УДК 517.54

# НОРМИРОВАННЫЕ КОНФОРМНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ КРУГА В КРУГ С $K$-КВАЗИКОНФОРМНЫМИ ПРОДОЛЖЕНИЯМИ ДО $P$-КРАТНО СИММЕТРИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГОВ[1]

**В.В. Григорьева*, В.Г. Шеретов****
*Кафедра высшей математики ТГТУ
**Кафедра математического анализа

Area method is applied to the extremal problems on some classes of schlicht mappings of the disk with $k$-guasiconformal $p$-multiple circular symmetrical extension.

В статье исследуется модель оптимизации инвестиционного портфеля при нечетких случайных данных в постановке, предполагающей достижение приемлемого уровня доходности по мере возможности (необходимости). Предложен метод решения задачи, основанный на ее редукции к эквивалентному детерминированному аналогу — задаче нелинейного программирования. При некоторых предположениях эта задача может быть сведена к задаче сепарабельного программирования.

**1.** Экстремальные задачи квазиконформного и гармонического анализа носят, как правило, нелинейный характер и требуют привлечения весьма тонких и глубоких методов. На кафедре математического анализа ТвГУ значительное внимание уделяется развитию метода площадей в метриках, порождаемых аналитическими квадратичными дифференциалами на разветвленных накрывающих римановой сферы [1–6]. В данной работе анонсируются новые результаты, полученные указанным методом и связанные с классическими проблемами теории конформных отображений.

Объектом исследования являются классы $Q(r, R, M, p)$ $k$-квазиконформных отображений $f$ круга $\Delta_R = \{z : |z| < R\}$ в плоскости $C_z$ на круг $\Delta_M = \{w : |w| < M\}$, обладающих свойством $p$-кратной круговой симметрии

$$f\left(ze^{2\pi i/p}\right) = e^{2\pi i/p} f(z)$$

для любого $z \in \Delta_R$, где $p$ — заданное натуральное число, голоморфных в круге $\Delta_r = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < R$, и нормированных условием $f(0) = 0$. Стало быть, $f$ имеют в $\Delta_R$ тейлоровские разложения вида

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{1+p(n-1)}$$

и реализуют конформные вложения круга $\Delta_r$ в круг $\Delta_M$.

Исследуются также подклассы $Q_k(r, R, M, p, \rho)$, образуемые элементами $f$ из класса $Q_k(r, R, M, p)$ с фиксированным модулем коэффициента $\alpha_1$, равным $\rho$. Ставятся задачи экстремизации функционалов $\Lambda_1(f) = \alpha_1$ и $\Lambda_2(f) = \alpha_2/\alpha_1$ в классах

[1]Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 01-01-00112.

$Q_k(r,R,M,p)$, а также функционала $L_2(f)=\alpha_2$ в классах $Q_k(r,R,M,p,\rho)$ и описания областей значений функционалов.

Анонсируемые результаты содержаться в следующих утверждениях.

Т е о р е м а 1. *Областью значений аналитического функционала $\Lambda_1(f)$ на классе $Q_k(r,R,M,p)$ является замкнутый круг радиуса*

$$R_1=\frac{M}{r}\left(\frac{r^p+k^2R^p}{R^p+k^2r^p}\right)^{1/2p}$$

*с центром и проколом в начале координат. Граничные точки этого круга вносятся функциями вида $f_0(z)=R_1e^{i\varphi}z$, $\varphi$ — действительное число, в круге $\Delta_r$, удовлетворяющим в кольце $\Delta_R\backslash\Delta_r$ уравнению*

$$p\Omega\circ f_0(z)=M^p\left(\rho e^{i\varphi}\right)^{-p/2}\left(1+r^pR^{-p}\right)^{-1}z^{-p/2}+$$

$$+\left(\rho e^{i\varphi}\right)^{p/2}R^p\left(1+R^pr^{-p}\right)^{-1}z^{-p/2}-$$

$$-\left(\rho e^{i\varphi}\right)^{p/2}R^pr^p\left(1+r^pR^{-p}\right)^{-1}z^{p/2}-$$

$$-M^p\left(\rho e^{i\varphi}\right)^{-p/2}R^{-2p}r^p\left(1+r^{-p}R^p\right)^{-1}z^{-p/2},$$

