

**ПРЯМОЕ ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ГОРДОНА НА СЛУЧАЙ
НЕРЕГУЛЯРНОГО ДЕНЕЖНОГО ПОТОКА**

Перевозчиков А.Г.*, Лесик А.И.**

*Тверской институт экологии и права, г. Тверь

**Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 13.05.2010, после переработки 20.06.2011.

Рассматривается предложенная ранее детерминированная модель прогнозирования темпов изменения чистого операционного дохода (ЧОД) в зависимости от предполагаемых темпов изменения стоимости недвижимости. Проведенные численные эксперименты показали ее недостаточную устойчивость и слабую зависимость прогноза от начального значения мультипликатора P/E (цена/прибыль). В связи с этим в настоящей работе предлагается другая модифицированная модель прогноза, которая может быть интерпретирована, как прямое обобщение формулы Гордона на случай нестационарного денежного потока. Проведенные численные эксперименты показали достаточную устойчивость предлагаемой модифицированной модели прогноза. Таким образом, модифицированная модель исправляет отмеченные недостатки базовой модели.

We consider previously proposed deterministic prediction model of net operating income's (NOI) rates of change depending on expected rates of change of property value. The numerical experiments revealed its insufficient stability and weak dependence of the forecast from the initial value of multiplier P/E (price/profit). Therefore in current research we propose another modified prediction model, which can be interpreted as direct extension of Gordon formula in case of unstable cash flow. The numerical experiments revealed sufficient stability of proposed modified prediction model. Thus the modified model corrects the deficiencies of basic model.

Ключевые слова: оценка недвижимости, рыночная стоимость, доходный подход, метод дисконтирования доходов, ставка дисконта, ставка капитализации, формула Гордона, чистый операционный доход (ЧОД), темп изменения стоимости недвижимости, темп изменения ЧОД.

Keywords: property estimate, market value, income approach, the method of profit's discounting, discount rate, capitalization rate, Gordon formula, net operational income (NOI), the rate of change of property value, NOI's rate of change.

Введение

Рассматривается задача прогнозирования темпов v_t изменения потока чистого операционного дохода (ЧОД) от аренды недвижимости, в зависимости от предпо-

лагаемого изменения темпов u_t ее стоимости [1,2]. Предполагаемые темпы изменения стоимости на ближайшее время известны из прогноза индекса роста стоимости строительно-монтажных работ (СМР), имеющегося в издании КО-ИНВЕСТ на ближайшие три года. Соответствующий прогноз изменения арендных ставок обычно известен из обзоров рынка, но достаточно приблизительно. В связи с этим в работе [3] была предложена детерминированная модель прогнозирования темпов изменения ЧОД в зависимости от предполагаемых темпов изменения стоимости недвижимости. Однако проведенные численные эксперименты показали ее недостаточную устойчивость и слабую зависимость прогноза от начального значения мультипликатора P/E . В связи с этим в настоящей работе предлагается другая модифицированная модель прогноза, которая может быть интерпретирована, как прямое обобщение формулы Гордона [4] на случай нерегулярного денежного потока. Ранее в работе [5] было предложено фундаментальное рекуррентное уравнение для ставки капитализации K_t и его аппроксимация, которая предполагает знание только v_t , если имеется подходящая аппроксимация для β_V^t - бета фактора модели САРМ, определенного по обычной статистической формуле, где случайная доходность недвижимости I_t заменена соответствующим случайным темпом V_t изменения ЧОД q_t . Подходящая аппроксимация β_V^t была предложена в [3]. Это позволило в [6] замкнуть модель и получить практически значимую методику прогнозирования ставки капитализации K_t . В [7] было предложено новое точное граничное условие для K_t , которое используется в исследовательских целях для проверки правильности исходной модели прогноза темпов изменения потока ЧОД. В настоящей работе полученные ранее рекуррентные уравнения и граничные условия используются для проверки правильности предложенного обобщения формулы Гордона. Проведенные численные эксперименты показали достаточную устойчивость предлагаемой модифицированной модели прогноза. Таким образом, предлагаемая модифицированная модель прогноза темпов изменения потока ЧОД исправляет недостатки базовой модели [3], отмеченные после ее апробации.

