматривать только эрбрановские интерпретации. Пусть $a \in \mathbf{B}$ — базисный атом. Тогда $I \models a$, если $a \in I$, $I \models \neg a$, если $I \not\models a$. Пусть $r = l \leftarrow l_1, \ldots, l_n$ — базисное предложение. $I \models r$, если или $I \models l$, или $I \not\models l_1 \wedge \cdots \wedge l_n$. Если Φ — ЛП, то $I \models \Phi$, когда $I \models r$ для всех $r \in ground(\Phi, \mathbf{C})$.

Обновление Δ — пара: $\Delta = (D^+, D^-)$, где $D^+, D^- \subseteq \mathbf{B}$ и $D^+ \cap D^- = \varnothing$. Неформально, D^+ — это множество атомов, которые нужно добавить к интерпретации, D^- — множество атомов, которые нужно удалить. Говорим, что интерпретация I *соответ-*

ствует обновлению Δ, если $D^+ \subseteq I$ и $D^- \cap I = \varnothing$. Если Φ — ЛП и Δ — обновление, то $\mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$ — это множество всех интерпретаций $I \subseteq \mathbf{B}$, которые соответствуют Δ и $I \models \Phi$. Δ и Φ совместны, если $\mathbf{Acc}(\Phi, \Delta) \neq \varnothing$.

Для каждой интерпретации I мы определяем частичный порядок $<^I$ на множестве интерпретаций: $I_1 <^I I_2$, если или $I_1 \cap I \supset I_2 \cap I$, или $I_1 \cap I = I_2 \cap I$ и $I_1 \setminus I \subset I_2 \setminus I$. Отношение $<^I$ сравнивает отклонения интерпретаций от I (в частности, I — наименьший элемент). Порядок рассматривает удаления как более значительные изменения, чем вставки. Если K — некоторое множество интерпретаций, то мы скажем, что $I' \in K$ является *минимально отклоняющейся от* I *в* K, если I' — минимальный элемент в частично упорядоченном множестве $(K, <^I)$. Если интерпретация I, ЛП Φ и обновление Δ ясны из контекста, то интерпретацию I_1 будем называть *минимально отклоняющейся*, если она минимально отклоняется от I по отношению к $\mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$.

Задача обновления $\mathfrak{P}$ — это четвёрка: $\mathfrak{P} = (I, \Phi, \Delta, l)$, где I — интерпретация; Φ — ЛП; Δ — совместное с Φ обновление; $l \in \mathbf{B}$ — базисный атом. $\mathbf{UpP}$ — множество всех задач обновления. Пусть ЛП Φ зафиксирована, тогда $\mathbf{UpP}_\Phi$ — множество всех задач обновления вида (I, Φ, Δ, I). $\mathbf{UpP}^G$ — множество всех задач обновления вида (I, Φ, Δ, I), в которых ЛП Φ является базисной.

Мы рассматриваем 3 типа ЛП: хорновские, нормальные и общего вида. Также имеется 3 типа обновлений $\Delta = (D^+, D^-)$: вставки ($D^- = \varnothing$), удаления ($D^+ = \varnothing$) и изменения ($D^+ \neq \varnothing$ и $D^- \neq \varnothing$). Задачи обновления $\mathfrak{P}_1 = (I_1, \Phi_1, \Delta_1, l_1)$ и $\mathfrak{P}_2 = (I_2, \Phi_2, \Delta_2, l_2)$ одного вида, если ЛП Φ_1 и Φ_2 одного типа и обновления Δ_1 и Δ_2 также одного типа. Следовательно, имеется 9 видов задач обновления. В дальнейшем $\mathcal{T}$ обозначает произвольный вид задачи обновления, исключая случай, когда ЛП является хорновской и $D^+ = \varnothing$.

$\mathbf{OFIP}$ — множество задач обновления $\mathfrak{P} = (I, \Phi, \Delta, l)$, для которых существует $I' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$, которая минимально отклоняется от I в $\mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$ и $I' \models l$. $\mathbf{PFIP}$ — множество задач обновления $\mathfrak{P} = (I, \Phi, \Delta, l)$, таких, что $I' \models l$ для всех $I' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$, которые минимально отклоняются от I в $\mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$.

