ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УДК 514.7

ОБОБЩЕННАЯ ЛЕВАЯ ТРИ-ТКАНЬ БОЛА $B_l(\rho, r, r)$ КАК ФАКТОР-ТКАНЬ ЛЕВОЙ ТКАНИ БОЛА $B_l(r, r, r)$

Толстихина Г.А.
Кафедра математики с методикой начального обучения

Поступила в редакцию 10.06.2011, после переработки 15.06.2011.

Обобщенная левая три-ткань Бола $B_l(\rho, r, r)$, порождаемая действием локальной гладкой r-мерной квазигруппы Бола на гладком ρ-мерном многообразии, реализуется как фактор-ткань левой три-ткани Бола $B_l(r, r, r)$, которая образована тремя r-мерными слоениями и имеет ту же сердцевину, что и ткань $B_l(\rho, r, r)$.

Generalized left Bol 3-web $B_l(\rho, r, r)$ defined by action of an r-dimensional local smooth Bol quasigroup on ρ-dimensional manifold is considered. The following statement is proved: the Bol 3-web $B_l(\rho, r, r)$ can be realized as factor-web of a left Bol 3-web $B_l(r, r, r)$ which is formed by 3 r-dimensional foliations and its core coincides with the core of the given 3-web $B_l(\rho, r, r)$.

Ключевые слова: три-ткань Бола, квазигруппа Бола, фактор-ткань, сердцевина ткани Бола.
Keywords: Bol three-web, Bol quasigroup, factor-web, core of Bol 3-web.

Введение

Естественным обобщением понятий группы Ли и группы Ли преобразований являются понятия локальной гладкой квазигруппы [6] и квазигруппы преобразований [5]. Последнее понятие возникло в связи с тем, что в физике были обнаружены неассоциативные структуры, близкие в определенном смысле к группам Ли, см. об этом в [7], [8], [9]. Обобщение теории групп Ли преобразований для луп Муфанг и Бола начато в работах [10], [11]. В указанных работах квазигруппа преобразований рассматривается как семейство преобразований гладкого многообразия, не замкнутое, вообще говоря, относительно композиции. В нашей работе [16] предлагается несколько иной подход: квазигруппа преобразований определяется как действие локальной гладкой r-мерной квазигруппы $Q(*)$ на гладком ρ-мерном многообразии Y, $(1 \leq \rho \leq r)$, и задается гладкой функцией

$$f: \ Q \times Y \to Y, \quad z = f(a, y), \quad a \in Q, \quad y, \ z \in Y, \tag{0.1}$$

причем ранги матриц $(\dfrac{\partial f}{\partial a})$ и $(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ максимальны в каждой точке области определения ткани. Уравнение (0.1) определяет три-ткань $QW(\rho, r, r)$, образованную на прямом произведении $Q \times Y$ одним слоением ρ-мерных слоев $a = const$ и двумя слоениями r-мерных слоев: $y = const$ и $z = f(a, y) = const$. Такой подход позволяет использовать методы теории три-тканей (см. [1]–[4]) для изучения различных классов локальных гладких квазигрупп преобразований, в том числе *квазигрупп Бола преобразований.* Согласно [16] квазигруппа Бола преобразований с параметрической квазигруппой $Q(*)$ задается гладкой функцией (0.1), которая удовлетворяет тождеству:

$$f(a, f^{-1}(b, f(a, y))) = f(a * b, y), \quad a, b \in Q, \quad y \in Y. \tag{0.2}$$

Этому тождеству на ткани $QW(\rho, r, r)$ соответствует конфигурация, аналогичная известной левой конфигурации Бола (B_l) [1]. Поэтому три-ткань $QW(\rho, r, r)$, порождаемая квазигруппой Бола преобразований, названа *обобщенной левой три-тканью Бола* и обозначена $B_l(\rho, r, r)$.

Согласно [14] три-ткань $B_l(\rho, r, r)$ имеет *сердцевину* $(*) : Q \times Q \to Q$, $c = a * b$, которая задается той же операцией $(*)$, что и параметрическая квазигруппа $Q(*)$ квазигруппы Бола преобразований. Квазигруппа $Q(*)$ индуцирует на базе Q первого слоения ткани $B_l(\rho, r, r)$ локально симметрическую структуру [17]. В настоящей работе найдены структурные уравнения локально симметрической связности, индуцируемой на Q сердцевиной ткани $B_l \equiv B_l(r, r, r)$ (Теорема 1). Отмечено, что для заданной ткани B_l построенная симметрическая связность является единственной. Однако остается открытым вопрос: сколько существует неэквивалентных тканей B_l, имеющих заданную симметрическую связность (или сердцевину)? Аналогичная проблема сформулирована в [4] для средней ткани Бола (ткани B_m).

В [15] найдены условия, при которых три-ткань $W(r, r, r)$ допускает *фактор-ткань* $\overline{W}(\rho, r, r)$. В настоящей работе доказано (Теорема 2), что если левая ткань Бола B_l допускает фактор-ткань $\overline{W}(\rho, r, r)$, то последняя является обобщенной левой тканью Бола $B_l(\rho, r, r)$ с той же сердцевиной, что и ткань B_l. Найдены структурные уравнения три-ткани B_l, допускающей фактор-ткань $B_l(\rho, r, r)$, и показано, как получаются структурные уравнения три-ткани B_l, для которой заданная ткань $B_l(\rho, r, r)$ является фактор-тканью (Теорема 3). Оказалось, что для ткани $B_l(\rho, r, r)$ соответствующая ткань B_l определяется, вообще говоря, неоднозначно. Этот факт проиллюстрирован на примере некоторой пятимерной три-ткани $B_l(2, 3, 3)$. Для нее найдены две неэквивалентные шестимерные ткани B_l^1 и B_l^2, для каждой из которых три-ткань $B_l(2, 3, 3)$ является фактор-тканью.

1. Основные понятия

Определение 1. *Три-тканью $W(p, q, r)$ ($p \le r$, $q \le r$) на дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$ размерности $p + q$ называется совокупность трех гладких слоений λ_1, λ_2 и λ_3, слои которых имеют соответственно размерности p, q и r, причем любые два из этих слоений находятся в общем положении.*

Согласно [13] слоения ткани $W(p, q, r)$ могут быть заданы в некоторых локальных координатах на многообразии $\mathcal{M}$ уравнениями

$$\lambda_1 : \ x = const, \quad \lambda_2 : \ y = const, \quad \lambda_3 : \ z = f(x, y) = const, \tag{1.1}$$

где $x = (x^1, ..., x^q)$, $x \in X$, $y = (y^1, ..., y^p)$, $y \in Y$, $z = (z^1, ..., z^\lambda)$, $\lambda = p + q - r$, $z \in Z$, $f = (f^1, ..., f^\lambda)$, f – гладкая функция и ранги матриц Якоби $(\dfrac{\partial f}{\partial x})$ и $(\dfrac{\partial f}{\partial y})$

максимальны в каждой точке многообразия $\mathcal{M}$. Множества X, Y и Z размерности q, p и $p+q-r$ соответственно являются базами слоений три-ткани $W(p,q,r)$.

Уравнение

$$z = f(x,y) \tag{1.2}$$

связывает параметры x, y и z слоев первого, второго и третьего слоений три-ткани $W(p,q,r)$, проходящих через одну точку многообразия $\mathcal{M}$, и называется *уравнением три-ткани* $W(p,q,r)$.

С другой стороны, уравнение (1.2) определяет трехбазисную бинарную операцию

$$(\cdot):\ X \times Y \to Z, \quad z = f(x,y) \equiv x \cdot y, \tag{1.3}$$

которая называется *локальным координатным группоидом три-ткани* $W(p,q,r)$.

При $p = q = r$ уравнение $z = x \cdot y$ локально однозначно разрешимо относительно переменных x и y, поэтому операция $(\cdot)$ является гладкой локальной квазигруппой [6]. Она называется локальной координатной квазигруппой соответствующей три-ткани $W(r,r,r)$ [2]. Для три-ткани $W(p,q,r)$ размерности многообразий X, Y и Z, вообще говоря, различны, поэтому операция $(\cdot)$ квазигруппой, вообще говоря, не является.

Переменные x, y и z, входящие в уравнение (1.2), допускают преобразования вида

$$\tilde{x} = \alpha(x), \quad \tilde{y} = \beta(y), \quad \tilde{z} = \gamma(z), \tag{1.4}$$

где α, β, γ – локальные диффеоморфизмы. Тройка локальных биекций (α, β, γ) называется *изотопическим преобразованием* или *изотопией* [4]. Изотопическим преобразованием (1.4) уравнение (1.2) приводится к виду

$$\tilde{z} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \gamma \circ f(\alpha^{-1}(\tilde{x}), \beta^{-1}(\tilde{y})).$$

Последнее определяет координатный группоид некоторой другой ткани $\tilde{W}(p,q,r)$. Три-ткани $W(p,q,r)$ и $\tilde{W}(p,q,r)$, координатные группоиды которых изотопны, являются эквивалентными [13].