1. Детерминированный аналог стохастической модели постоянного роста стоимости

Предположим вначале, что текущая цена X_t актива в виде недвижимости меняется от период к периоду по правилу:

$$X_t = X_{t-1}(1 + u_t), \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $\{u_t\}$ – предполагаемая последовательность темпов ее изменения, которая в настоящей статье предполагается неслучайной (детерминированной). Эти темпы бывают известны из прогноза индекса роста стоимости строительно-монтажных работ (СМР), имеющегося в издании КО-ИНВЕСТ на ближайшие три года. Таким образом, в настоящей статье, следуя [3], рассматривается детерминированный вариант модели переменного роста.

Аналогично (1) предположим, что чистый операционный доход (ЧОД) q_t от аренды недвижимости меняется от период к периоду по правилу:

$$q_t = q_{t-1}(1 + v_t), \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где $\{v_t\}$ – соответствующая последовательность темпов изменения ЧОД, которая также предполагается неслучайной (детерминированной).

Начальные значения X_0 – стоимости недвижимости и ЧОД q_0 предполагаются известными, соответственно, из затратного подхода и из ретроспективных данных. Требуется определить последовательность $\{v_t\}$, если известна последовательность $\{u_t\}$.

2. Рекуррентное уравнение для инвестиционной стоимости

По определению ставки дисконта i , которая в этой работе предполагается постоянной, справедливо рекуррентное уравнение [3]:

$$X_{t-1} = \frac{q_t + X_t}{1 + i}, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Из фундаментального уравнения (3) следует, что справедливо представление:

$$X_{t-1}(1 + i) = q_{t-1}(1 + v_t) + X_{t-1}(1 + u_t). \quad (4)$$

Обозначим:

$$m_t = X_t/q_t \quad (5)$$

Эта величина представляет собой известный мультипликатор P/E=цена/прибыль. Иногда удобнее выразить обратную к ней величину $1/m_t$ в процентах.

Разделив обе части равенства (4) на X_{t-1} и учитывая (5), получим из (4) рекуррентное уравнение:

$$i = (1 + v_t)/m_{t-1} + u_t. \quad (6)$$

Отсюда получим искомое рекуррентное уравнение для неизвестной последовательности темпов $\{v_t\}$:

$$v_t = (i - u_t)m_{t-1} - 1 = \frac{i - u_t}{1/m_{t-1}} - 1, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Неизвестное начальное значение мультипликатора $m_0 = X_0/q_0$ является параметром модели, а дальше используется рекуррентное уравнение [3]:

$$1/m_t = 1/m_{t-1} \cdot \left(\frac{1 + v_t}{1 + u_t} \right), \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

3. Выбор ставки дисконта

Ставку дисконта i можно получить, например, из модели рынка капитала (САРМ) [1]:

$$i = r_f + \beta(r - r_f) + d, \quad (9)$$

Где i – искомая ставка дисконта,
 r_f – безрисковая ставка дохода,
 β – бета-фактор модели,
 r – среднерыночная доходность,
 d – поправка на факторы неучтенные в классической модели CAPM.

Пусть $I = I_t$ – случайная доходность объекта от сдачи в аренду, R – случайная доходность на соответствующем рынке. Предположим, что математическое ожидание $M_{I_t} = i_t$, $M_R = r$, где i_t определяется формулой:

$$i_t = \frac{q_t + X_t}{X_{t-1}} - 1 = 1/m_{t-1} \cdot (1 + v_t) + u_t. \quad (10)$$

Тогда бета-фактор определяется известной формулой статистики

$$\beta = \frac{K(I, R)}{D_R}, \quad (11)$$

где $K(I, R)$ – ковариация двух случайных величин I и R , D_R – дисперсия R .

