

УДК 539.3.

## РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА И ПРОГРАММНОГО МОДУЛЯ САЕ FIDESYS ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Левин В.А.\* , Зингерман К.М.\*\* , Кукушкин А.В.\*\*\*

\* Кафедра вычислительной механики, МГУ им. М.В. Ломоносова

\*\* Кафедра вычислительной математики, Тверской госуниверситет

\*\*\* Кафедра математического анализа, Тульский госуниверситет

---

*Поступила в редакцию 10.02.2011, после переработки 17.02.2011.*

---

Приведена модель контактного взаимодействия и вариант её реализации с помощью метода конечных элементов по схеме «узел-узел». Приведены результаты решения задачи о контактном взаимодействии сектора цилиндра с цилиндрической оболочкой.

The model of contact interaction and a variant of its finite element realization by the «node to node» way are presented. The results of analysis of the contact interaction between a sector of a cylinder and a cylindrical shell are presented.

**Ключевые слова:** термоупругость, контактное взаимодействие, условие непроникновения, контакт по схеме узел-узел.

**Keywords:** thermoelasticity, contact interaction, contact by node to node way.

### Введение

Сложность решения контактных задач теории упругости связана, в частности, с тем, что область контакта заранее неизвестна и определяется в ходе решения. Один из способов, позволяющих преодолеть это затруднение, состоит в введении контактного слоя. Под контактным слоем понимаем пространство между контактирующими поверхностями, заполненное виртуальной средой, реализующей контактное взаимодействие. Свойства ее таковы, что она не препятствует деформации контактирующих тел до тех пор, пока не начнется их взаимодействие. При конечно-элементном расчете контактный слой рассматривается как совокупность конечных элементов. Эти элементы могут быть, например, пространственными или стержневыми. В модели контактного слоя, рассмотренной в данной статье, используются стержневые контактные элементы.

Методика расчета контактного взаимодействия иллюстрируется на примере следующей задачи. Рассматривается конструкция, состоящая из полого цилиндра и окружающей его цилиндрической оболочки, внутренний радиус которой до деформации больше внешнего радиуса деформированного цилиндра (рис.1). Полый цилиндр подвергается неравномерному нагреву. Предполагается, что под

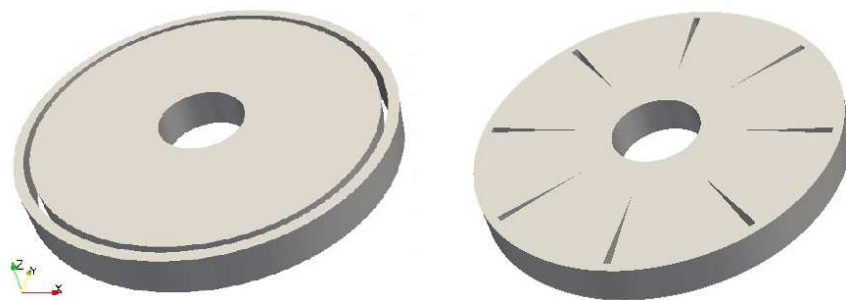


Рис. 1: Начальное и деформированное состояние

действием напряжений, возникающих при таком нагреве, цилиндр разделяется на несколько одинаковых секторов, которые далее деформируются и вступают в контактное взаимодействие с оболочкой. При этом из-за неравномерности нагрева возникают зазоры между секторами (полости). Вследствие симметрии задачи расчеты выполняются только для одного из секторов с учетом его взаимодействия с оболочкой.

Для решения задачи разработано программное обеспечение в составе разрабатываемого пакета для решения прочностных и смежных с ними задач (CAE FIDESYS). Приводятся некоторые результаты расчетов напряженно-деформированного состояния.

## 1. Модель контактного взаимодействия

Рассмотрим геометрию контактного взаимодействия двух тел (рис.2). Пусть до начала нагружения между телами имеется начальный зазор  $h(x, y, z)$  — непрерывная функция координат. За величину зазора после деформации будем принимать расстояние  $d$  между двумя точками, которые после нагружения вступают в контакт:

$$d = h + |\vec{u}_2 - \vec{u}_1|.$$

Здесь  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  — перемещения точек на поверхности тел,  $h$  — начальный зазор. Точки вступают в контакт при  $d = 0$  и взаимопроникают при  $d < 0$ .