*где $\rho=R_1$,*

$$\Omega(w)=\frac{w^p+M^p}{pw^{p/2}}.$$

Т е о р е м а 2. *Областью значений аналитического функционала $L_2(f)$ на классе $Q_k(r,R,M,p,\rho)$, является замкнутый круг радиуса*

$$d=\frac{2\rho}{p}\left[r^{-p}\sqrt{\frac{r^p+k^2R^p}{R^p+k^2r^p}}-\rho^pM^{-p}\right]$$

*с центром в начале координат. Граничные точки круга вносятся элементами $f_1$, удовлетворяющими в $\Delta_r$ уравнению вида*

$$\Omega\circ f_1(z)=\beta_0z^{-p/2}+\beta_1z^{p/2},$$

*где*

$\beta_0=(1/p)M^p\left(\rho e^{i\varphi}\right)^{-p/2}$,

$\beta_1=(1/p)\left(\rho e^{i\varphi}\right)^{p/2}-(1/2)M^pde^{i\theta}\left(\rho e^{i\varphi}\right)^{-p/2}$,

*$\varphi$, $\theta$ — действительные числа,*

*а в кольце $\Delta_R\backslash\Delta_r$ — уравнению вида*

$$\Omega\circ f_1(z)=A_0z^{-p/2}+B_0z^{-p/2}+A_1z^{p/2}B_1z^{p/2},$$

*где*

$A_0=\beta_0/\left(1+r^pR^{-p}\right)$,

$B_0=\beta_1R^p/\left(1+R^pr^{-p}\right)$,

$A_1=\beta_1/\left(1+R^pr^{-p}\right)$,

$B_1=\beta_0R^{-p}/\left(1+R^{-p}r^p\right)$.

**2.** Квадратичный дифференциал $\omega = (\Omega'(w)\, dw)^2$ для рассматриваемых задач порождается аналитической на римановой поверхности $R_w$ радикала $\sqrt{w}$ функцией $\Omega(w)$. Он имеет нули второго порядка в точках $w_v = Me^{2i\pi\, v/p}$, $v = 0..(p-1)$, и полюс кратности $p+2$ в начале координат. Положим $f$ до $k$-квазиконформного автоморфизма $\hat{f}$ сферы Римана, полагая

$$\hat{f}(z) = M^2/f\left(R^2/z\right)$$

для $z \in C \backslash \Delta_R$. На окружности $\partial\Delta_R$ значения $\hat{f}$ примем равными граничными значениями функции $f$, определяемым единственным образом и реализующим гомеоморфизм $\partial\Delta_R$ на окружность $\partial\Delta_M$. Вывод неравенства площадей в метрике, порождаемой квадратичным дифференциалом $\omega = (\Omega'(w)\, dw)^2$, продолженным сначала инверсным образом во внешность круга $\Delta_M$, а затем на риманову поверхность радикала $\sqrt{w}$, следует схеме доказательства, изложенного в [6].

Т е о р е м а 3. *Коэффициенты рядов Пюизе*

$$\Omega \circ \hat{f}(z) = \beta_0 z^{-p/2} + \beta_1 z^{p/2} + \sum_{v=2}^{\infty} \beta_v z^{(2v-1)p/2},$$

$$\Omega_1 \circ \hat{f}_1(z) = \tilde{\beta}_0 \bar{z}^{p/2} + \tilde{\beta}_1 \bar{z}^{-p/2} + \sum_{v=-\infty}^{1} \tilde{\beta}_v \bar{z}^{(2v-1)p/2},$$