$\leq_m^p$ обозначает сводимость типа «многие к одному» за полиномиальное время. Наш основной результат состоит в следующем: для любого вида $\mathcal{T}$ задач обновления

1) $\mathbf{UpP}_\Phi \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{OFIP} \leq_m^p \mathbf{UpP}^G \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{OFIP}$ для любой Φ;

2) $\mathbf{UpP}_\Phi \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{PFIP} \leq_m^p \mathbf{UpP}^G \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{PFIP}$ для любой Φ;

3) существует $\Psi_\mathcal{T}$ в сигнатуре Σ^2, такая, что

$$\mathbf{UpP}^G \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{OFIP} \leq_m^p \mathbf{UpP}_{\Psi_\mathcal{T}} \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{OFIP};$$

4) существует $\Psi_\mathcal{T}$ в сигнатуре Σ^2, такая, что

$$\mathbf{UpP}^G \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{PFIP} \leq_m^p \mathbf{UpP}_{\Psi_\mathcal{T}} \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{PFIP}.$$

Неформально задачи $\mathbf{OFIP}$ и $\mathbf{PFIP}$ любого типа с фиксированной ЛП $\leq_m^p$-сводимы к задачам $\mathbf{OFIP}$ и $\mathbf{PFIP}$ того же типа с базисной (но не фиксированной) ЛП. Для некоторых ЛП, которые можно считать «универсальными» для класса всех «пропозициональных» задач обновления, имеет место и обратная сводимость.

2.1. Сведение к «базисным» задачам. Продемонстрируем, что если ЛП Φ зафиксирована, то любая задача обновления $\mathfrak{P} = (I, \Phi, \Delta, l)$ сводится за полиномиальное время к некоторой задаче обновления $\mathfrak{P}_0 = (I_0, \Phi_0, \Delta_0, l_0)$ с базисной ЛП Φ_0.

Т е о р е м а 1. *Для любого вида $\mathcal{T}$ для любой ЛП Φ*

$$\mathbf{UpP}_\Phi \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{OFIP} \leq_m^p \mathbf{UpP}^G \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{OFIP},$$

$$\mathbf{UpP}_\Phi \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{PFIP} \leq_m^p \mathbf{UpP}^G \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{PFIP}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дана задача $\mathfrak{P} = (I, \Phi, \Delta, l)$, рассмотрим задачу $\mathfrak{P}_0 = \big(I, ground(\Phi, \mathbf{C}), \Delta, l\big)$. Очевидно, что $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}_0$ одного и того же вида, $\mathfrak{P}_0 \in \mathbf{UpP}^G$ и $I \models \Phi$ тогда и только тогда, когда $I \models ground(\Phi, \mathbf{C})$ для всех I. Следовательно, $\mathbf{Acc}(\Phi, \Delta) = \mathbf{Acc}\big(ground(\Phi, \mathbf{C}), \Delta\big)$, и $\mathfrak{P} \in \mathbf{OFIP}$ ($\mathbf{PFIP}$), если и только если $\mathfrak{P}_0 \in \mathbf{OFIP}$ ($\mathbf{PFIP}$). Легко видеть, что

$$|ground(\Phi, \mathbf{C})| \leq |\mathbf{C}|^{|\Phi|}$$

Φ зафиксирована, значит, $|\mathfrak{P}_0| \leq poly(|\mathfrak{P}|)$. ∎

Сведение к задачам с фиксированной ЛП. Теперь докажем, что существуют ЛП, которые можно назвать «универсальными» для класса всех базисных ЛП. Для любого вида $\mathcal{T}$ задач обновления мы построим ЛП $\Psi_\mathcal{T}$ в сигнатуре Σ^2, такую, что любая $\mathbf{OFIP}$-задача $\mathfrak{P} = (I, \Phi, \Delta, l)$ вида $\mathcal{T}$ сводится за полиномиальное время к задаче $\mathfrak{P}_0 = (J, \Psi_\mathcal{T}, \Delta_0, l_0)$ того же вида для некоторых J, Δ_0 и l_0. Такой же результат имеет место и для задач $\mathbf{PFIP}$.

Перед доказательством основной теоремы докажем две леммы, которые позволяют ограничиться рассмотрением только задач обновления специального вида.

Л е м м а 2. *Каждая задача $\mathfrak{P} = (I, \Phi, \Delta, l)$ полиномиально эквивалентна некоторой задаче $\mathfrak{P}_1 = (I_1, \Phi_1, \Delta_1, l_1)$ того же вида, такой, что $|D_1^+| \leq 1$, $|D_1^-| \leq 1$, $D_1^+ \cap I_1 = \varnothing$ и $D_1^- \subseteq I_1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $D^+ = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $D^- = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Пусть d^+ и d^- — новые атомы. Построим

$$I_1 = \begin{cases} I \cup \{d^-\}, & \text{если } D^- \neq \varnothing, \\ I & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$D_1^+ = \begin{cases} \{d^+\}, & \text{если } D^+ \neq \varnothing, \\ \varnothing & \text{иначе;} \end{cases} \qquad D_1^- = \begin{cases} \{d^-\}, & \text{если } D^- \neq \varnothing, \\ \varnothing & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\Phi_1 = \Phi \cup \{a_i \leftarrow d^+ : i = 1, \ldots, n\} \cup \{d^- \leftarrow b_i : i = 1, \ldots, m\}.$$