Теперь перейдем к силовым условиям в контакте. Нормальные и касательные усилия взаимодействия тел равны по величине и противоположны по направлению:  $\vec{\sigma}_1 = -\vec{\sigma}_2$ .

Здесь  $\vec{\sigma}_1 = \{\sigma_{n1}, \tau_{11}, \tau_{21}\}$ ,  $\vec{\sigma}_2 = \{\sigma_{n2}, \tau_{12}, \tau_{22}\}$  — векторы напряжений на поверхности контактирующих тел;  $\sigma_{nj}, \tau_{1j}, \tau_{2j}$  — компоненты этих векторов вдоль нормали, по касательной и по бинормали.

Нормальные напряжения в контакте  $\sigma_n$  всегда отрицательны.

Между геометрическими и силовыми условиями имеется следующая связь: если  $d = 0$ , то  $\sigma_n \leq 0$ , а если  $d > 0$ , то  $\sigma_n = 0$ .

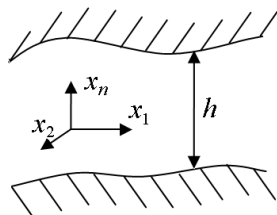


Рис. 2: Геометрия контактного взаимодействия двух тел

Сила трения в наиболее простом варианте модели зависит только от нормальных напряжений

$$\tau = f\sigma_n, \tag{1}$$

где  $f$  — коэффициент трения.

При наличии предварительного смещения  $u$  связь между касательными усилиями и смещениями более сложная. В общем виде она может быть представлена нелинейной зависимостью

$$\tau = \Phi(f, u, \sigma_n) \tag{2}$$

Приведем основные этапы моделирования контактного взаимодействия с использованием контактного слоя.

1. Рассмотрим контактный слой — пространство между контактирующими поверхностями. Это пространство будет заполнено виртуальной средой, реализующей контактное взаимодействие.

Рассмотрим пространственный элемент контактного слоя (рис.3). В соответствии с физическими представлениями о контактном взаимодействии будем полагать, что

- На элемент действуют две компоненты касательных напряжений и одна компонента нормального напряжения  $\sigma_n$ . Остальные компоненты тензора напряжений равны нулю.
- Касательные напряжения не влияют на перемещения, вызванные нормальными напряжениями.
- Напряжения  $\sigma_n$ ,  $\tau_1$  и  $\tau_2$  не меняются по толщине слоя.
- Нормальные напряжения всегда отрицательны:  $\sigma_n < 0$ .

2. Обозначим перемещения точек верхней грани относительно точек нижней грани по осям  $x_n$ ,  $x_1$  и  $x_2$  через  $u_n$ ,  $u_1$  и  $u_2$ . Это относительные перемещения или перемещения в локальной системе координат. Деформации определяются через перемещения соотношениями Коши, которые в данном случае могут быть записаны в виде

$$\varepsilon_n = \frac{\partial u_n}{\partial x_n}, \gamma_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \gamma_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_n}.$$

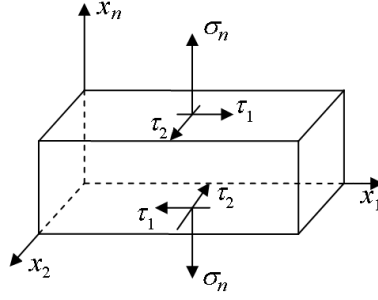


Рис. 3: Пространственный элемент контактного слоя

При линейном распределении перемещений по толщине  $l$  слоя  $\varepsilon_n = \frac{u_n}{l}$ ,  $\gamma_1 = \frac{u_1}{l}$ ,  $\gamma_2 = \frac{u_2}{l}$ .

При выводе физических соотношений для элемента будем для определенности полагать, что зависимость между компонентами тензоров деформаций и напряжений заданы в виде кусочно-линейных функций (двухзвенных ломаных). При растягивающих деформациях в контактной среде не возникает напряжений, а при сжатии напряжения линейно зависят от деформаций.