Определение 2. *Пусть $Q(*)$ — локальная дифференцируемая r-мерная квазигруппа, Y — гладкое ρ-мерное многообразие, $(\rho \le r)$, и на прямом произведении $Q \times Y$ задана гладкая функция*

$$f:\ Q \times Y \to Y, \quad z = f(a,y), \tag{1.5}$$

такая, что

1) в каждой точке множества $Q \times Y$ ранги матриц $(\dfrac{\partial f}{\partial a})$ и $(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ максимальны;

2) для любых $y \in Y$ и $a, b \in Q$ выполняется условие

$$f(a, f^{-1}(b, f(a,y))) = f(a * b, y), \tag{1.6}$$

где $f^{-1}:\ Q \times Y \to Y$, $y = f^{-1}(a,z)$. Тогда будем говорить, что функция f определяет действие квазигруппы $Q(*)$ на многообразии Y по правилу (1.6).

Рассмотрим три-ткань $W(\rho, r, r)$, образованную на многообразии $\mathcal{M} = Q \times Y$ тремя слоениями

$$\lambda_1:\ a = const, \quad \lambda_2:\ y = const, \quad \lambda_3:\ z = f(a,y) = const,$$

слои которых имеют размерности ρ, r и r соответственно. В [16] показано, что тождеству (1.6) на ткани $W(\rho,r,r)$ соответствует конфигурация, аналогичная известной левой конфигурации Бола (B_l), см. рис. 1, где, как обычно, слои первого, второго и третьего слоений ткани изображаются соответственно вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями, $c=a*b$.

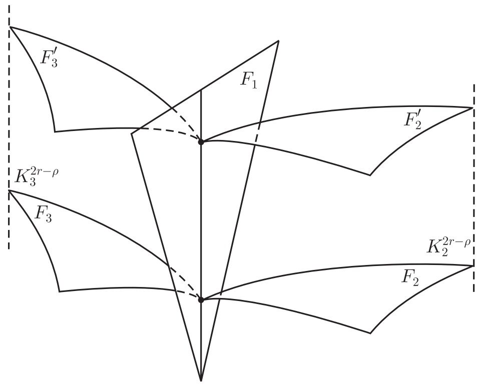

Рис. 1. Левая конфигруация Бола (B_l)

Согласно [16], квазигруппа $Q(*)$, действующая на многообразии Y по правилу (1.6), является идемпотентой $(a*a=a)$, левообратимой $(a*(a*b)=b)$ и леводистрибутивной $(a*(b*c)=(a*b)*(a*c))$, а значит, изотопна левой лупе Бола. Напомним [6], что лупа (квазигруппа с единицей) с операцией $(\circ)$ называется левой лупой Бола, если в ней выполняется левое тождество Бола: $(u\circ(v\circ u))\circ w=u\circ(v\circ(u\circ w))$.

Определение 3. *Гладкое действие $f:\ Q\times Y\to Y$ локальной дифференцируемой квазигруппы Бола $Q(*)$ на гладком многообразии Y, определяемое правилом (1.6), называется квазигруппой Бола преобразований. Квазигруппа Бола $Q(*)$ называется параметрической квазигруппой квазигруппы Бола преобразований.*

Определение 4. *Три-ткань $W(\rho,r,r)$, определяемая квазигруппой Бола преобразований, называется обобщенной левой тканью Бола и обозначается $B_l(\rho,r,r)$.*

Квазигруппа Бола преобразований (1.5) является локальным координатным группоидом три-ткани $B_l(\rho,r,r)$ и рассматривается с точностью до изотопических преобразований вида (1.4). Параметрическая квазигруппа $Q(*)$ квазигруппы Бола преобразований определяет, согласно [14], *сердцевину* три-ткани $B_l(\rho,r,r)$. Сердцевина задается тем же уравнением $c=a*b$, что и квазигруппа $Q(*)$.

В частности, при $\rho=r$ получаем левую ткань Бола $B_l\equiv B_l(r,r,r)$, образованную тремя гладкими r-мерными слоениями. При этом функция f определяет локальную координатную квазигруппу ткани B_l, изотопную левой лупе Бола [1]. Отметим, что сердцевина $c=a*b$ ткани B_l не изотопна, вообще говоря, ее координатной квазигруппе.

2. Структурные уравнения локально симметрической связности, индуцируемой левой тканью Бола

Пусть $W(r,r,r)$ — левая три-ткань Бола (ткань $B_l\equiv B_l(r,r,r)$) с сердцевиной $c=a*b$ на базе X первого слоения ткани B_l, см. рис. 1. С другой стороны, операция

$(*)$ порождает на X структуру локально симметрического пространства, которая задается семейством гладких функций S_a, таких, что $S_a(b) = a * b$ для любых $a \in X$ и $b \in U_a \subset X$, где U_a — достаточно малая окрестность точки a, см. [12]. Согласно [16] (см. также [14]), функции S_a являются локальными симметриями, а многообразие $\{X, S_a\}$ будет локально симметрическим пространством.

Найдем структурные уравнения соответствующей локально симметрической связности (аффинной связности без кручения и с ковариантно постоянным тензором кривизны). Для этого запишем структурные уравнения произвольной три-ткани $W(r, r, r)$ [1]. Дифференцируя (1.3) и обозначая $\bar{f}^i_j = \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$, $\tilde{f}^i_j = \dfrac{\partial f^i}{\partial y^j}$, получим уравнения:

$$dz^i = \bar{f}^i_j dx^j + \tilde{f}^i_j dy^j. \tag{2.1}$$

Положим:

$$\underset{1}{\omega}^i = \bar{f}^i_j dx^j, \quad \underset{2}{\omega}^i = \tilde{f}^i_j dy^j. \tag{2.2}$$

Тогда в силу (1.1) слоения ткани $W(r, r, r)$ будут определяться уравнениями:

$$\lambda_1 : \ \underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_2 : \ \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_3 : \ \underset{3}{\omega}^i \overset{def}{\equiv} \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0. \tag{2.3}$$

Формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ образуют на $\mathcal{M}$ кобазис и удовлетворяют следующим структурным уравнениям [1]:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk} \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk} \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \tag{2.4}$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + b^i_{jkl} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l. \tag{2.5}$$

Величины a^i_{jk} и b^i_{jkl} являются тензорами и называются соответственно тензорами кручения и кривизны три-ткани $W(r, r, r)$. Они связаны соотношениями

$$b^i_{[jkl]} = 2a^m_{[jk} a^i_{|m|l]} \tag{2.6}$$

и удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla a^i_{jk} \equiv da^i_{jk} - a^i_{mk}\omega^m_j - a^i_{jm}\omega^m_k + a^m_{jk}\omega^i_m = b^i_{[j|l|k]} \underset{1}{\omega}^l + b^i_{[jk]l} \underset{2}{\omega}^l, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \nabla b^i_{jkl} \equiv\ & db^i_{jkl} - b^i_{mkl}\omega^m_j - b^i_{jml}\omega^m_k - b^i_{jkm}\omega^m_l + b^m_{jkl}\omega^i_m = \\ & = \underset{1}{C}{}^i_{jklm} \underset{1}{\omega}^m + \underset{2}{C}{}^i_{jklm} \underset{2}{\omega}^m, \end{aligned} \tag{2.8}$$

при этом

$$\underset{1}{C}{}^i_{j[k|l|m]} = b^i_{jpl} a^p_{km}, \tag{2.9}$$

$$\underset{2}{C}{}^i_{jk[lm]} = -b^i_{jkp} a^p_{lm}, \tag{2.10}$$

$$\underset{1}{C}{}^i_{[jk]ml} - \underset{2}{C}{}^i_{[j|l|k]m} = a^i_{pj} b^p_{klm} - a^i_{pk} b^p_{jlm} + a^p_{jk} b^i_{plm}. \tag{2.11}$$

В уравнениях (2.7) и (2.8) через ∇ обозначен оператор ковариантного дифференцирования в аффинной связности Γ, которая определяется на многообразии $\mathcal{M}$

формами $(\underset{1}{\omega}^i,\ \underset{2}{\omega}^i)$ и $\begin{pmatrix} \omega_j^i & 0 \\ 0 & \omega_j^i \end{pmatrix}$. Она называется канонической аффинной связностью [4] (или связностью Черна [18]), а существенные компоненты ее тензоров кручения и кривизны суть тензоры a^i_{jk} и b^i_{jkl} три-ткани $W(r,r,r)$.