Пусть $l_1 = l$ и $\Delta_1 = (D_1^+, D_1^-)$. Легко видеть, что $\mathfrak{P}_1 = (I_1, \Phi_1, \Delta_1, l_1)$ — искомая задача, потому что $I_1' \in \mathbf{Acc}(\Phi_1, \Delta_1)$ минимально отклоняется от I_1 в $\mathbf{Acc}(\Phi_1, \Delta_1)$ тогда и только тогда, когда

$$I_1' = \begin{cases} I' \cup \{d^+\}, & \text{если } D^+ \neq \varnothing, \\ I' & \text{иначе} \end{cases}$$

для некоторой $I' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$, которая минимально отклоняется от I в $\mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$. ■

Из леммы следует, что можно ограничиться рассмотрением только простейших изменений (по одному атому), а также считать, что эти изменения в самом деле приводят к модификации интерпретации.

Л е м м а 3. *Каждая задача $\mathfrak{P} = (I, \Phi, \Delta, l)$ полиномиально эквивалентна некоторой задаче $\mathfrak{P}_1 = (I_1, \Phi_1, \Delta_1, l_1)$ того же вида и такой, что каждое предложение $r \in \Phi_1$ имеет вид $l_3 \leftarrow l_1, l_2$, где l_1, l_2 и l_3 — литералы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предыдущей лемме можно предполагать, что $D^+ \in \{\varnothing, \{d^+\}\}$ и $D^- \in \{\varnothing, \{d^-\}\}$. Допустим, что некоторое предложение r не удовлетворяет условию леммы. Следовательно, тело r содержит три или больше литералов. Значит, оно содержит или два положительных литерала: $r = l_3 \leftarrow a, b, L$, или два отрицательных: $d \leftarrow \neg a, \neg b, L$, где a и b — атомы; L — последовательность из одного или более литералов; d — литерал.

Сначала рассмотрим случай с положительными литералами. Заменим $r = d \leftarrow a, b, L$ четырьмя предложениями:

$$c \leftarrow a, b; \quad d \leftarrow c, L; \quad a \leftarrow c; \quad b \leftarrow c,$$

где c — новый атом. Пусть $I_1 = I$, если $I \not\models a \wedge b$, или $I_1 = I \cup \{c\}$ в противном случае. Рассмотрим задачу обновления: $\mathfrak{P}_1 = (I_1, \Phi_1, \Delta, l)$. Заметим, что для каждой $I' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$ мы можем естественным образом построить $I'_1 \in \mathbf{Acc}(\Phi_1, \Delta)$: $I'_1 = I'$, если $I' \not\models a \wedge b$, или $I'_1 = I' \cup \{c\}$ в противном случае. Также для каждой $I'_1 \in \mathbf{Acc}(\Phi_1, \Delta)$ существует единственная $I' = I'_1 \setminus \{c\} \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$. В дальнейшем мы будем использовать такие обозначения без дополнительных пояснений.

Предположим, что $I'_1 \in \mathbf{Acc}(\Phi_1, \Delta)$ минимально отклоняется от I_1 в $\mathbf{Acc}(\Phi_1, \Delta)$. Докажем, что $I' = I'_1 \setminus \{c\} \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$ минимально отклоняется от I в $\mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$. Допустим, это не так и существует $I'' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$, такая, что $I'' <^I I'$. Возможны два случая.

1) $I'' \cap I \supset I' \cap I$. Если $I'_1 \cap I_1 \not\models c$, то

$$I'_1 \cap I_1 = I' \cap I \subset I'' \cap I \subseteq I''_1 \cap I_1$$

и, следовательно, $I''_1 <^{I_1} I'_1$. Это невозможно, значит, $I'_1 \cap I_1 \models c$. Поэтому $I' \models a \wedge b$ и $I \models a \wedge b$. Это означает, что $I'' \models a \wedge b$. Рассмотрим $I''_1 = I'' \cup \{c\}$. Тогда $I''_1 \cap I_1 \supset I'_1 \cap I_1$. Следовательно, $I''_1 <^{I_1} I'_1$. Противоречие.

2) Пусть $I'' \cap I = I' \cap I$ и $I'' \setminus I \subset I' \setminus I$. Рассмотрим I''_1. Если $I''_1 \models c$, то $I'' \models a \wedge b$, $I' \models a \wedge b$ и $I'_1 \models c$. Следовательно, $I''_1 \cap I_1 \supseteq I'_1 \cap I_1$. Но $I'_1 \leq^{I_1} I''_1$. Это доказывает, что $I''_1 \cap I_1 = I'_1 \cap I_1$, $I''_1 \setminus I_1 \subset I'_1 \setminus I_1$ и $I''_1 <^{I_1} I'_1$. Противоречие.