Упругие модули контактного слоя должны быть соизмеримы (одного порядка) с модулями контактирующих тел. Если они будут меньше по величине, то условие непроникновения не будет выполняться. Если они будут значительно больше, то задача будет сходиться крайне медленно, а иногда возникает численная неустойчивость.

3. Введем понятие интенсивности касательных напряжений  $\tau_i = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$  и интенсивности касательных деформаций  $\gamma_i = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ .

Полные касательные деформации складываются из упругих деформаций и деформаций проскальзывания, т.е. тех деформаций, при которых происходит проскальзывание в контакте:  $\gamma_1 = \gamma_1^e + \gamma_1^s$ ;  $\gamma_2 = \gamma_2^e + \gamma_2^s$ , где  $\gamma_1^e, \gamma_2^e$  — упругие деформации, а  $\gamma_1^s, \gamma_2^s$  — деформации проскальзывания. Интенсивность деформаций проскальзывания  $\gamma_i^s = \sqrt{(\gamma_1^s)^2 + (\gamma_2^s)^2}$ . Интенсивность касательных напряжений не должна превышать силы трения, которая, в свою очередь, зависит от нормального напряжения. При превышении силы трения деформации проскальзывания увеличиваются, а упругие деформации остаются неизменными. Критерий начала проскальзывания задается в виде  $\tau_i = \tau_T$ .

Особенностью контактного слоя в соответствии с выбранной моделью является отсутствие связей между его элементами по осям  $x_1$  и  $x_2$ . Это означает, что выбираемые аппроксимирующие функции не будут зависеть от  $x_1$  и  $x_2$ , а будут зависеть только от  $x_n$ . Поэтому количество узлов в элементе контактного слоя по осям  $x_1$  и  $x_2$  не будет влиять на точность решения. Естественно выбрать элемент с минимальным числом узлов. Таким элементом является стержневой элемент. При этом число узлов по нормали к поверхности контакта (по оси  $x_n$ ) будет зависеть от порядка аппроксимирующих функций. Применение стержневого элемента обосновывается также следующим: 1) в МКЭ передача усилий осуществляется через

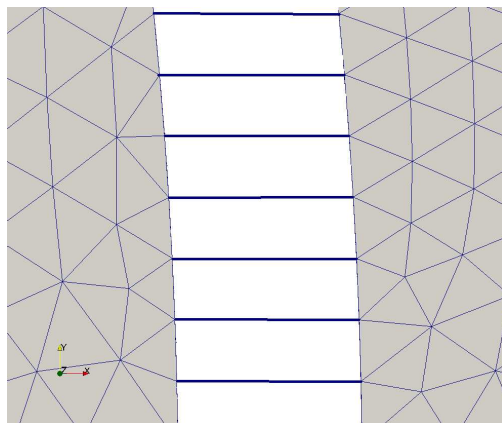


Рис. 4: Фрагмент поверхности конечно-элементной (тетраэдральной) сетки и контактные элементы, соединяющие два тела

узлы и только через узлы; 2) в контактном элементе отсутствуют какие-либо требования к непрерывности сдвиговых перемещений. На рис. 4 показан фрагмент конечноэлементной сетки со стержневыми контактными элементами.

Описание построения функций формы стержневого элемента можно найти в [1,2].

## 2. Алгоритм решения

Строится конечно-элементная модель контактирующих тел. Далее выделяются поверхности предполагаемого контакта (контактирующие поверхности). Если контактирующие поверхности пересекаются или расстояние между ними меньше расстояния, при котором считается, что контакт начался, определяются узлы, между которыми будет установлен контакт. Контактные узлы связываются стержневыми элементами. Совокупность контактных стержней образует контактную среду.

Конечные элементы для упругих тел описаны в [1,3]. Приведем описание стержневых контактных элементов. Для упругой стадии определяющие соотношения для контактных элементов в матричной форме можно записать в виде

$$\sigma = D\varepsilon,$$

где

$$D = \begin{bmatrix} E_f & 0 & 0 \\ 0 & G_f & 0 \\ 0 & 0 & G_f \end{bmatrix},$$

$$\sigma = \{\sigma_n, \tau_1, \tau_2\}^T, \quad \varepsilon = \{\varepsilon_n, \gamma_1, \gamma_2\}^T = \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_n}, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \right\}^T.$$