Пусть U_t – случайная величина темпа изменения стоимости, соответствующая среднему темпу u_t изменения стоимости, а $V = V_t$ – случайная величина темпа изменения ЧОД, соответствующая среднему темпу v_t изменения ЧОД. Тогда доходность рынка $R = R_t$ в простейшем можно случае заменить на U_t и справедлива формула:

$$\beta = 1/m_{t-1} \cdot \beta_V + 1,$$

где β_V получается по формуле, аналогичной (11) [3]:

$$\beta_V = \frac{K(V, R)}{D_R}.$$

Замечание 1. Для оценки статистических характеристик $U_t(V_t)$ можно взять ряд фактически наблюдаемых в ретроспективе темпов изменения стоимости недвижимости (темпов изменения ЧОД). Конечно, при этом мы неявно исходим из предположения об эргодическом свойстве стационарности случайного процесса $\{U_t\}$ ($\{V_t\}$), что обычно и происходит при определении статистических характеристик произвольного случайного процесса, когда генеральная совокупность значений сечения процесса в данный момент времени по реализациям заменяется на генеральную совокупность сечений данной реализации по времени. В этом случае среднее значение $\bar{U}_t = r(\bar{V}_t = v)$ фактически не зависит от времени. Не зависимой от времени в этом случае будет и величина $\Delta r = r - r_f$.

4. Определение ставки капитализации

Заметим, что величина

$$K_t = (1 + v_t) \cdot 1/m_{t-1} = \frac{q_{t-1}(1 + v_t)}{X_{t-1}}, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

в (6) представляет собой ставку капитализации, в смысле:

$$X_{t-1} = \frac{q_{t-1}(1+v_t)}{K_t}, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

В частности, при $t = 0$, получим из (12) формулу:

$$X_0 = \frac{q_0(1+v_1)}{K_1}. \quad (14)$$

Формула (14) решает задачу определения текущей инвестиционной стоимости недвижимости.

Ставка капитализации K_1 находится по формуле (5) которая принимает вид:

$$i = K_t + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Формуле (17) можно придать форму:

$$K_t = i - u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Замечание 2. Заметим, что в постпрогнозный стационарный период $v_t = u_t = \text{const}, t = n + 1, \dots$, т.е. модель роста является односкоростной и формула (18) превращается в формулу Гордона для ставки капитализации:

$$K_t = i - v_t, \quad t = n + 1, \dots \quad (17)$$

Таким образом, полученная нами точная формула (16) обобщает формулу Гордона (17) для ставки капитализации на нестационарный прогнозный период.

Замечание 3. Справедлива формула:

$$1/m_t = \frac{i - u_t}{1 + u_t} = \frac{K_t}{1 + u_t}. \quad (18)$$

Она следует из определения ставки капитализации (13), обобщенной формулы Гордона (16) и определения мультипликатора (5).

Теперь из определения ставки капитализации (13) получим с определения мультипликатора (5) формулу:

$$v_t = \frac{K_t}{1/m_{t-1}} - 1. \quad (19)$$

Выражая $1/m_{t-1}$ из формулы (18), получим:

$$v_t = \frac{K_t}{K_{t-1}}(1 + u_{t-1}) - 1. \quad (20)$$

Или, с учетом обобщенной формулы Гордона (17):

$$v_t = \frac{i - u_t}{i - u_{t-1}}(1 + u_{t-1}) - 1, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

Таким образом, рекуррентное уравнение (7) оказывается не нужным, как и соответствующее рекуррентное уравнение (8) для $1/m_t$. Связь между темпами u_t и v_t дается конечной формулой (21).

5. Фундаментальное уравнение для ставки капитализации

Ставка капитализации K_1 является решением фундаментального рекуррентного уравнения, полученного в [3]:

$$K_t = \frac{1+i}{1 + \frac{1+v_{t+1}}{K_{t+1}}}; \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

Граничное условие для уравнения (22) дает формула Гордона (19) для постпрогнозной ставки капитализации:

$$K_{n+1} = i - v_{n+1}. \quad (23)$$

Здесь v_{n+1} - постпрогнозные значения темпа изменения ЧОД, постоянное (на уровне v_n) в силу предположения о стационарности постпрогнозного периода.

При известных $v_t, t = 1, 2, \dots, n$, уравнение (22) можно решить последовательно для $t = n, n-1, \dots, 1$, отправляясь от граничного условия (23).