Предположим, что $I' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$ минимально отклоняется от I в $\mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$. Рассмотрим интерпретацию I'_1. Допустим, что существует $I''_1 \in \mathbf{Acc}(\Phi_1, \Delta)$, такая, что $I''_1 <^{I_1} I'_1$. Мы можем предполагать, что I''_1 минимально отклоняется от I_1. Согласно предыдущей части доказательства, мы получаем $I'' = I''_1 \setminus \{c\} \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$, которая минимально отклоняется от I в $\mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$. Рассмотрим два случая.

1) $I_1'' \cap I_1 \supset I_1' \cap I_1$. Тогда

$$I'' \cap I = (I_1'' \cap I_1) \setminus \{c\} \supseteq (I_1' \cap I_1) \setminus \{c\} = I' \cap I.$$

Но I' минимально отклоняется, следовательно, $I'' \cap I = I' \cap I$. Это означает, что $I_1'' \cap I_1 \models c$ и $I_1' \cap I_1 \not\models c$. Таким образом, $I'' \models a \wedge b$ и $I \models a \wedge b$. Но тогда $I' \models a \wedge b$ и $I_1' \models c$. Это противоречит $I_1' \cap I' \not\models c$.

2) $I_1'' \cap I_1 = I_1' \cap I_1$ и $I_1'' \setminus I_1 \subset I_1' \setminus I_1$. Это влечёт, что $I'' \cap I = I' \cap I$ и $I'' \setminus I \subseteq I' \setminus I$. Допустим, что $I'' \setminus I = I' \setminus I$. Тогда $I' = I''$, $I' \models a \wedge b$, если и только если $I'' \models a \wedge b$, поэтому $I_1' \models c$, если и только если $I_1'' \models c$, значит, $I_1' = I_1''$.

Мы доказали случай с положительными литералами.

Теперь рассмотрим случай с отрицательными: $r = d \leftarrow \neg a, \neg b, L$. Заменим r на

$$b \leftarrow \neg a, c; \quad d \leftarrow \neg c, L; \quad c \leftarrow a, d^+; \quad c \leftarrow b, d^+.$$

Если мы разбираем случай с $D^+ = \varnothing$, то последние два предложения будут иными:

$$c \leftarrow a, \neg d^-; \quad c \leftarrow b, \neg d^-.$$

Согласно предыдущей лемме, мы предполагаем, что $I \models d^-$ и $I \not\models d^+$. $I_1 = I \cup \{c\}$, если $I \models a \wedge b$, или $I_1 = I$ в противном случае. Рассмотрим задачу $\mathfrak{P}_1 = (I_1, \Phi_1, \Delta, l)$.

Допустим, что интерпретация $I_1' \in \mathbf{Acc}(\Phi_1, \Delta)$ минимально отклоняется от I_1 в $\mathbf{Acc}(\Phi_1, \Delta)$. При рассмотрении результатов обновления мы будем придерживать похожих обозначений: если $I' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$, то I_1' означает I', если $I' \not\models a \vee b$, и $I' \cup \{c\}$, если $I' \models a \vee b$. Поэтому $I' = I_1' \setminus \{c\}$.

Рассмотрим I'. Предположим, что I' не является минимально отклоняющейся от I в $\mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$ и $I'' <^I I_1$, где $I'' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$.

1) $I'' \cap I \supset I' \cap I$. Если $I_1' \cap I_1 \not\models c$, то $I_1'' \cap I_1 \supset I_1' \cap I$ и $I_1'' <^{I_1} I_1'$. Следовательно, $I_1' \cap I_1 \models c$. Тогда $I \models a \wedge b$ и $I' \models a \vee b$, поэтому, $I' \cap I \models a \vee b$, $I'' \models a \vee b$ и $I_1'' \models c$. Мы доказали, что $I_1'' \cap I_1 \supset I_1' \cap I_1$ и $I_1'' <^{I_1} I_1'$. Противоречие.

2) Пусть $I'' \cap I = I' \cap I$ и $I'' \setminus I \subset I' \setminus I$. Если $I_1 \models c$, то $I \models a \wedge b$, и мы получаем $I'' \models a \vee b$, если и только если $I' \models a \vee b$. Следовательно, $I_1'' \models c$ тогда и только тогда, когда $I_1' \models c$. Поэтому $I_1'' <^{I_1} I_1'$. Из этого следует, что $I_1 \not\models c$. Если $I_1' \models c$, то, очевидно, $I_1'' <^{I_1} I_1'$. Если $I_1' \not\models c$, то $I' \not\models a \vee b$. Из $I'' \subset I'$ мы получаем, что $I'' \not\models a \vee b$ и $I_1'' \not\models c$, $I_1'' <^{I_1} I_1'$. Противоречие получается и в том и в другом случае.

Мы доказали, что I' минимально отклоняется от I.

Предположим, что $I' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$ минимально отклоняется от I в $\mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$. Построим интерпретацию I_1'. Допустим, что существует $I_1'' \in \mathbf{Acc}(\Phi_1, \Delta)$, такая, что $I_1'' <^{I_1} I_1'$.

