

УДК 519.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В СЛУЧАЕ АЛЬФА РАВНОМ ЕДИНИЦЕ

Багрова И.А.

Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 08.09.2011, после переработки 28.12.2011.

В статье разработан датчик, генерирующий устойчивые случайные числа при $\alpha = 1$ и различных σ , β . В основу моделирования положена обобщенная ЦПТ.

Generator for stable random variables with $\alpha = 1$ and various values of σ , β is developed in this article. Modelling is based on GCLT.

Ключевые слова: моделирование случайной величины, устойчивые распределения, распределение Парето.

Keywords: modelling random variable, stable distributions, Pareto distribution.

Введение

В работах [1], [2], [6] было рассмотрено моделирование устойчивых случайных чисел при $\alpha \in (0, 1)$. Настоящая статья посвящена особому случаю устойчивых распределений с характеристическим показателем устойчивости $\alpha = 1$. Для моделирования в этой ситуации также была использована обобщенная предельная теорема, согласно которой устойчивые распределения являются предельными распределениями для нормированной и центрированной (при $\alpha > 1$) суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, входящих в область притяжения устойчивых законов:

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - a_n}{b \cdot n^{1/\alpha}} \xrightarrow{d} Y \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Таким образом, необходимо подобрать такие значения параметров a_n и b , чтобы характеристическая функция суммы независимых одинаково распределенных случайных величин сходилась к характеристической функции устойчивого распределения в форме (А) при $\alpha = 1$ (см. [4], [5], [7], [9]):

$$f_Y(t) = \exp \left\{ -\sigma |t| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \cdot \ln |t| \operatorname{sign}(t) \right) \right\}. \quad (2)$$

Ранее [1], [2] для моделирования устойчивых случайных величин в качестве $X_j, j = \overline{1, n}$ использовались случайные числа с распределением Парето, носителем которого являлось множество $[r; \infty)$ в одностороннем случае и множество

$(-\infty; -l] \cup [r; \infty)$ в двухстороннем случае. В представленной статье, кроме того, рассмотрена вторая ситуация, когда с целью изучения влияния на сходимость к Y случайная величина X_j в районе нуля имеет равномерное распределение.

1. Моделирование односторонних устойчивых величин с помощью распределения Парето

Рассмотрим моделирование одностороннего устойчивого распределения при $\alpha = 1$ и $\beta = 1$, где в качестве X_j возьмем случайные величины, распределенные по Парето.

Функция распределения Парето при $\alpha = 1$ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon}{x}, & x \geq \varepsilon, \\ 0, & x < \varepsilon, \end{cases}$$

ей соответствует функция плотности:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{x^2}, & x \geq \varepsilon, \\ 0, & x < \varepsilon. \end{cases}$$

В [3] было получено следующее асимптотическое соотношение для характеристической функции распределения Парето при $\alpha = 1$ и $|t| \rightarrow 0$:

$$f_{X_j}(t) = \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{itx} \frac{\varepsilon}{x^2} dx = 1 + it\varepsilon - \frac{\pi}{2}|t|\varepsilon - it\varepsilon\gamma - it\varepsilon \ln(|t|\varepsilon) + O(|t|^2), \quad (3)$$

где γ – постоянная Эйлера.

При $n \rightarrow \infty$ предельное выражение для характеристической функции суммы (1) паретовских случайных величин можно представить как

$$f_{S_n}(t) = \exp\left\{\frac{it\varepsilon}{b} - \frac{\pi}{2} \frac{|t|\varepsilon}{b} - \frac{it\varepsilon\gamma}{b} - \frac{it\varepsilon}{b} \ln\left(\frac{|t|\varepsilon}{bn}\right)\right\} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4)$$