Согласно [4] связность Γ входит в пучок аффинных связностей $\gamma(W)$, определяемых формами
$$\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j + a^i_{jk}(p\underset{1}{\omega}^k + q\underset{2}{\omega}^k), \tag{2.12}$$
где p и q — постоянные. В каждой связности из пучка $\gamma(W)$ слои ткани $W(r,r,r)$ являются вполне геодезическими. Более того, все эти связности имеют на слоях ткани одни и те же геодезические линии.

Напомним также, что в пучке $\gamma(W)$ имеются связности, индуцирующие на слоях второго и третьего (первого и третьего) слоений ткани $W(r,r,r)$ связности без кручения. Так, при $p=1$ и $q=0$ получаем связность $\tilde{\Gamma}_{23}$, определяемую формами
$$\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_j = \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^k. \tag{2.13}$$
С учетом равенств (2.13) структурные уравнения (2.4), (2.5) ткани $W(r,r,r)$, образованной слоениями (2.3), примут вид:
$$\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_j,\\
&d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k,\\
&d\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_j = \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^k_j \wedge \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_k + (a^i_{jm}a^m_{kl} - a^m_{jk}a^i_{ml} + b^i_{[j|k|l]})\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l + b^i_{(jk)l}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l.
\end{aligned} \tag{2.14}$$
Из уравнений (2.14) видно, что связность $\tilde{\Gamma}_{23}$ индуцирует на слоях второго и третьего слоений три-ткани $W(r,r,r)$ связности без кручения.

Аналогично, при $p=0$ и $q=-1$ получаем связность $\tilde{\Gamma}_{13}$, которая также индуцирует связности без кручения на слоях первого и третьего слоений три-ткани $W(r,r,r)$.

Теорема 1. *Формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_j$ вида (2.13) определяют на базе первого слоения левой ткани Бола $B_l(r,r,r)$ (и только такой ткани) локально симметрическую связность.*

Доказательство. Из уравнений (2.14) следует, что формы $\{\underset{1}{\omega}^i,\ \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_j\}$ будут определять на базе первого слоения три-ткани $W(r,r,r)$ аффинную связность (обозначим ее $\tilde{\Gamma}$) в том и только том случае, если выполняются условия:
$$b^i_{(jk)l} = 0. \tag{2.15}$$
Согласно [1], эти условия характеризуют три-ткани $B_l \equiv B_l(r,r,r)$.

Из уравнений (2.14) с учетом (2.15) следует также, что связность $\tilde{\Gamma}$ не имеет кручения, а ее тензор кривизны (обозначим его $\tilde{R}^i_{jkl}$) имеет вид:
$$\tilde{R}^i_{jkl} = a^i_{jm}a^m_{kl} - a^m_{j[k}a^i_{|m|l]} + \frac{1}{2}b^i_{[kl]j} + \frac{1}{2}b^i_{j[kl]}.$$
Последние равенства в силу (2.6) и (2.15) эквивалентны следующим:
$$\tilde{R}^i_{jkl} = \frac{1}{4}(b^i_{klj} - 2a^i_{mj}a^m_{kl}). \tag{2.16}$$

Обозначим $\tilde{\nabla}$ — оператор ковариантного дифференцирования в связности $\tilde{\Gamma}$. Покажем, что $\tilde{\nabla}\tilde{R}^i_{jkl} = 0$. Для этого используем уравнения (2.7) и (2.8). В силу (2.15) уравнения (2.7) примут вид:

$$\nabla a^i_{jk} = -b^i_{l[jk]}\underset{1}{\omega}^l + b^i_{jkl}\underset{2}{\omega}^l. \tag{2.17}$$

Теперь рассмотрим уравнения (2.8). Напомним [4], что для средней ткани Бола (ткани B_m) величины $\underset{1}{C}{}^i_{jklm}$ и $\underset{2}{C}{}^i_{jklm}$ полностью выражаются через компоненты ее тензоров a^i_{jk} и b^i_{jkl}. Найдем аналогичные выражения величин $\underset{1}{C}{}^i_{jklm}$ и $\underset{2}{C}{}^i_{jklm}$ для левой ткани Бола. Из (2.8) в силу (2.15) имеем:

$$\underset{1}{C}{}^i_{(jk)lm} = 0, \quad \underset{2}{C}{}^i_{(jk)lm} = 0. \tag{2.18}$$

Тогда из (2.11) находим:

$$\underset{1}{C}{}^i_{jkml} = \frac{1}{2}\underset{2}{C}{}^i_{jlkm} - \frac{1}{2}\underset{2}{C}{}^i_{kljm} + a^i_{pj}b^p_{klm} - a^i_{pk}b^p_{jlm} + a^p_{jk}b^i_{plm}. \tag{2.19}$$

Отсюда с учетом (2.9) получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\underset{2}{C}{}^i_{jlkm} - \frac{1}{2}\underset{2}{C}{}^i_{kljm} - \frac{1}{4}\underset{2}{C}{}^i_{jklm} = b^i_{jpm}a^p_{kl} - a^i_{pj}b^p_{klm} + \\ &+\frac{1}{2}(a^i_{pk}b^p_{jlm} - a^i_{pl}b^p_{jkm}) - \frac{1}{2}(a^p_{jk}b^i_{plm} - a^p_{jl}b^i_{pkm}). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Альтернируя последние равенства по индексам j, l и учитывая (2.18), получим соотношения:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\underset{2}{C}{}^i_{jlkm} + \frac{3}{4}\underset{2}{C}{}^i_{k[jl]m} = b^i_{[j|pm}a^p_{k|l]} - a^i_{p[j}b^p_{|k|l]m} + \\ &+\frac{1}{2}(a^i_{pk}b^p_{jlm} - a^i_{p[l}b^p_{j]km}) - \frac{1}{2}(a^p_{[j|k}b^i_{p|l]m} - a^p_{jl}b^i_{pkm}). \end{aligned}$$

Аналогично, симметрируя равенства (2.20) по тем же индексам j и l, получим:

$$\frac{3}{4}\underset{2}{C}{}^i_{k(jl)m} = -3b^i_{(j|pm}a^p_{k|l)} + 3a^i_{p(j}b^p_{|k|l)m} + \frac{3}{2}a^i_{p(l}b^p_{j)km} + \frac{3}{2}a^p_{(j|k}b^i_{p|l)m}.$$

Складывая полученные равенства, будем иметь соотношения:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\underset{2}{C}{}^i_{jlkm} = \frac{3}{4}\underset{2}{C}{}^i_{jklm} + b^i_{[j|pm}a^p_{k|l]} - a^i_{p[j}b^p_{|k|l]m} + \\ &+\frac{1}{2}(a^i_{pk}b^p_{jlm} - a^i_{p[l}b^p_{j]km}) - \frac{1}{2}(a^p_{[j|k}b^i_{p|l]m} - a^p_{jl}b^i_{pkm}) - \\ &-3b^i_{(j|pm}a^p_{k|l)} + 3a^i_{p(j}b^p_{|k|l)m} + \frac{3}{2}a^i_{p(l}b^p_{j)km} + \frac{3}{2}a^p_{(j|k}b^i_{p|l)m}. \end{aligned}$$

В последних поменяем местами индексы j и k, затем полученные уравнения умножим на (-2). В результате получим равенства:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\underset{2}{C}{}^i_{kljm} = \frac{3}{2}\underset{2}{C}{}^i_{jklm} - 2b^i_{[k|pm}a^p_{j|l]} + 2a^i_{p[k}b^p_{|j|l]m} - \\ &-(a^i_{pj}b^p_{klm} - a^i_{p[l}b^p_{k]jm}) + (a^p_{[k|j}b^i_{p|l]m} - a^p_{kl}b^i_{pjm}) + \\ &+6b^i_{(k|pm}a^p_{j|l)} - 6a^i_{p(k}b^p_{|j|l)m} - 3a^i_{p(l}b^p_{k)jm} - 3a^p_{(k|j}b^i_{p|l)m}. \end{aligned}$$

Подставим найденные выражения для $\frac{1}{4}\underset{2}{C}^i_{jlkm}$ и $-\frac{1}{2}\underset{2}{C}^i_{kljm}$ в равенства (2.20). После вычислений имеем:

$$\underset{2}{C}^i_{jklm} = 2a^i_{pl}b^p_{jkm} + 2a^p_{jk}b^i_{plm}. \tag{2.21}$$