1) $I_1'' \cap I_1 \supset I_1' \cap I_1$. В этом случае имеем: $I'' \cap I \supseteq I' \cap I$. Если $I'' \cap I = I' \cap I$, то $I_1'' \cap I_1 \models c$ и $I_1' \cap I_1 \not\models c$. Это влечёт $I \models a \wedge b$, $I'' \models a \vee b$, следовательно, $I' \models a \vee b$. Получаем $I_1' \models c$ и $I_1 \models c$, что противоречит $I_1' \cap I_1 \not\models c$.

2) $I''_1 \cap I_1 = I'_1 \cap I_1$ и $I''_1 \setminus I_1 \subset I'_1 \setminus I_1$. Тогда $I'' \cap I = I' \cap I$ и $I'' \setminus I \subseteq I' \setminus I$. Если $I'' \setminus I = I' \setminus I$, то $I'' = I'$, $I'_1 \setminus I_1 \models c$ и $I''_1 \setminus I_1 \not\models c$. Значит, $I' \models a \vee b$, $I_1 \not\models c$, $I'' \not\models a \vee b$, следовательно, $I'' \neq I'$ и $I'' <^I I'$. Противоречие.

Используя этот метод, можно последовательно элиминировать все предложения с «длинным» телом. Лемма доказана. ■

Теперь мы готовы доказать основной результат.

Теорема 4. *Для каждого вида задач обновления $\mathcal{T}$ существует ЛП $\Psi_{\mathcal{T}}$ в сигнатуре Σ^2, такая, что*

$$\mathbf{UpP}^G \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{OFIP} \leq^p_m \mathbf{UpP}_{\Psi_{\mathcal{T}}} \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{OFIP}.$$

Доказательство. Зафиксируем следующее множество констант:

$$C_0 = \{F, G, 1, 2, Y, T, P^+, P^-, R_0, R_L, d^+, d^-, d_0^+, d_0^-, l, l^*\}.$$

Пусть s — единственный бинарный предикатный символ. Так как он является единственным, то мы будем писать для краткости (x, y) вместо $s(x, y)$.

Пусть $s_1, s_2, s_3 \in \{+, -\}$. Мы используем $\psi^{s_1 s_2 s_3}(x_1, x_2, y_1, y_2, z, u, v)$ как обозначение следующей последовательности:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (1, y_1), (2, y_2), (P^{s_1}, y_1), (P^{s_2}, y_2),$$

$$(y_1, z), (y_2, z), (F, z), (z, u), (G, u), (u, v), (P^{s_3}, v).$$

Пусть

$$\Psi^{\pm} = \{(Y, R_0) \leftarrow (T, d_0^+)\},$$
$$\Psi^{-} = \{(Y, R_0) \leftarrow \neg(T, d_0^-)\}.$$

Мы будем использовать Ψ^-, когда рассматриваем задачи обновления с $D^+ = \varnothing$, и $\Psi^{\pm}$ в остальных случаях. Пусть

$$\Psi^{\mathbf{OFIP}} = \{(T, l^*) \leftarrow (Y, R_L), (T, l)\},$$

$$\begin{aligned} \Psi^{s_1 s_2 s_3} = \{& s_3(T, v) \leftarrow \psi^{s_1 s_2 s_3}(\cdots), s_1(T, x_1), s_2(T, x_2), (Y, R_L)\} \cup \\ \cup \{& (Y, z') \leftarrow (Y, z), \psi^{s_1 s_2 s_3}(\cdots), (z, z'), (F, z')\} \cup \\ \cup \{& (T, d^+) \leftarrow (T, d_0^+), (Y, R_L)\} \cup \\ \cup \{& (T, d_0^-) \leftarrow (T, d^-), (Y, R_L)\}, \end{aligned}$$

где $s_1, s_2, s_3 \in \{+, -\}$. Здесь $+a$ означает a, а $-a$ означает $\neg a$. Для хорновских ЛП полагаем $\Psi^* = \Psi^{+++}$, для нормальных

$$\Psi^* = \bigcup \{\Psi^{s_1 s_2 +} : s_1, s_2 \in \{+, -\}\},$$

а для ЛП общего вида

$$\Psi^* = \bigcup \{\Psi^{s_1 s_2 s_3} : s_1, s_2, s_3 \in \{+, -\}\}.$$

Построим $\Psi_{\mathcal{T}}$ как объединение $\Psi^{\mathbf{OFIP}}$, Ψ^* и $\Psi^{\pm}$ или Ψ^- в зависимости от вида рассматриваемых проблем $\mathcal{T}$.