Сравнение (4) и (2) показывает, что необходимо центрирование суммы S_n . Поэтому был введен сдвиг $a_n = a \cdot n$, в результате чего характеристическая функция суммы паретовских случайных величин имеет вид:

$$\begin{aligned} f_{S_n}(t) &= \exp\left\{\frac{it\varepsilon}{b} - \frac{\pi}{2} \frac{|t|\varepsilon}{b} - \frac{it\varepsilon\gamma}{b} - \frac{it\varepsilon}{b} \ln(|t|\varepsilon) + \frac{it\varepsilon}{b} \ln(bn) - \frac{ita}{b}\right\} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \exp\left\{\frac{it\varepsilon}{b}(1 - \gamma) + \frac{it\varepsilon}{b} \ln(bn) - \frac{ita}{b} - \frac{\pi}{2} \frac{|t|\varepsilon}{b} - \frac{it\varepsilon}{b} \ln|t| - \frac{it\varepsilon}{b} \ln(\varepsilon)\right\} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \exp\left\{\frac{it}{b}\left(\varepsilon(1 - \gamma) + \varepsilon \ln(bn) - \varepsilon \ln(\varepsilon) - a\right) - \frac{\pi}{2} \frac{|t|\varepsilon}{b}\left(1 + i\frac{2}{\pi} \ln|t|\operatorname{sign}(t)\right)\right\} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, если положить

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sigma, \\ a &= \varepsilon(1 - \gamma + \ln(bn)) - \varepsilon \ln(\varepsilon), \\ b &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

то при $n \rightarrow \infty$ получим характеристическую функцию устойчивого закона (2).

Для моделирования устойчивых случайных чисел в этом случае будем задавать параметры: $\beta = 1, \sigma > 0$. Продемонстрируем работу датчика для $\sigma = \{1, 2, 0.5, 4\}$ на рисунке 1, где K – количество сгенерированных устойчивых чисел. Для сравнения также построена теоретическая функция плотности, полученная с помощью программы Stable.exe, разработанной J.P. Nolan’ом (см. [8]).