С учетом последних из равенств (2.19) находим:

$$\underset{1}{C}^i_{jkml} = a^p_{jl}b^i_{pkm} - a^p_{kl}b^i_{pjm} + a^p_{jk}b^i_{plm}. \tag{2.22}$$

Таким образом, величины $\underset{1}{C}^i_{jklm}$ и $\underset{2}{C}^i_{jklm}$ левой ткани Бола $B_l \equiv B_l(r,r,r)$ выражаются через компоненты ее тензоров кручения и кривизны по формулам (2.21) и (2.22). В силу последних уравнения (2.8) для ткани B_l примут следующий вид:

$$\nabla b^i_{jkl} = (a^p_{jm}b^i_{pkl} - a^p_{km}b^i_{pjl} + a^p_{jk}b^i_{pml})\underset{1}{\omega}^m + 2(a^i_{pl}b^p_{jkm} + a^p_{jk}b^i_{plm})\underset{2}{\omega}^m. \tag{2.23}$$

Кроме того, величины $\underset{2}{C}^i_{jklm}$ произвольной ткани $W(r,r,r)$ удовлетворяют условиям (2.10). Подставляя (2.21) в (2.10), получим соотношения:

$$a^i_{pl}b^p_{jkm} - a^i_{pm}b^p_{jkl} + b^i_{plm}a^p_{jk} - b^i_{pml}a^p_{jk} + b^i_{jkp}a^p_{lm} = 0, \tag{2.24}$$

связывающие тензоры кручения и кривизны ткани B_l.

Теперь найдем выражения для $\tilde{\nabla}a^i_{jk}$ и $\tilde{\nabla}b^i_{jkl}$. Так как по определению

$$\tilde{\nabla}a^i_{jk} \equiv da^i_{jk} - a^i_{mk}\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^m_j - a^i_{jm}\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^m_k + a^m_{jk}\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_m,$$
$$\tilde{\nabla}b^i_{jkl} \equiv db^i_{jkl} - b^i_{mkl}\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^m_j - b^i_{jml}\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^m_k - b^i_{jkm}\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^m_l + b^m_{jkl}\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_m,$$

то в силу (2.13), (2.17), (2.23), (2.24), (2.6) и (2.3) получаем:

$$\tilde{\nabla}a^i_{jk} = \frac{1}{2}b^i_{jkl}(\underset{3}{\omega}^l + \underset{2}{\omega}^l), \tag{2.25}$$

$$\tilde{\nabla}b^i_{jkl} = (a^i_{pl}b^p_{jkm} + a^p_{jk}b^i_{plm})(\underset{3}{\omega}^m + \underset{2}{\omega}^m). \tag{2.26}$$

Дифференцируя равенства (2.16) с помощью оператора $\tilde{\nabla}$ и пользуясь уравнениями (2.25) и (2.26), получим:

$$\tilde{\nabla}\tilde{R}^i_{jkl} = 0, \tag{2.27}$$

что и доказывает теорему. □

Замечание. Аналогичное утверждение для ткани B_m приводится в [4]. Можно показать, что система уравнений (2.14), (2.15), (2.25)–(2.27), определяющих левую ткань Бола $B_l \equiv B_l(r,r,r)$, является замкнутой относительно внешнего дифференцирования. Из равенств (2.16) следует, что для заданной ткани B_l построенная симметрическая связность $\tilde{\Gamma}$ является единственной. Эта связность порождается сердцевиной ткани B_l. Вопрос о том, сколько существует неэквивалентных тканей B_l, имеющих заданную симметрическую связность (или сердцевину), остается открытым. Аналогичные рассуждения для тканей B_m см. в [4].

3. Фактор-ткань левой ткани Бола

Пусть ткань $B_l(r,r,r)$ допускает фактор-ткань $\overline{W}(\rho,r,r)$ [15]. Покажем, что последняя является обобщенной левой тканью Бола $B_l(\rho,r,r)$ [17].

Напомним [15], что фактор-ткань $\overline{W}(\rho,r,r)$ произвольной ткани $W(r,r,r)$ порождается ее конгруэнцией коразмерности ρ (W_1^ρ-*конгруэнцией*), которая определяется следующим образом. Пусть $K_2^{2r-\rho}$ — $(r-\rho)$-параметрическое семейство r-мерных слоев слоения λ_2 ткани $W(r,r,r)$, $(1\le\rho\le r)$, и S_2^ρ — ρ-мерное слоение этих $(2r-\rho)$-мерных подмногообразий. Два слоя $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_2'$ из λ_2 называются эквивалентными ($\mathcal{F}_2\varphi_2\mathcal{F}_2'$), если они принадлежат одному и тому же подмногообразию $K_2^{2r-\rho}$. Далее, с помощью фиксированного произвольного слоя $\mathcal{F}_1\in\lambda_1$ ткани $W(r,r,r)$ на слоении λ_3 задается отношение эквивалентности φ_3, так что слои $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{F}_3'$ из λ_3 будут эквивалентными ($\mathcal{F}_3\varphi_3\mathcal{F}_3'$), если эквивалентны слои $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_2'$ из λ_2 ($\mathcal{F}_2\varphi_2\mathcal{F}_2'$), проходящие соответственно через точки $\mathcal{F}_3\cap\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3'\cap\mathcal{F}_1$ (рис. 2).

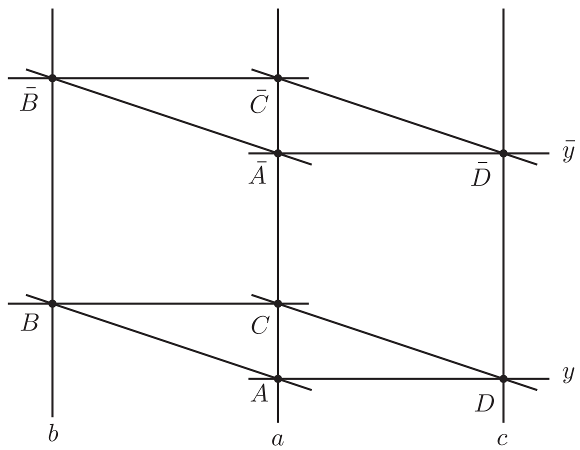

Рис. 2. Конфигурация слоев

Слои $\mathcal{F}_3'$, эквивалентные одному и тому же слою $\mathcal{F}_3$, образуют на $\mathcal{M}$ подмногообразие $K_3^{2r-\rho}$ размерности $2r-\rho$. Пусть S_3^ρ — ρ-мерное слоение этих подмногообразий. Слоениям S_2^ρ и S_3^ρ на базах Y и Z слоений λ_2 и λ_3 три-ткани $W(r,r,r)$ отвечают ρ-мерные слоения с локальными ρ-мерными базами $\overline{Y}$ и $\overline{Z}$ соответственно. Согласно [15] пара (φ_2,φ_3) задает на ткани $W(r,r,r)$ W_1^ρ-конгруэнцию, если φ_3 не зависит от выбора слоя $\mathcal{F}_1$. Такая конгруэнция однозначно определяет на многообразии $\mathcal{M}$ фактор-множества λ_2/φ_2 и λ_3/φ_3, локально диффеоморфные базам $\overline{Y}$ и $\overline{Z}$ соответственно. Положим $X\times\overline{Y}\equiv\overline{\mathcal{M}}$ ($\dim\overline{\mathcal{M}}=r+\rho$), $\bar{f}\equiv f|_{\overline{\mathcal{M}}}$, где f — локальная координатная квазигруппа ткани $W(r,r,r)$, см. (1.4). Группоид

$$\bar{f}: X\times\overline{Y}\to\overline{Z},\quad \bar{z}=\bar{f}(x,\bar{y}), \tag{3.1}$$

определяет на многообразии $\overline{\mathcal{M}}$ три-ткань $\overline{W}(\rho,r,r)$, образованную одним слоением ρ-мерных слоев $x=const$ и двумя слоениями r-мерных слоев: $\bar{y}=const$, $\bar{z}=\bar{f}(x,\bar{y})=const$. Эта ткань называется *фактор-тканью* три-ткани $W(r,r,r)$ [15].