Пусть (I, Φ, Δ, l) — произвольная задача обновления с базисной ЛП Φ над множеством атомов A. Согласно леммам, можно предположить, что $|D^+| \leq 1$, $|D^-| \leq 1$, $D^+ \cap I = \varnothing$, $D^- \subseteq I$. Также предположим, что $\Phi = \{r_0, \ldots, r_n\}$, где r_i имеет вид $l_3 \leftarrow l_1, l_2$. Пусть $\Delta = (D^+, D^-)$, где $D^+ \in \{\varnothing, \{d^+\}\}$ и $D^- \in \{\varnothing, \{d^-\}\}$. Здесь l, d^+, d^- — это те же самые l, d^+, d^-, что и в C_0, а другие атомы из A в C_0 не входят. Этого всегда можно добиться переименованием атомов.

Будем использовать следующее множество констант:

$$\mathbf{C} = C_0 \cup A \cup \{Y_i^1, Y_i^2, R_i, U_i : i = 0, \ldots, n\}.$$

Для любой интерпретации I над A пусть

$$J_I = \{(T, a) : a \in I\}.$$

Пусть $r_i = s_3 c \leftarrow s_1 a, s_2 b$ — предложение, где $s_1, s_2, s_3 \in \{+, -\}$. Тогда положим, что

$$J_i = \{\psi^{s_1 s_2 s_3}(a, b, Y_i^1, Y_i^2, R_i, U_i, c), (R_i, R_{i+1})\}.$$

Мы предполагаем, что R_{n+1} — это R_L и $J_{n+1} = \{(F, R_L)\}$. Пусть

$$J_\Phi = \bigcup \{J_i : i = 0, \ldots, n+1\}.$$

Утверждение 1. *Для всякой интерпретации J', если $J_\Phi \subseteq J'$, $J' \models (Y, R_L)$, $J' \models \Psi^*$ и $I' = \{a \in A : J' \models (T, a)\}$, то $I' \models \Phi$.*

Пусть $J_\Phi \subseteq J'$. Рассмотрим любое предложение $r_i = l_3 \leftarrow l_1, l_2 \in \Phi$. Мы разберем только случай хорновского предложения, остальные рассматриваются аналогично. Имеем

$$\{\psi^{+++}(l_1, l_2, Y_i^1, Y_i^2, R_i, U_i, l_3)\} \subseteq J'.$$

Пусть $I' \models l_1 \wedge l_2$. Тогда $J' \models (T, l_1) \wedge (T, l_2)$. Из

$$J' \models (T, v) \leftarrow \psi^{+++}(x_1, x_2, y_1, y_2, z, u, v), (T, x_1), (T, x_2), (Y, R_L)$$

получаем $J' \models (T, l_3)$. Поэтому $I' \models l_3$. Утверждение доказано.

Пусть $\Delta_0 = (D_0^+, D_0^-)$, где

$$D_0^+ = \begin{cases} \{(T, d_0^+)\} & \text{если } D^+ \neq \varnothing, \\ \varnothing & \text{иначе,} \end{cases} \qquad D_0^- = \begin{cases} \{(T, d_0^-)\} & \text{если } D^- \neq \varnothing, \\ \varnothing & \text{иначе.} \end{cases}$$

Утверждение 2. *Для любой интерпретации $J' \supseteq J_\Phi$, если J' соответствует Δ_0, $J' \models \Psi_{\mathcal{T}}$ и $I' = \{a \in A : (T, a) \in J'\}$, то I' соответствует Δ.*

Пусть $J_\Phi \subseteq J'$, $J' \models \Psi_{\mathcal{T}}$ и $J' \models (T, d_0^+) \wedge \neg(T, d_0^-)$. В этом случае

$$J' \models (Y, R_0), \ldots, (Y, R_L).$$

$J' \models \Psi_{\mathcal{T}}$ влечёт $J' \models (T, d^+) \wedge \neg(T, d^-)$. Это означает, что I' соответствует Δ.

Пусть $J = J_I \cup J_\Phi \cup \{(T, d_0^-)\}$ и $l_0 = (T, l^*)$. Тогда $(J, \Psi_\mathcal{T}, \Delta_0, l_0)$ — нужная нам задача.

Пусть $(I, \Phi, \Delta, l) \in \mathbf{OFIP}$. Рассмотрим $I' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$, которая минимально отклоняется от I в $\mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$ и $I' \models l$. Пусть

$$J' = J_{I'} \cup J_\Phi \cup \{(Y, R_i) : i = 0, \ldots, n+1\} \cup \{(T, l^*), (T, d_0^+)\}.$$

Очевидно, что $J' \in \mathbf{Acc}(\Psi_\mathcal{T}, \Delta_0)$ и $J' \models (T, l^*)$. Допустим, что она не является минимально отклоняющейся от J в $\mathbf{Acc}(\Psi_\mathcal{T}, \Delta_0)$. Тогда существует $J'' \in \mathbf{Acc}(\Psi_\mathcal{T}, \Delta_0)$, такая, что $J'' <^J J'$. Пусть $I'' = \{a \in A : (T, a) \in J''\}$.