*где*

$f \in Q_k(r, R, M, p)$,

$\Omega_1(w) = \Omega\left(M^2/\bar{w}\right)$,

$f_1(z) = \overline{f\left(R^2/\bar{z}\right)}$,

*связаны с коэффициентами разложения*

$$H(z) = A_0 z^{-p/2} + B_0 \bar{z}^{-p/2} + A_1 z^{p/2} + B_1 \bar{z}^{p/2} + \ldots,$$

*представляющего комплексную гармоническую функцию в двулистном кольце* $r < |\hat{z}| < R^2/r$ *с граничными значениями, равными* $\Omega \circ \hat{f}(z)$ *на* $|\hat{z}| = r$ *и* $\Omega_1 \circ \hat{f}_1(z)$ *на* $|\hat{z}| = R^2/r$, *неравенством площадей*

$$\left(|\beta_0|^2 r^{-p} - |\beta_1|^2 r^p\right) + \left(\left|\tilde{\beta}_1\right|^2 \left(R^2/r\right)^p - \left|\tilde{\beta}_0\right|^2 \left(R^2/r\right)^{-p}\right) -$$

$$- \sum_{v=2}^{\infty} (2v-1)\, |\beta_v|^2 r^{(2v-1)p} + \sum_{v=-\infty}^{-1} (2v-1)\, |\tilde{\beta}_v|^2 \left(R^2/r\right)^{(2v-1)p} \geq$$

$$\geq \frac{1-k^2}{1+k^2} \left[\left(|A_0|^2 + |B_0|^2\right) \left(r^{-p} - \left(R^2/r\right)^{-p}\right) + \left(|A_1|^2 + |B_1|^2\right) \left(\left(R^2/r\right)^p - r^p\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{v \neq 0,1} (2v-1)^2 \left(|A_v|^2 + |B_v|^2\right) \left(\left(R^2/r\right)^{(2v-1)p} - r^{(2v-1)p}\right)\right].$$

Доказательства утверждений теорем 1 и 2 получаются из теоремы 3 по схеме статьи [6].

Рассмотрим некоторые специализации полученных результатов. Предельный случай $M \to \infty$ в оценке, отвечающей теореме 2, дает неравенство

$$|\alpha_2/\alpha_1| \leq \frac{2}{pr^p}\left(\frac{r^p + k^2R^p}{R^p + k^2r^p}\right)^{1/2},$$

а еще один предельный переход при $R \to \infty$ приводит к оценке

$$|\alpha_2/\alpha_1| \leq \frac{2k}{pr^p}.$$

С другой стороны, полагая $R = 1$ в оценках, отвечающих теоремам 1 и 2, получим результаты статьи [6]. Нетрудно также проверить, что дальнейшие специализации на классы $S_M^p$ и $S^p$ $p$-кратно симметричных нормированных конформных вложений единичного круга в круг $\Delta_M$ и комплексную плоскость соответственно приводят к классическим оценкам.

## Список литературы

1. Шеретов В.Г. Аналитические функции с квазиконформным продолжением. Тверь, 1991.

2. Шеретов В.Г. Метод площадей в метриках аналитических квадратичных дифференциалов, заданных на накрывающих сферы Римана // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1996. С. 116–124.

3. Григорьева В.В. Доказательства неравенства Пика и его аналога для класса $S_M^{(2)}$ методом площадей // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2000. С. 53–58.

4. Григорьева В.В., Шеретов В.Г. Оценки в классах ограниченных однолистных функций с $p$-кратной симметрией // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2001. С. 41–46.

5. Шеретов В.Г. Решение проблемы коэффициентов Бибербаха для однолистных функций классов $S^{(p)}$ и $\Sigma^{(p)}$ // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2001. С. 155–168.

6. Григорьева В.В., Шеретов В.Г. Экстремальные задачи в некоторых классах ограниченных $k$-квазиконформных отображений круга с $p$-кратной симметрией // Труды научной конференции, посвященной трехсотлетию российской математики. Тверь, 2001. С. 8–18.