Теорема 2. *Фактор-ткань $\overline{W}(\rho, r, r)$ левой ткани Бола $B_l(r, r, r)$ (если она существует) является обобщенной левой тканью Бола $B_l(\rho, r, r)$ с той же сердцевиной, что и ткань $B_l(r, r, r)$.*

Доказательство. Согласно [1] левая ткань Бола $B_l \equiv B_l(r, r, r)$ характеризуется замыканием всех достаточно малых левых конфигураций Бола, см. рис. 1. В [16] показано, что это свойство равносильно выполнению в каждой локальной координатной квазигруппе (1.4) ткани B_l тождества

$$f(a, f^{-1}(b, f(a, y))) = f(a * b, y), \quad a, b \in X, \quad y \in Y. \tag{3.2}$$

Здесь $c = a * b$ — r-мерная квазигруппа, действие которой на r-мерном многообразии Y задается функцией f. Эта квазигруппа называется параметрической квазигруппой квазигруппы Бола преобразований. С другой стороны, квазигруппа $(*)$ является сердцевиной три-ткани B_l [14].

Допустим, что три-ткань $B_l(r, r, r)$ допускает фактор-ткань $\overline{W}(\rho, r, r)$, определяемую группоидом (3.1) на многообразии $\overline{\mathcal{M}} = X \times \overline{Y}$. Для этого группоида в силу (3.2) получаем тождество:

$$\bar{f}(a, \bar{f}^{-1}(b, \bar{f}(a, \bar{y}))) = \bar{f}(a * b, \bar{y}), \quad a, b \in X, \quad \bar{y} \in \overline{Y}, \tag{3.3}$$

которое совпадает с (1.6). Следовательно, согласно [17], ткань $\overline{W}(\rho, r, r)$ является обобщенной левой тканью Бола $B_l(\rho, r, r)$, порождаемой действием $\bar{f}$ той же параметрической квазигруппы $(*)$ на ρ-мерном подмногообразии $\overline{Y} \subseteq Y$. Из (3.3) следует также, что ткань $B_l(\rho, r, r)$ имеет ту же сердцевину $(*)$, что и ткань $B_l(r, r, r)$. Теорема доказана. □

4. Структурные уравнения левой ткани Бола, допускающей фактор-ткань

Пусть ткань $B_l(r, r, r)$ образована на многообразии $\mathcal{M}$ слоениями (2.3), где базисные формы удовлетворяют структурным уравнениям (2.14) и при этом выполняются равенства (2.15). Согласно [15] произвольная три-ткань $W(r, r, r)$ допускает фактор-ткань $\overline{W}(\rho, r, r)$, если в некотором кобазисе на $\mathcal{M}$ выполняются условия:

$$a^a_{uv} = 0, \quad \omega^a_u = 2a^a_{ub}\underset{2}{\omega}^b, \tag{4.1}$$

где $a, b, c, ... = \overline{1, \rho}$, $u, v, w, ... = \overline{\rho + 1, r}$. При этом слоения фактор-ткани $\overline{W}(\rho, r, r)$ задаются уравнениями:

$$\bar{\lambda}_1 : \underset{1}{\omega}^a = 0, \ \underset{1}{\omega}^u = 0; \quad \bar{\lambda}_2 : \underset{2}{\omega}^a = 0; \quad \bar{\lambda}_3 : \underset{3}{\omega}^a = \underset{1}{\omega}^a + \underset{2}{\omega}^a = 0. \tag{4.2}$$

Формы $\underset{1}{\omega}^a$, $\underset{1}{\omega}^u$ и $\underset{2}{\omega}^a$ образуют кобазис на многообразии $\overline{\mathcal{M}} \equiv X \times \overline{Y}$ размерности $r + \rho$, несущем фактор-ткань $\overline{W}(\rho, r, r)$. Равенства (4.1) в силу (2.13) эквивалентны следующим:

$$a^a_{uv} = 0, \quad \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^a_u = a^a_{ub}\underset{1}{\omega}^b + 2a^a_{ub}\underset{2}{\omega}^b. \tag{4.3}$$

Пусть теперь $W(r, r, r)$ — левая ткань Бола (ткань $B_l(r, r, r)$), допускающая фактор-ткань $\overline{W}(\rho, r, r)$. Тогда структурные уравнения (2.14) в силу (4.3), (2.15) и (2.16) примут вид:

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^a &= \underset{1}{\omega}^b \wedge \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^a_b + \underset{1}{\omega}^u \wedge \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^a_u, \\ d\underset{1}{\omega}^u &= \underset{1}{\omega}^a \wedge \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^u_a + \underset{1}{\omega}^v \wedge \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^u_v, \\ d\underset{2}{\omega}^a &= \underset{2}{\omega}^b \wedge \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^a_b - a^a_{ub}\underset{1}{\omega}^u \wedge \underset{2}{\omega}^b - a^a_{bc}\underset{2}{\omega}^b \wedge (\underset{1}{\omega}^c + \underset{2}{\omega}^c), \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$d\underset{2}{\omega}^u = \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^u_j - a^u_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k, \tag{4.5}$$

$$d\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_j = \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^k_j \wedge \underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_k + \tilde{R}^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l. \tag{4.6}$$

Согласно [15] уравнения (4.4) являются структурными уравнениями фактор-ткани $\overline{W}(\rho, r, r)$, которая по Теореме 2 будет тканью $B_l(\rho, r, r)$. При этом ткань $B_l(r, r, r)$ и ее фактор-ткань $B_l(\rho, r, r)$ имеют одну и ту же сердцевину $(*)$. Последняя порождает на базе X первого слоения каждой из этих тканей локально симметрическую связность $\tilde{\Gamma}$. Для ткани $B_l(r, r, r)$ эта связность в силу Теоремы 1 определяется формами $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_j$, поэтому для фактор-ткани $B_l(\rho, r, r)$ она будет задаваться теми же формами $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_j$, входящими в ее структурные уравнения (4.4), (4.6).

Доказано

Предложение 1. *Левая три-ткань Бола $B_l(r, r, r)$ допускает фактор-ткань $B_l(\rho, r, r)$ в том и только в том случае, если в некотором кобазисе на многообразии $\mathcal{M}$ структурные уравнения ткани $B_l(r, r, r)$ приводятся к виду (4.4)–(4.6). В этом кобазисе слоения фактор-ткани $B_l(\rho, r, r)$ задаются уравнениями (4.2), а ее структурные уравнения имеют вид (4.4), (4.6). Формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{23}{\tilde{\omega}}{}^i_j$ определяют на базе первого слоения ткани $B_l(r, r, r)$ и ее фактор-ткани $B_l(\rho, r, r)$ локально симметрическую связность $\tilde{\Gamma}$, порождаемую общей сердцевиной $(*)$ этих три-тканей.*

5. Нахождение структурных уравнения левой ткани Бола по уравнениям ее фактор-ткани

Допустим, что для заданной обобщенной левой ткани Бола $B_l(\rho, r, r)$ существует ткань $B_l(r, r, r)$, для которой $B_l(\rho, r, r)$ является фактор-тканью. Покажем, как находить структурные уравнения ткани $B_l(r, r, r)$ по уравнениям ткани $B_l(\rho, r, r)$.

Сначала покажем, что структурные уравнения произвольной ткани $W(\rho, r, r)$ могут быть приведены к виду (4.4). Следуя [13], зададим слоения ткани $W(\rho, r, r)$ уравнениями:

$$\tilde{\lambda}_1 : \ \underset{1}{\theta}^a = 0, \ \underset{1}{\theta}^u = 0; \quad \tilde{\lambda}_2 : \ \underset{2}{\theta}^a = 0; \quad \tilde{\lambda}_3 : \ \underset{1}{\theta}^a + \underset{2}{\theta}^a = 0, \tag{5.1}$$

где $a = \overline{1, \rho}$, $u = \overline{\rho + 1, r}$. Формы $\underset{1}{\theta}^a$, $\underset{1}{\theta}^u$ и $\underset{2}{\theta}^a$ образуют кобазис на $(r + \rho)$-мерном многообразии, несущем ткань $W(\rho, r, r)$, и удовлетворяют структурным уравнениям:

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\theta}^a &= \underset{1}{\theta}^b \wedge \Theta^a_b - \mu^a_{bc}\underset{1}{\theta}^b \wedge \underset{1}{\theta}^c + \mu^a_{ub}\underset{1}{\theta}^u \wedge (\underset{1}{\theta}^b + \underset{2}{\theta}^b), \\ d\underset{1}{\theta}^u &= \underset{1}{\theta}^v \wedge \theta^u_v + \underset{1}{\theta}^a \wedge \theta^u_a, \\ d\underset{2}{\theta}^a &= \underset{2}{\theta}^b \wedge \Theta^a_b + \mu^a_{bc}\underset{2}{\theta}^b \wedge \underset{2}{\theta}^c. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь величины $\{\mu^a_{bc},\ \mu^a_{ub}\}$ кососимметричны по нижним индексам и образуют тензор кручения ткани $W(\rho,r,r)$.