Допустим, что $J'' \cap J \supset J' \cap J$. Следовательно, $I'' \cap I \supseteq I' \cap I$. Тогда $J_\Phi \cup \{(T, d_0^+)\} \subseteq J''$ и $J'' \not\models (T, d_0^-)$. Значит, существует $b \in A$, такой, что $(J'' \setminus J') \cap J \models (T, b)$. Согласно утверждению $I'' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$. Тогда $I' \cap I \subset I'' \cap I$, потому что $b \in (I'' \setminus I') \cap I$. Следовательно, $I'' <^I I'$.

Пусть $J'' \cap J = J' \cap J$ и $J'' \setminus J \subset J' \setminus J$. Тогда $I'' \cap I = I' \cap I$ и $I'' \setminus I \subseteq I' \setminus I$. J'' должна содержать $(Y, R_0), \ldots, (Y, R_L)$ согласно утверждению. Но тогда существует $b \in A$, такой, что $(J' \setminus J'') \setminus J \models (T, b)$. Поэтому $(I' \setminus I'') \setminus I \models b$ и $I'' <^I I'$.

Мы доказали, что J' минимально отклоняется и $(J, \Psi_\mathcal{T}, \Delta_0, l_0) \in \mathbf{OFIP}$.

Пусть теперь $(J, \Psi_\mathcal{T}, \Delta_0, l_0) \in \mathbf{OFIP}$. Пусть $J' \in \mathbf{Acc}(\Psi_\mathcal{T}, \Delta_0)$ минимально отклоняется от J в $\mathbf{Acc}(\Psi_\mathcal{T}, \Delta_0)$ и $J' \models (T, l^*)$. Предположим, что $J' \not\supseteq J_\Phi$. Пусть i_0 — это наименьшее из i, для которого $J_{i_0} \not\subseteq J'$. Пусть

$$J'' = J_I \cup \left(\bigcup\{J_i : i \neq i_0\}\right) \cup$$

$$\cup (J' \cap J_{i_0}) \cup \{(Y, R_i) : i = i_0, \ldots, n\} \cup \{(T, d_0^+)\}.$$

Тогда $J'' \cap J = J' \cap J$ и $J'' \setminus J \subset J' \setminus J$. Также J'' соответствует Δ_0 и $J'' \models \Psi_\mathcal{T}$. Следовательно, J' не является минимально отклоняющейся. Мы доказали, что $J' \supseteq J_\Phi$. Теперь ясно, что

$$J' \supseteq J_\Phi \cup \{(Y, R_i) : i = 0, \ldots, n+1\} \cup \{(T, d_0^+), (T, l^*)\}$$

и $J' \not\models (T, d_0^-)$.

Рассмотрим $I' = \{a \in A : (T, a) \in J'\}$. Согласно утверждению $I' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$. Если $I' \not\models l$, то $J' \not\models (T, l)$, и мы можем построить $J'' = J' \setminus \{(T, l^*)\} \in \mathbf{Acc}(\Psi_\mathcal{T}, \Delta_0)$, такую, что $J'' <^J J'$. Следовательно, $I' \models l$. Если I' не является минимально отклоняющейся от I и существует $I'' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$, такая, что $I'' <^I I'$, то рассмотрим

$$J'' = J_{I''} \cup J_\Phi \cup \{(Y, R_i) : i = 0, \ldots, n+1\} \cup \{(T, l^*), (T, d_0^+)\}.$$

Если $I'' \cap I \supset I' \cap I$, то $J'' \cap J \supset J' \cap J$. Если $I'' \cap I = I' \cap I$ и $I'' \setminus I \subset I' \setminus I$, то $J'' \cap J = J' \cap J$ и $J'' \setminus J \subset J' \setminus J$. Получаем, что I' должна минимально отклоняться и $(I, \Phi, \Delta, l) \in \mathbf{OFIP}$. ■

Теорема 5. *Для каждого вида задач обновления $\mathcal{T}$ существует ЛП $\Psi_\mathcal{T}$ в сигнатуре Σ^2, такая, что*

$$\mathbf{UpP}^G \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{PFIP} \leq_m^p \mathbf{UpP}_{\Psi_\mathcal{T}} \cap \mathcal{T} \cap \mathbf{PFIP}.$$

Доказательство. Построения и доказательство аналогичны случаю **OFIP** за исключением следующего. Используем

$$\Psi^{\mathbf{PFIP}} = \{(T, l) \leftarrow (Y, R_L), (T, l^*)\}$$

вместо $\Psi^{\mathbf{OFIP}}$ и строим $J = J_I \cup J_\Phi \cup \{(T, d_0^-), (T, l^*)\}$. Опишем только схему доказательства.