Особенность контактной среды в том, что касательные перемещения в ней зависят от нормальных и касательных усилий, а нормальные перемещения не зависят от касательных усилий [2]. Эта связь является нелинейной. Нелинейность

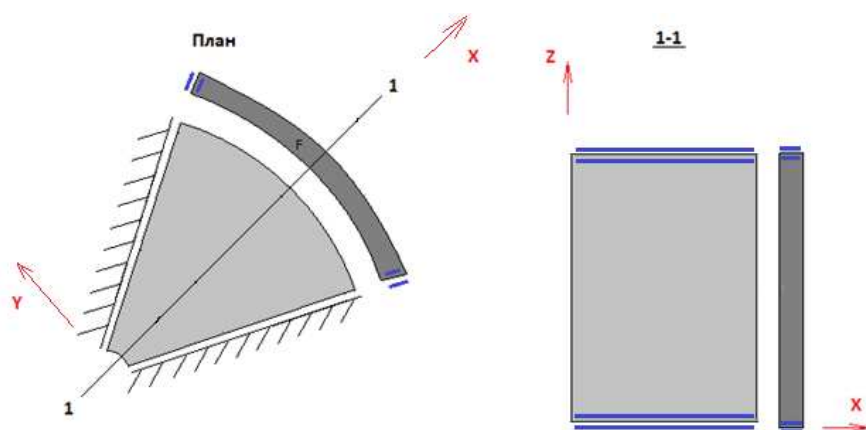


Рис. 5: Геометрия и схема закрепления сектора и оболочки

можно учесть, например, с помощью метода начальных напряжений [1,2], который реализуется следующим образом. Прикладывается часть внешних нагрузок, решается задача линейной упругости. Определяются перемещения, деформации и напряжения. Затем напряжения в контактном слое корректируются в соответствии с соотношениями контактной среды. Далее определяется, где в контактной среде не выполняются условия контакта. Заново определяется область контакта, процесс повторяется до тех пор, пока условия контакта не будут выполняться с достаточной точностью. Далее прикладывается еще часть нагрузки, описанный выше процесс повторяется. Приращение нагрузки продолжается до тех пор, пока не будет приложена вся нагрузка.

### 3. Пример численного расчета

Была решена задача о контактном взаимодействии сектора полого цилиндра с цилиндрической оболочкой (рис. 5).

Оболочка закреплена ползунами вдоль образующих сектора, сверху и снизу. Сектор закреплён ползунами сверху и снизу, по образующим — условие непроникновения (контакт с абсолютно жестким телом без трения). Сектор нагревается неравномерно — температура в секторе задана параболическим законом в зависимости от радиуса:

$$T(r) = 700 - 32r^2.$$

Сектор имеет следующие характеристики: модуль Юнга  $E_0 = 200\,000$  МПа, коэффициент Пуассона  $\eta_0 = 0.3$ , коэффициент теплового расширения  $\alpha_0 = 0.0002$ , внутренний радиус  $R_0 = 1$ , внешний радиус  $R_1 = 4$ , угол сектора  $\alpha = 45^\circ$ . Характеристики оболочки: модуль Юнга  $E_1 = 80\,000$  МПа, коэффициент Пуассона  $\eta_1 = 0.35$ , коэффициент теплового расширения  $\alpha_1 = 0$ , внутренний радиус  $R_2 = 4.15$ ,

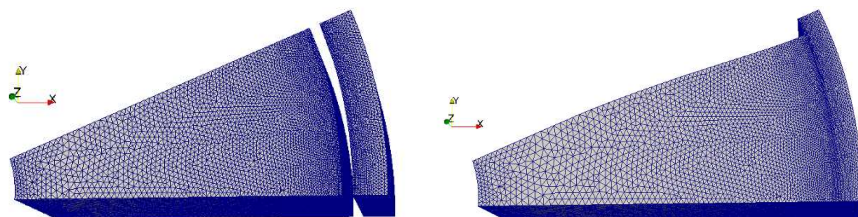


Рис. 6: Недеформированная (слева) и деформированная (справа) сетки для половины сектора