В уравнениях (5.2) положим:

$$\underset{1}{\theta}^a=\underset{1}{\omega}^a,\quad \underset{1}{\theta}^u=\underset{1}{\omega}^u,\quad \underset{2}{\theta}^a=\underset{2}{\omega}^a, \tag{5.3}$$

$$\Theta^a_b-\mu^a_{bc}\underset{1}{\theta}^c+\frac{1}{2}\mu^a_{bu}\underset{1}{\theta}^u=\underset{23}{\tilde\omega}{}^a_b,\quad \frac{1}{2}\mu^a_{ub}\underset{1}{\theta}^b+\mu^a_{ub}\underset{2}{\theta}^b=\underset{23}{\tilde\omega}{}^a_u,\quad \theta^u_j=\underset{23}{\tilde\omega}{}^u_j, \tag{5.4}$$

$$\mu^a_{bc}=-a^a_{bc},\quad \mu^a_{ub}=2a^a_{ub}. \tag{5.5}$$

Тогда они запишутся в виде (4.4).

Пусть теперь $W(\rho,r,r)$ — обобщенная левая ткань Бола (ткань $B_l(\rho,r,r)$), заданная структурными уравнениями (4.4). В этих уравнениях, согласно Предложению 1, $\underset{23}{\tilde\omega}{}^i_j$ — формы симметрической связности $\tilde\Gamma$, порождаемой сердцевиной $(*)$ ткани $B_l(\rho,r,r)$, а потому они должны удовлетворять уравнениям (4.6). Допустим, что существует такая левая ткань Бола $B_l(r,r,r)$, для которой $B_l(\rho,r,r)$ является фактор-тканью. Тогда в силу Теоремы 2 ткань $B_l(r,r,r)$ имеет ту же сердцевину $(*)$, что и ткань $B_l(\rho,r,r)$, а ее структурные уравнения, согласно Предложению 1, могут быть приведены в некотором кобазисе на $\mathcal{M}$ к виду (4.4)–(4.6). При этом тензоры кручения a^i_{jk} и кривизны b^i_{jkl} ткани $B_l(r,r,r)$ должны удовлетворять равенствам (2.16).

Таким образом, структурные уравнения (4.4)–(4.6) искомой три-ткани $B_l(r,r,r)$ получаются дополнением структурных уравнений (4.4) и (4.6) заданной ткани $B_l(\rho,r,r)$ уравнениями (4.5), в которых a^u_{jk} — неизвестные величины. Последние входят в равенства (2.16), в которых $\tilde R^i_{jkl}$ и a^b_{jk} — известные величины, а компоненты тензора b^i_{jkl} будут зависеть от выбора величин a^u_{jk}. Отсюда следует, что для заданной ткани $B_l(\rho,r,r)$ соответствующая ткань $B_l(r,r,r)$ определяется, вообще говоря, неоднозначно.

Справедлива

Теорема 3. *Обобщенная левая ткань Бола $B_l(\rho,r,r)$, заданная структурными уравнениями (4.4), (4.6), может быть реализована как фактор-ткань левой ткани Бола $B_l(r,r,r)$, структурные уравнения которой приводятся к виду (4.4)–(4.6), а тензоры кручения a^i_{jk} и кривизны b^i_{jkl} удовлетворяют соотношениям (2.16).*

6. Пример реализации некоторой пятимерной три-ткани $B_l(2,3,3)$ как фактор-ткани шестимерной три-ткани $B_l(3,3,3)$

Проиллюстрируем Теорему 3 на следующем примере. Рассмотрим обобщенную левую ткань Бола $B_l(2,3,3)$, определяемую уравнениями [14]:

$$\begin{cases} z^1=x^1+y^1,\\ z^2=x^2e^{2y^1}+y^2+x^1x^3(1-e^{2y^1})+2y^1x^3. \end{cases} \tag{6.1}$$

Сердцевина этой ткани задается уравнениями:

$$\begin{cases} c^1=2a^1-b^1,\\ c^2=a^2(e^{-2(a^1-b^1)}+e^{2(a^1-b^1)})-b^2,\\ c^3=2a^3-b^3. \end{cases} \tag{6.2}$$

Найдем уравнения ткани $B_l(3,3,3)$ с той же сердцевиной (6.2), для которой ткань (6.1) будет фактор-тканью.

Продифференцируем уравнения (6.1) и положим:

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\omega}^1 = dx^1,\\
&\underset{1}{\omega}^2 = x^3(1-e^{2y^1})dx^1 + e^{2y^1}dx^2 + (x^1+2y^1-x^1e^{2y^1})dx^3,\\
&\underset{1}{\omega}^3 = dx^3,\\
&\underset{2}{\omega}^1 = dy^1,\\
&\underset{2}{\omega}^2 = 2(x^2e^{2y^1} - x^3x^1e^{2y^1} + x^3)dy^1 + dy^2.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Теперь продифференцируем (6.3) внешним образом, получим:

$$\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^1 = 0,\\
&d\underset{1}{\omega}^2 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge (2x^3\underset{2}{\omega}^1) + \underset{1}{\omega}^2 \wedge (-2\underset{2}{\omega}^1) + \underset{1}{\omega}^3 \wedge (2(x^1+2y^1-1)\underset{2}{\omega}^1),\\
&d\underset{1}{\omega}^3 = 0,\\
&d\underset{2}{\omega}^1 = 0,\\
&d\underset{2}{\omega}^2 = \underset{2}{\omega}^1 \wedge (2x^3\underset{1}{\omega}^1 - 2\underset{1}{\omega}^2 + 2(x^1+2y^1-1)\underset{1}{\omega}^3).
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Сравнивая (6.3) с (5.2) и учитывая (5.3), (5.4), находим:

$$\begin{aligned}
&\Theta_1^1 = \Theta_2^1 = 0,\\
&\Theta_1^2 = 2x^3(\underset{1}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1) - 2\underset{1}{\omega}^2 + 2(x^1+2y^1-1)\underset{1}{\omega}^3, \quad \Theta_2^2 = -2\underset{2}{\omega}^1,\\
&\theta_j^3 = \lambda_{jk}\underset{1}{\omega}^k, \quad \lambda_{jk} = \lambda_{kj},\\
&a_{12}^1 = a_{13}^1 = a_{23}^1 = 0,\\
&a_{12}^2 = -a_{21}^2 = 1, \quad a_{13}^2 = -a_{31}^2 = 1 - x^1 - 2y^1, \quad a_{23}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

(здесь и далее $j,k,l... = 1,2,3$). С учетом (6.5) запишем структурные уравнения (6.4) в виде:

$$\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^1 = 0,\\
&d\underset{1}{\omega}^2 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \Theta_1^2 + \underset{1}{\omega}^2 \wedge \Theta_2^2 + 2a_{[21]}^2\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^1 + 2a_{[31]}^2\underset{1}{\omega}^3 \wedge (\underset{1}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1),\\
&d\underset{1}{\omega}^3 = 0,\\
&d\underset{2}{\omega}^1 = 0,\\
&d\underset{2}{\omega}^2 = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \Theta_1^2 + \underset{2}{\omega}^2 \wedge \Theta_2^2 - 2a_{[21]}^2\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^1.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Приведем уравнения (6.6) к виду (4.4). Запишем для рассматриваемой ткани $B_l(2,3,3)$ равенства (5.4) и подставим в них (6.5), получим:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\omega}_j^1 = 0, \quad \tilde{\omega}_1^2 = \Theta_1^2 - a_{[21]}^2\underset{1}{\omega}^2 - a_{[31]}^2\underset{1}{\omega}^3, \quad \tilde{\omega}_2^2 = \Theta_2^2 + a_{[21]}^2\underset{1}{\omega}^1,\\
&\tilde{\omega}_3^2 = a_{[31]}^2\underset{1}{\omega}^1 + 2a_{[31]}^2\underset{2}{\omega}^1, \quad \tilde{\omega}_j^3 = \lambda_{jk}\underset{1}{\omega}^k,
\end{aligned} \tag{6.7}$$