Пусть $(I, \Phi, \Delta, l) \notin \mathbf{PFIP}$, $I' \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$ минимально отклоняется от I и $I' \not\models l$. Тогда

$$J' = J_{I'} \cup J_\Phi \cup \{(Y, R_i) : i = 0, \ldots, n+1\} \cup \{(T, d_0^-)\}$$

в $\mathbf{Acc}(\Psi_\mathcal{T}, \Delta_0)$, она минимально отклоняется от J и $J' \not\models (T, l^*)$, т.е. $(J, \Psi_\mathcal{T}, \Delta_0, l_0) \notin$ **PFIP**.

Пусть $(J, \Psi_\mathcal{T}, \Delta_0, l_0) \notin \mathbf{PFIP}$, $J' \in \mathbf{Acc}(\Psi_\mathcal{T}, \Delta_0)$ минимально отклоняется и $J' \not\models (T, l^*)$. В этом случае $J_\Phi \subseteq J'$, $I' = \{a \in A : J' \models (T, a)\} \in \mathbf{Acc}(\Phi, \Delta)$ минимально отклоняется и $I' \not\models l$, следовательно, $(I, \Phi, \Delta, l) \notin \mathbf{PFIP}$. ■

3. Вычислительная сложность. В следующей таблице представлены некоторые полученные ранее результаты о вычислительной сложности «базисных» задач обновления (см. [5, 6, 7]).

	OFIP	PFIP
$D^- = \varnothing$; Φ хорновская	P	P
$D^+, D^- \neq \varnothing$; Φ хорновская	NP-полная	$coNP$-полная
$D^- = \varnothing$; Φ общего вида	Σ_2^P-полная	Π_2^P-полная

Наши результаты означают, что если ЛП Φ не является базисной, но заранее фиксирована, то задачи обновления принадлежат тем же классам сложности. Существуют такие ЛП Φ, при которых эти задачи являются полными в соответствующих классах.

Автор выражает благодарность Михаилу Иосифовичу Дехтярю и Михаилу Абрамовичу Тайцлину за ценные замечания.

Список литературы

[1] Alferes J.J., Pereira L.M. Update-Programs Can Update Programs // *Second Int. Workshop, NMELP'96: Selected Papers*. LNCS. 1997. V. 1216. P. 110–131.

[2] Bonner A.J., Kifer M. An Overview of Transaction Logic // *Theoretical Computer Science*. 1994. V. 133(2). P. 255–265.

[3] Dekhtyar M., Dikovsky A., Spyratos N. On Conservative Enforced Updates // *Proc. of 4th Int. Conf., LPNMR'97*. LNCS. 1997. V. 1265. P. 244–257.

[4] Dekhtyar M., Dikovsky A., Spyratos N. On Logically Justified Updates // *Proc. of the 1998 Joint Int. Conference and Symposium on Logic Programming*. MIT Press. 1998. P. 250–264.

[5] Dekhtyar M., Dikovsky A., Dudakov S., Spyratos N. Monotone Expansion of Updates in Logical Databases // *Proc. of 5th Int. Conf. LPNMR'99*. LNAI. 1999. V. 1730. P. 132–147.

[6] Dekhtyar M., Dikovsky A., Dudakov S., Spyratos N. Maximal Expansions of Database Updates // *Foundations of Information and Knowledge Systems, FoIKS 2000*. LNCS. 2000. V. 1762. P. 72–87.

[7] Dekhtyar M., Dikovsky A., Dudakov S. On Complexity of Updates Through Integrity Constraints // *Proc. of the First Int. Conf. on Computational Logic (CL 2000)*. LNAI. 2000. V. 1861. P. 867–881.

[8] Eiter T., Gottlob G. On the complexity of propositional knowledge base revision, updates, and counterfactuals // Artificial Intelligence. 1992. V. 57. P. 227–270.

[9] Eshghi K., Kowalski R.A. Abduction Compared with Negation by Failure // *Proc. of the 6th Int. Conf. on Logic Programming*. MIT Press. 1989. P. 234–254.

[10] Guessoum A., Lloyd J.W. Updating knowledge bases // New Generation Computing. 1990. V. 8(1). P. 71–89.

[11] Halfeld Ferrari Alves M., Laurent D., Spyratos N., Stamate D. Update rules and revision programs // Rapport de Recherche Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay. Paris: LRI. 1995. V. 1010(12).

[12] Kakas A.C., Mancarella P. Database updates through abduction // *Proc. 16th Int. Conf. on Very Large Data Bases (VLBD)*. 1990. P. 650–661.

[13] Lloyd J.W. Foundations of Logic Programming. Second, Extended Edition. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[14] Marek V.W., Truszcińsky M. Revision programming, database updates and integrity constraints // *Int. Conf. on Data Base theory, ICDT*. LNCS. 1995. V. 893. P. 368–382.

[15] Przymusinski T.C., Turner H. Update by Means of Inference Rules // Journal of Logic Programming. 1997. V. 30. N.2. P. 125–143.