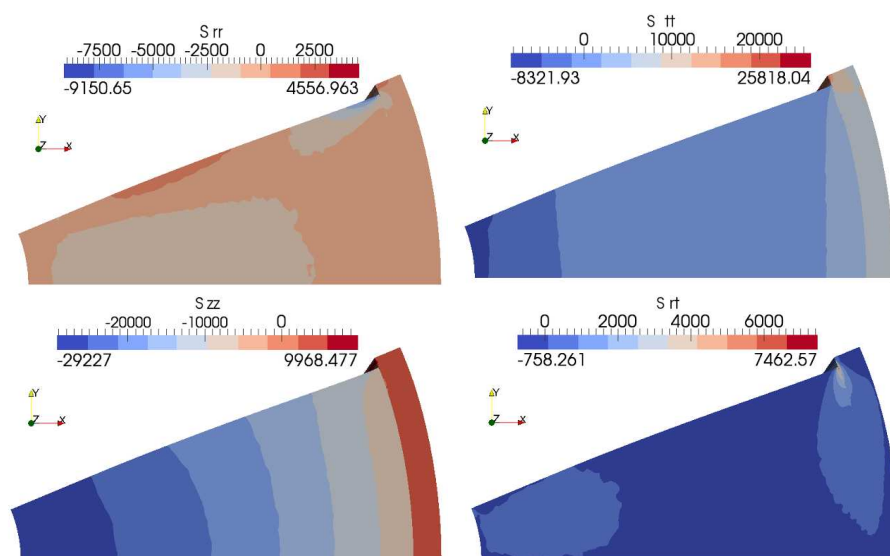


Рис. 7: Распределение напряжений в сечении сектора цилиндра и оболочки

внешний радиус  $R_3 = 4.4$ . Считается, что сектор и оболочка контактируют без проскальзывания. При решении учитывалась симметричность сектора и напряженно-деформированного состояния в нем относительно оси  $x$ . Вследствие симметричности расчеты выполнялись для половины сектора.

На рис. 6 представлены недеформированная и деформированная сетки для половины сектора.

На рис. 7 показано распределение напряжений в секторе цилиндра и оболочке в цилиндрической системе координат. Используются следующие обозначения: радиальные напряжения —  $S_{rr}$ , тангенциальные —  $S_{tt}$ , смешанные —  $S_{rt}$ , напряжения вдоль вертикальной оси —  $S_{zz}$ . Напряжения приведены для горизонтальной поверхности цилиндра и оболочки. Так как задача соответствует плоской деформации, напряжения на этой поверхности совпадают с напряжениями в горизонтальных сечениях для любого  $z$ . Значения напряжений указаны в МПа.

В процессе программной реализации рассмотренного подхода возник ряд труд-

ностей, связанных с нелинейностью контактной задачи, а также особенностями метода конечных элементов. При определенных значениях параметров модели возникла ситуация, когда деформируемые тела не взаимодействуют. Перемещения сектора цилиндра в этом случае могут быть определены с точностью до жесткого движения. Для метода конечных элементов это означает, что матрица жесткости близка к вырожденной. Использование прямых методов решения такой системы дает большую погрешность. Поэтому был использован итерационный метод решения линейных систем (метод сопряженных градиентов) [4]. Использование современных вычислительных технологий позволило значительно ускорить процесс решения. Технология CUDA [5] была использована при составлении матрицы жесткости (ускорение в 10 раз) и при решении линейной системы уравнений (ускорение в 5 раз).

### Заключение

Представленная модель контактного взаимодействия является довольно простой в реализации и в то же время достаточно общей, что позволяет решать с помощью этой модели широкий круг задач. Недостатком такого подхода к решению контактных задач является необходимость перестраивать контактные элементы, а, следовательно, и матрицу жесткости, в процессе решения. С другой стороны, наличие контактной среды позволяет легко определить её напряженное состояние и выяснить силы, действующие на контактирующие тела. Данная модель контактного взаимодействия реализована в пакете FIDESYS для решения задач в случае малых деформаций.

### Список литературы

- [1] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.
- [2] Кузьменко А.Г. Основные уравнения теории упругости и пластичности и метода конечного элемента. — Тула: Тульский политехнический институт, 1980.
- [3] Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. (Под редакцией В.А. Левина). Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. — М.: Физматлит, 2007.
- [4] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. — М: Физматлит, 1960.
- [5] <http://www.nvidia.ru>