(здесь и далее $\tilde{\omega}_j^i \equiv \underset{23}{\tilde{\omega}}{}_j^i$). Тогда уравнения (6.6) примут вид:

$$\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{1}{\omega}^2 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}_1^2 + \underset{1}{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}_2^2 + \underset{1}{\omega}^3 \wedge \tilde{\omega}_3^2, \quad d\underset{1}{\omega}^3 = 0,\\
&d\underset{2}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^2 = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}_1^2 + \underset{2}{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}_2^2 -\\
&\qquad - a_{[31]}^2\underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^1 - a_{[12]}^2\underset{2}{\omega}^1 \wedge (\underset{1}{\omega}^2 + \underset{2}{\omega}^2) - a_{[21]}^2\underset{2}{\omega}^2 \wedge (\underset{1}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Теперь найдем для ткани $B_l(2,3,3)$ уравнения (4.6). Подставим (6.5) в (6.7) и продифференцируем полученные равенства, пользуясь уравнениями (6.3) и (6.4). В результате получим:

$$
\begin{aligned}
&d\tilde{\omega}^1_j = 0,\\
&d\tilde{\omega}^2_1 = \underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{1}{\omega}^1 - 2x^3 \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1 + 2\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^1 + 2(1 - x^1 - 2y^1)\underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^1,\\
&d\tilde{\omega}^2_2 = 0,\\
&d\tilde{\omega}^2_3 = 0,\\
&d\tilde{\omega}^3_j = d\lambda_{jk} \wedge \underset{1}{\omega}^k +\\
&\qquad +\lambda_{j2}(2x^3\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1 - 2\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^1 - 2(1 - x^1 - 2y^1)\underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^1).
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

С другой стороны, из уравнений (4.6) в силу (6.5) и (6.7) имеем:

$$
\begin{aligned}
&d\tilde{\omega}^1_j = \tilde{R}^1_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l,\\
&d\tilde{\omega}^2_1 = -2x^3\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1 + \underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^1 + 2\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^1 - (x^1 + 2y^1 - 1)\underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{1}{\omega}^1 -\\
&\qquad -2(x^1 + 2y^1 - 1)\underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^1 -\\
&\qquad -2(1 - x^1 - 2y^1)(\lambda_{11}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1 + \lambda_{12}\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^1 + \lambda_{13}\underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^1) +\\
&\qquad +\tilde{R}^2_{1kl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l,\\
&d\tilde{\omega}^2_2 = -2(1 - x^1 - 2y^1)(\lambda_{21}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1 + \lambda_{22}\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^1 + \lambda_{23}\underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^1) +\\
&\qquad +\tilde{R}^2_{2kl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l,\\
&d\tilde{\omega}^2_3 = -(1 - x^1 - 2y^1)\lambda_{33}\underset{1}{\omega}^3 \wedge (\underset{1}{\omega}^1 + 2\underset{2}{\omega}^1) + \tilde{R}^2_{3kl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l,\\
&d\tilde{\omega}^3_j = \tilde{R}^3_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l.
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

Сравнивая (6.9) и (6.10), находим:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{R}^1_{jkl} = \tilde{R}^3_{jkl} = \tilde{R}^2_{123} = \tilde{R}^2_{2kl} = \tilde{R}^2_{3kl} = 0,\\
&\tilde{R}^2_{112} = -\tilde{R}^2_{121} = \frac{1}{2}, \quad \tilde{R}^2_{113} = -\tilde{R}^2_{131} = -\frac{1}{2}(x^1 + 2y^1),\\
&\lambda_{jk} = 0.
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

В силу последних равенств системы (6.11) из (6.7) и (6.9) соответственно получаем:

$$
\tilde{\omega}^3_j = 0, \qquad d\tilde{\omega}^3_j = 0. \tag{6.12}
$$

Таким образом, дифференциальные продолжения структурных уравнений (6.8) рассматриваемой ткани $B_l(2,3,3)$ имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&d\tilde{\omega}^1_j = d\tilde{\omega}^2_2 = d\tilde{\omega}^2_3 = d\tilde{\omega}^3_j = 0,\\
&d\tilde{\omega}^2_1 = \tilde{\omega}^2_1 \wedge \tilde{\omega}^2_2 + 2\tilde{R}^2_{1[12]}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^2 + 2\tilde{R}^2_{1[13]}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^3.
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Теперь найдем структурные уравнения три-ткани $B_l(3,3,3)$, для которой ткань $B_l(2,3,3)$ является фактор-тканью. В соответствии с Теоремой 3 дополним систему (6.8), (6.13) уравнением вида (4.5), которое в силу (6.12) будет таким:

$$
d\underset{2}{\omega}^3 = -a^3_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k. \tag{6.14}
$$

Кроме того, для ткани $B_l(3,3,3)$ должны выполняться равенства (2.16). Из них получаем:

$$b^i_{klj} = 4\tilde{R}^i_{jkl} + 2a^i_{mj}a^m_{kl}.$$

Отсюда в силу (6.5) и (6.11) находим:

$$\begin{array}{l} b^1_{klj} = 0, \\ b^2_{121} = -2ta^3_{12}, \quad b^2_{131} = -2 - 2ta^3_{13}, \quad b^2_{231} = -2ta^3_{23}, \\ b^2_{kl2} = 0, \quad b^2_{kl3} = 0, \\ b^3_{121} = -2(1 + a^3_{13})a^3_{12}, \quad b^3_{122} = -2a^3_{23}a^3_{12}, \quad b^3_{123} = 2a^3_{23}, \\ b^3_{131} = -2ta^3_{12} - 2a^3_{13}a^3_{13}, \quad b^3_{132} = -2a^3_{23}a^3_{13}, \quad b^3_{133} = 2ta^3_{23}, \\ b^3_{231} = -2a^3_{13}a^3_{23}, \quad b^3_{232} = -2a^3_{23}a^3_{23}, \quad b^3_{233} = 0, \end{array} \tag{6.15}$$

где обозначено: $t = 1 - x^1 - 2y^1$. В силу (6.3) имеем: $dt = -(\underset{3}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1)$.

Таким образом, структурные уравнения три-ткани $B_l(3,3,3)$, для которой ткань $B_l(2,3,3)$ является фактор-тканью, имеют вид (6.8), (6.14), (6.13). При этом компоненты тензора кривизны ткани $B_l(3,3,3)$ связаны равенствами (6.15) с компонентами a^3_{12}, a^3_{13}, a^3_{23} тензора кручения, которые определяют, согласно Теореме 3, семейство искомых тканей $B_l(3,3,3)$. Отметим, что эти компоненты не являются произвольными. В силу (2.25), (6.5), (6.7) и (6.15) они должны удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{array}{l} da^3_{12} = \\ \quad = -a^3_{12}(2 + a^3_{13})(\underset{3}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1) - a^3_{23}a^3_{12}(\underset{3}{\omega}^2 + \underset{2}{\omega}^2) + a^3_{23}(\underset{3}{\omega}^3 + \underset{2}{\omega}^3), \\ da^3_{13} = \\ \quad = (-2a^3_{12}t - a^3_{13}a^3_{13})(\underset{3}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1) - a^3_{23}a^3_{13}(\underset{3}{\omega}^2 + \underset{2}{\omega}^2) + \\ \quad + a^3_{23}t(\underset{3}{\omega}^3 + \underset{2}{\omega}^3) + a^3_{23}(2x^3(\underset{1}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1) - \underset{1}{\omega}^2 - t\underset{1}{\omega}^3), \\ da^3_{23} = -a^3_{23}(1 + a^3_{13})(\underset{3}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1) - a^3_{23}a^3_{23}(\underset{3}{\omega}^2 + \underset{2}{\omega}^2). \end{array} \tag{6.16}$$

Укажем некоторые решения системы (6.16) и найдем соответствующие им ткани $B_l(3,3,3)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения (6.16) имеют по крайней мере два различных решения:

$$1)\ a^3_{12} = a^3_{13} = a^3_{23} = 0; \quad 2)\ a^3_{12} = a^3_{23} = 0, \quad a^3_{13} = -\frac{1}{t}.$$

Обозначим $B^1_l(3,3,3) \equiv B^1_l$ и $B^2_l(3,3,3) \equiv B^2_l$ левые ткани Бола, соответствующие этим решениям. С учетом (6.5) получаем компоненты тензора кручения тканей B^1_l и B^2_l соответственно:

$$\begin{array}{l} 1)\ a^1_{12} = a^1_{13} = a^1_{23} = 0, \\ \quad a^2_{12} = -a^2_{21} = 1, \quad a^2_{13} = -a^2_{31} = 1 - x^1 - 2y^1, \quad a^2_{23} = 0, \\ \quad a^3_{12} = a^3_{23} = \underline{a^3_{13} = 0}; \end{array} \tag{6.17}$$

$$\begin{array}{l} 2)\ a^1_{12} = a^1_{13} = a^1_{23} = 0, \\ \quad a^2_{12} = -a^2_{21} = 1, \quad a^2_{13} = -a^2_{31} = 1 - x^1 - 2y^1, \quad a^2_{23} = 0, \\ \quad a^3_{12} = a^3_{23} = 0, \quad \underline{a^3_{13} = -\dfrac{1}{t}}. \end{array} \tag{6.18}$$

Отметим, что ткани B_l^1 и B_l^2 не являются эквивалентными [4]. Найдем уравнения каждой из них.