Для проверки правильности конечной формулы (21) для прогнозирования темпа изменения ЧОД в исследовательских целях можно вместо (23) использовать точное граничное условие (16):

$$K_{n+1} = i - u_{n+1}. \quad (24)$$

6. Пример прогноза по докризисному индексу роста стоимости СМР

Приведем числовой пример прогноза темпов изменения ЧОД от аренды недвижимости для следующих докризисных исходных данных в пересчете на квартал:

$$r_f = 7,8/4 = 1,95\%; r = 3,52\%; \Delta r = 1,58\%;$$

$$d = 5/4 = 1,25\%; n = 10, \beta = 1, 1.$$

В качестве исходной последовательности темпов используем докризисный прогноз темпов изменения индекса роста стоимости СМР из издания КО-ИНВЕСТ № 60 за 2007 год на 12 кварталов начиная с июня 2007 года. Тем самым предполагается, что рост стоимости СМР в будущем определяет рост полной восстановительной стоимости недвижимости.

Безрисковая ставка $r_f = 7,8\%$ взята по данным svr.ru по депозитам в рублях для юридических лиц со сроком свыше 1 года. Средняя квартальная доходность индекса СМР $r = 3,52\%$ подсчитана для наглядности по тем же прогнозным данным.

В таблице 1 приведен расчет соответствующих прогнозных значений изменения ЧОД. Видно, что значение ставки капитализации K_1 в (13), определенное по формуле (15) при $t = 1$ и из уравнения (21) с конечным условием (23) совпадают.

Таблица 1: Расчет прогнозных значений темпов изменения ЧОД. Часть I

№	Наименование	0	1	2	3	4	5
1	Темп изменения стоимости $ut, \%$	3,818	3,769	3,721	3,672	3,624	3,577
2	Темп изменения ЧОД $vt, \%$		8,360	8,030	7,897	7,603	7,330
3	Ставка капитализации Kt , определенная по формуле (15), %	1,12	1,17	1,22	1,27	1,31	1,36
4	Ставка капитализации Kt , определенная по фундаментальному рекуррентному уравнению (21) с точным конечным условием (23), доля		0,0117	0,0122	0,0127	0,0131	0,0136

Часть II

№	Наименование	6	7	8	9	10	11
1	Темп изменения стоимости $ut, \%$	3,530	3,483	3,437	3,392	3,347	3,303
2	Темп изменения ЧОД $vt, \%$		6,986	6,755	6,538	6,401	6,205
3	Ставка капитализации Kt , определенная по формуле (15), %	1,41	1,46	1,50	1,55	1,59	1,64
4	Ставка капитализации Kt , определенная по фундаментальному рекуррентному уравнению (21) с точным конечным условием (23), доля	0,0141	0,0146	0,0150	0,0155	0,0159	0,0164

Заключение

В настоящей работе предложено обобщение формулы Гордона для ставки капитализации на нестационарный прогнозный период. В качестве следствия получена конечная формула для прогнозирования темпов изменения ЧОД, использующая какие-то прогнозные значения темпов изменения стоимости недвижимости, отождествляемые, например, с доходностью прогноза индекса роста стоимости СМР. Проведенные численные эксперименты показали достаточную устойчивость предлагаемой модели прогнозирования. Эти результаты имеют самостоятельное методологическое значение для применения метода прямой капитализации в условиях прогнозирования темпов роста с использованием двухскоростной модели переменного роста и носят фундаментальный характер.

Список литературы

- [1] Оценка бизнеса: Учебник/ Под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М.: Финансы и статистика. – 2002.
- [2] Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и/или активов ОАО РАО “ЕЭС России” и ДЗО ОАО РАО “ЕЭС России”. - Deloitte&Touche. – декабрь 2003 - март 2005.
- [3] Батурина О.Ю., Басангов Ю.М., Перевозчиков А.Г. Прогнозирование изменения чистого операционного дохода от аренды недвижимости в зависимости от предполагаемого изменения ее стоимости. Финансы и кредит, № 5, 2009, с.42-46.
- [4] Перевозчиков А.Г. О связи формулы Гордона с формулой Фишера. Финансы и кредит, № 3, 2009, с. 65-68.
- [5] Перевозчиков А.Г. Стохастическая модель переменного роста для оценки стоимости некотируемых активов. Финансы и кредит, № 27, 2004, с. 22-26.
- [6] Перевозчиков А.Г. К рекуррентному уравнению для ставки капитализации чистого операционного дохода от аренды недвижимости. Финансовая аналитика, № 8, 2009, с. 34-37.
- [7] Перевозчиков А.Г. К граничному условию для фундаментального рекуррентного уравнения для ставки капитализации. Финансовая аналитика, № 9, 2009, с. 64-67.