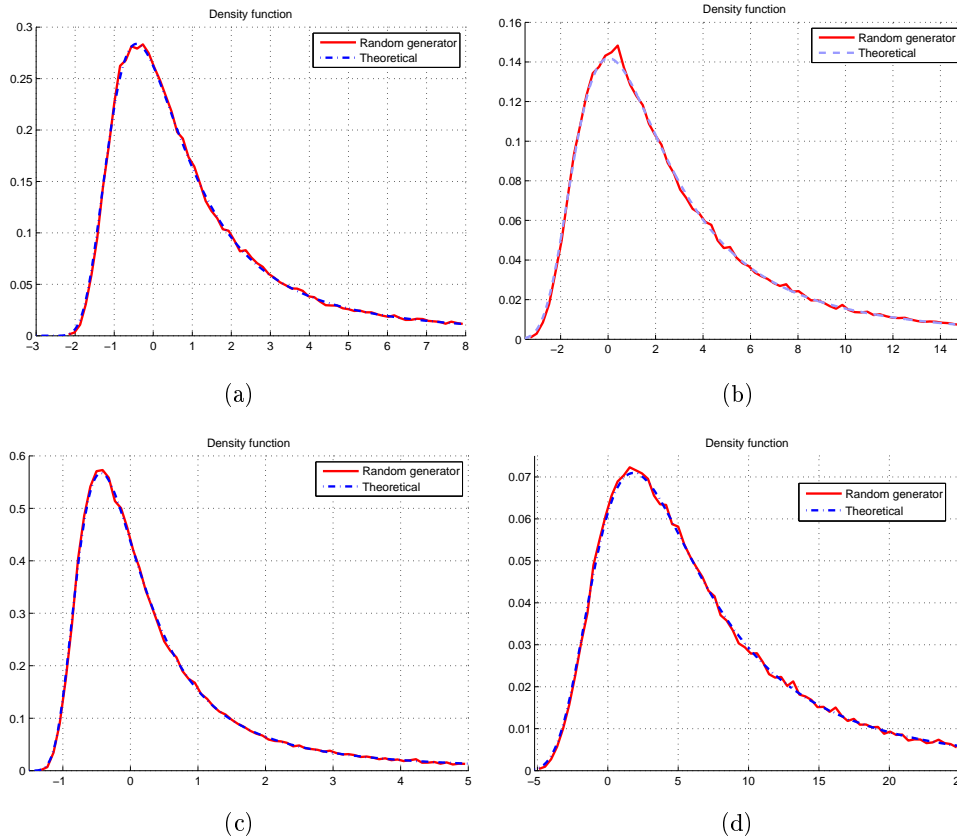


Рис. 1: График функций плотности сгенерированных чисел и устойчивой случайной величины в форме (A) при $n = 10^3, K = 10^5$, a) $\sigma = 1$, b) $\sigma = 2$, c) $\sigma = 0.5$, d) $\sigma = 4$

2. Моделирование двухсторонних устойчивых величин с помощью смеси распределений Парето

Для моделирования двухстороннего устойчивого распределения при $\alpha = 1$ будем использовать смесь распределений Парето с носителями на положительной и отрицательной полуосях:

$$X_j = p \cdot X_j^+ + q \cdot X_j^-, \quad p + q = 1.$$

При этом X_j^+ и X_j^- имеют следующие функции распределения при $r, l > 0$:

$$F_{X_j^+}(x) = 1 - \frac{r}{x}, \quad x \geq r,$$

$$F_{X_j^-}(x) = -\frac{l}{|x|}, \quad x \leq -l.$$

Характеристическая функция распределения для X_j^+ имеет вид (3), а X_j^- имеет комплексно-сопряженную ей характеристическую функцию. Тогда характеристическая функция нормированной и центрированной суммы $S_n = \left(\sum_{j=1}^n (X_j - a)/(b \cdot n) \right)$ будет выглядеть следующим образом:

$$f_{S_n}(t) = \exp \left\{ p \cdot \left(\frac{itr}{b} - \frac{\pi}{2} \frac{|t|r}{b} - \frac{itr\gamma}{b} - \frac{itr}{b} \ln \left(\frac{|t|r}{bn} \right) \right) + \right. \\ \left. + q \cdot \left(\frac{-itl}{b} - \frac{\pi}{2} \frac{|t|l}{b} - \frac{-itl\gamma}{b} - \frac{-itl}{b} \ln \left(\frac{|t|l}{bn} \right) \right) - \frac{ita}{b} \right\} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (6)$$

Если сгруппировать слагаемые в (6), то получим:

$$f_{S_n}(t) = \exp \left\{ \frac{it}{b} ((pr - ql)(1 - \gamma + \ln(bn)) - pr \ln(r) + ql \ln(l) - a) - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} \frac{|t|}{b} (pr + ql) \left(1 + i \left(\frac{pr-ql}{pr+ql} \right) \frac{2}{\pi} \ln |t| \text{sign}(t) \right) \right\} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (7)$$

Для того, чтобы характеристическая функция суммы S_n имела в пределе вид характеристической функции устойчивого распределения, необходимо определить параметры a и b следующими выражениями:

$$a = (pr - ql)(1 - \gamma + \ln(bn)) - pr \ln(r) + ql \ln(l), \quad (8) \\ b = \frac{\pi}{2}.$$

Из (7) и (8) получаем соотношения между параметрами слагаемых двух семейств распределений Парето и параметрами предельного устойчивого распределения при $\alpha = 1$ в форме (A):

$$\begin{cases} p + q = 1, \\ pr + ql = \sigma, \\ \frac{pr-ql}{pr+ql} = \beta. \end{cases} \quad (9)$$

Для моделирования устойчивых случайных величин в этом случае будем задавать следующие параметры: $\beta \in (-1; 1)$, $\sigma > 0$, $p < 1$. Работа датчика при $\sigma = 1$ и $\beta = \{0.5; -0.5\}$ представлена на рис. 2, для $\beta = 0.2$ и $\sigma = \{0.5; 2\}$ на рис. 3.