1) Из (6.15) в силу (6.17) следует, что ткань B_l^1 имеет единственную отличную от нуля компоненту тензора кривизны:

$$b^2_{131} = -2. \tag{6.19}$$

При этом равенства (2.24) удовлетворяются тождественно. Подставим (6.17) в уравнение (6.14), получим: $d\underset{2}{\omega}^3 = 0$. Отсюда находим:

$$\underset{2}{\omega}^3 = dy^3. \tag{6.20}$$

В силу (6.3) и (6.20) уравнения слоений (2.3) рассматриваемой три-ткани B_l^1 примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1: \ dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0, \quad \lambda_2: \ dy^1 = dy^2 = dy^3 = 0,\\
&\lambda_3: \ dx^1 + dy^1 = 0,\\
&\qquad x^3(1 - e^{2y^1})dx^1 + e^{2y^1}dx^2 + (x^1 + 2y^1 - x^1e^{2y^1})dx^3 +\\
&\qquad +2(x^2e^{2y^1} - x^3x^1e^{2y^1} + x^3)dy^1 + dy^2 = 0,\\
&\qquad dx^3 + dy^3 = 0.
\end{aligned}$$

Проинтегрируем эти уравнения, а затем исключим из найденных уравнений локальные координаты точки p, через которую проходит один (и только один) слой каждого из трех слоений ткани. В результате получим уравнения ткани B_l^1 в виде:

$$\begin{cases}
z^1 = x^1 + y^1,\\
z^2 = x^2e^{2y^1} + y^2 + x^1x^3(1 - e^{2y^1}) + 2y^1x^3,\\
z^3 = x^3 + y^3.
\end{cases} \tag{6.21}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эта ткань имеет ту же сердцевину (6.2), что и ткань $B_l(2,3,3)$, заданная уравнениями (6.1). При этом $B_l(2,3,3)$ является фактор-тканью три-ткани B_l^1.

2) Аналогичным образом найдем уравнения три-ткани B_l^2. Из (6.15) следует, что эта ткань также имеет единственную ненулевую компоненту тензора кривизны:

$$b^3_{131} = -\frac{2}{t^2}. \tag{6.22}$$

Подставим (6.18) в уравнение (6.14), получим:

$$d\underset{2}{\omega}^3 = \underset{2}{\omega}^3 \wedge d\ln t + \frac{1}{t}dy^1 \wedge dx^3. \tag{6.23}$$

Отсюда находим:

$$\underset{2}{\omega}^3 = -\frac{1}{t}x^3dy^1 + \frac{1}{t}dy^3. \tag{6.24}$$

Теперь запишем уравнения слоений ткани B_l^2:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1: \ dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0; \quad \lambda_2: \ dy^1 = dy^2 = dy^3 = 0;\\
&\lambda_3: \ dx^1 + dy^1 = 0,\\
&\qquad x^3(1 - e^{2y^1})dx^1 + e^{2y^1}dx^2 + (x^1 + 2y^1 - x^1e^{2y^1})dx^3 +\\
&\qquad +2(x^2e^{2y^1} - x^3x^1e^{2y^1} + x^3)dy^1 + dy^2 = 0,\\
&\qquad (1 - x^1 - 2y^1)dx^3 - x^3dy^1 + dy^3 = 0.
\end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения и исключая локальные координаты точки p, получим уравнения ткани B_l^2 в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} z^1 = x^1 + y^1, \\ z^2 = x^2 e^{2y^1} + y^2 + x^1 x^3 (1 - e^{2y^1}) + 2y^1 x^3, \\ z^3 = x^3 + y^3 - (x^1 + 2y^1) x^3. \end{array} \right. \tag{6.25}$$

Непосредственные вычисления показывают, что эта ткань имеет ту же сердцевину (6.2), что и ткань B_l^1.

Таким образом, для ткани $B_l(2,3,3)$, заданной уравнениями (6.1), существуют по крайней мере две неэквивалентные левые ткани Бола, определяемые уравнениями (6.21) и (6.25), для каждой из которых $B_l(2,3,3)$ является фактор-тканью. При этом ткани $B_l(2,3,3)$, $B_l^1(3,3,3)$ и $B_l^2(3,3,3)$ имеют одну и ту же сердцевину (6.2).

Заключение

В работе найдены структурные уравнения локально симметрической связности, индуцируемой сердцевиной левой три-ткани Бола $B_l(r,r,r)$ на базе ее первого слоения (Теорема 1). Доказано (Теорема 2), что если ткань $B_l(r,r,r)$ допускает фактор-ткань, то последняя является обобщенной левой тканью Бола $B_l(\rho,r,r)$ с той же сердцевиной, что и ткань $B_l(r,r,r)$. Найдены структурные уравнения ткани $B_l(r,r,r)$, допускающей фактор-ткань $B_l(\rho,r,r)$, и показано (Теорема 3), как находить структурные уравнения три-ткани $B_l(r,r,r)$, для которой заданная ткань $B_l(\rho,r,r)$ является фактор-тканью. Указанный алгоритм применен для некоторой пятимерной ткани $B_l(2,3,3)$. Для нее найдены две неэквивалентные шестимерные три-ткани Бола, для каждой из которых заданная ткань $B_l(2,3,3)$ является фактор-тканью. Этот пример иллюстрирует также тот факт, что для заданной ткани $B_l(\rho,r,r)$ соответствующая ткань $B_l(r,r,r)$ определяется, вообще говоря, неоднозначно.

Список литературы

[1] Акивис М.А. О три-тканях многомерных поверхностей. Тр. геом. сем. ВИНИТИ АН СССР, 1969, том 2, стр. 7 – 31.

[2] Акивис М.А. Локальные дифференцируемые квазигруппы и три-ткани многомерных поверхностей. Исслед. по теории квазигрупп и луп, Кишинев: Штиинца, 1973, стр. 3 – 12.

[3] Акивис М.А., Гольдберг В.В. О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей. Докл. АН СССР, 1972, том 203, №2, стр. 263 – 266.

[4] Акивис М.А., Шелехов А.М. Многомерные три-ткани и их приложения: монография. Тверь: ТвГУ, 2010, 308 стр.

[5] Batalin I.A. Quasigroup construction and first class constraints. J. Math. Phys, 22 (9), Sept. 1981, pp. 1837 – 1849.

[6] Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967, 223 стр.

[7] Лыхмус Я., Паал Э., Соргсепп Л. Неассоциативность в математике и физике. Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике. Труды института физики, Тарту, 1990, том 66, стр. 8 – 22.

[8] Нестеров А.И. Квазигрупповые идеи в физике. Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике. Труды института физики, Тарту, 1990, том 66, стр. 107 – 120.

[9] Нестеров А.И., Степаненко В.А. О методах неассоциативной алгебры в геометрии и физике. Препринт 400-Ф, Красноярск, 1986, 48 стр.

[10] Михеев П.О. О лупах преобразований. Деп. в ВИНИТИ 1985, №4531 – 85.

[11] Miheev P.O. Quasigroups of transformations. Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике. Труды института физики, Тарту, 1990, том 66, стр. 54 – 66.

[12] Сабинин Л.В. Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии. Добавление к книге Ш. Кобаяси и К. Номидзу "Основы дифференциальной геометрии". М.: Наука, 1981, стр. 293 – 339.

[13] Толстихина Г.А. Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения, том 32(2005), стр. 29 – 116.

[14] Толстихина Г. А. О локально симметрической структуре, связанной с обобщенной левой три-тканью Бола $B_l(p,q,q)$. Геометрія, топологія та їх застосування. Зб. праць Ін-ту математики НАН Украіни, 2009, том 6, №2, стр. 247 – 255.

[15] Толстихина Г.А. О фактор-ткани $\overline{W}(\rho,r,r)$ три-ткани $W(r,r,r)$. Фундаментальная и прикладная математика. МГУ им. М.В. Ломоносова, 2010, том 6, выпуск 2, стр. 115 – 128.

[16] Толстихина Г.А., Шелехов А.М. О квазигруппах Бола преобразований. Докл. РАН, 2005, том 401, №2, стр. 166 – 168.

[17] Толстихина Г.А., Шелехов А.М. О три-ткани Бола, образованной слоениями разных размерностей. Изв. Вузов. Мат., 2005, №5(516), стр. 56–62.

[18] Chern S.S. Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten in R_{2r}. Abh. Math. Sem. Univ., Hamburg, 1936, v. 11, №1 – 2, pp. 336 – 358.