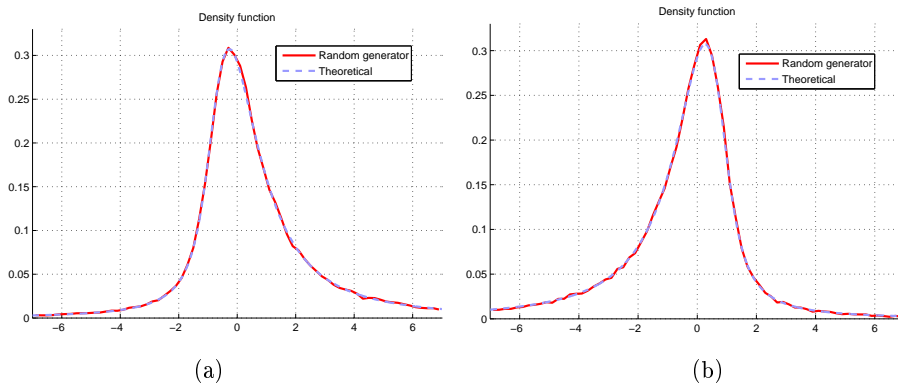


Рис. 2: График функций плотности сгенерированных чисел и устойчивой случайной величины в форме (A) при $n = 10^3$, $K = 10^5$, $\sigma = 1$, а) $\beta = 0.5$, б) $\beta = -0.5$

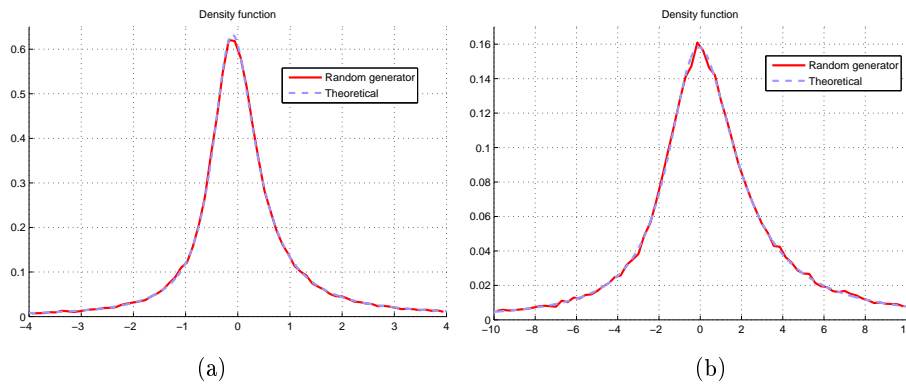


Рис. 3: График функций плотности сгенерированных чисел и устойчивой случайной величины в форме (A) при $n = 10^3, K = 10^5, \beta = 0.2$, а) $\sigma = 0.5$, б) $\sigma = 2$

При $\beta = 0$ имеем дело с распределением Коши, для которого существует явное выражение плотности функции распределения [5]:

$$g(x, 1, 0, \mu, \sigma) = \frac{\sigma}{\pi(\sigma^2 + (x - \mu)^2)}. \tag{10}$$

Ограничимся случаем, когда параметр положения $\mu = 0$. Работа датчика для $\sigma = \{1; 0.8; 0.5; 2\}$ продемонстрирована на рис. 4:

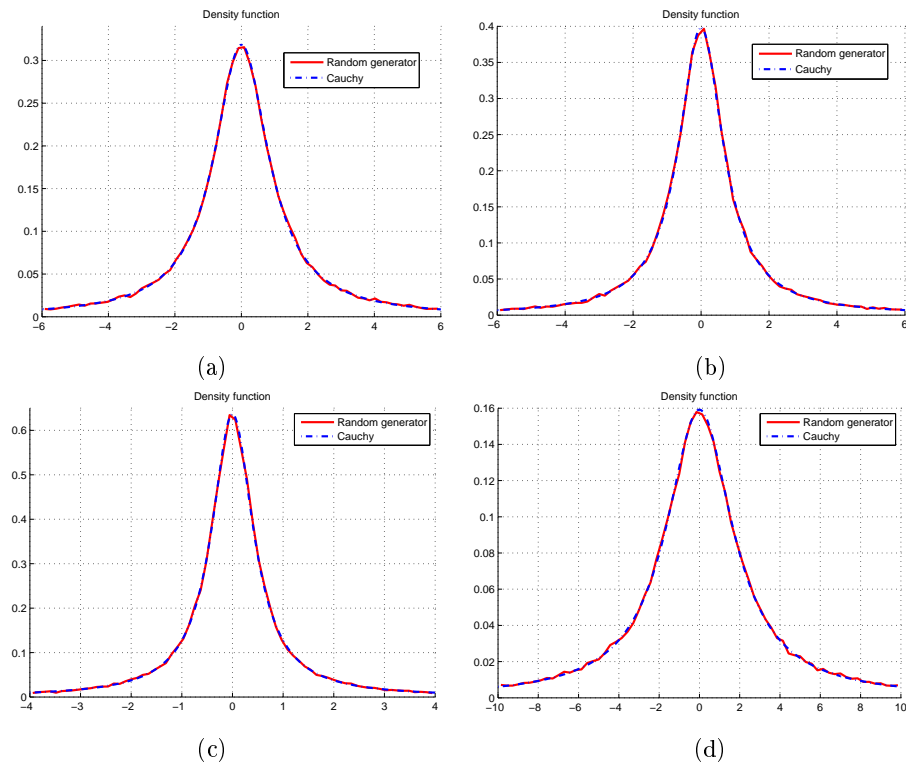


Рис. 4: График функций плотности сгенерированных чисел и распределения Коши при $n = 10^3, K = 10^5$, а) $\sigma = 1$, б) $\sigma = 0.8$, в) $\sigma = 0.5$, д) $\sigma = 2$

3. Моделирование односторонних устойчивых величин при помощи смеси распределений Парето и равномерного

С целью проверки влияния распределения в районе нуля на интервале $(0; r)$, где отсутствует носитель распределения Парето, для моделирования одностороннего устойчивого распределения при $\alpha = 1$ была использована смесь распределений Парето и равномерного на положительной полуоси

$$X_j = p_1 \cdot g_1(x) + p_2 \cdot g_2(x),$$

где $p_1 + p_2 = 1$, $g_1(x)$ – плотность распределения равномерного закона на интервале $(0; r)$, $g_2(x)$ – плотность распределения Парето на луче $[r; \infty)$, $r > 0$.

Функция плотности распределения случайной величины X_j :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{p_1}{r}, & \text{если } 0 < x < r, \\ p_2 \frac{r}{x^2}, & \text{если } x \geq r. \end{cases}$$

Преобразуем характеристическую функцию величины X_j :

$$\begin{aligned} f_{X_j}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x) dx = p_1 \int_0^r e^{itx} g_1(x) dx + p_2 \int_r^{\infty} e^{itx} g_2(x) dx = \\ &= p_1 \int_0^r e^{itx} \frac{1}{r} dx + p_2 \int_r^{\infty} e^{itx} \frac{r}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Характеристическая функция равномерно распределенной составляющей равна $(e^{itr} - 1)/itr$, характеристическая функция Парето распределенной составляющей имеет вид (3).

Тогда характеристическая функция нормированной суммы $S_n = \left(\sum_{j=1}^n X_j / (b \cdot n) \right)$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} f_{S_n}(t) &= \left[p_1 \cdot \left(\frac{e^{itr} - 1}{itr/(bn)} \right) + p_2 \cdot \left(e^{\frac{it\varepsilon}{bn}} - \frac{\pi}{2} \frac{|t|\varepsilon}{bn} - \frac{it\varepsilon}{bn} \gamma - \frac{it\varepsilon}{bn} \ln\left(\frac{|t|\varepsilon}{bn}\right) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^n = \\ &= \left[p_1 \cdot \left(\frac{1 + \frac{itr}{bn} + \left(\frac{itr}{bn}\right)^2 \frac{1}{2!} - 1}{itr/(bn)} \right) + p_2 \cdot \left(1 + \frac{it\varepsilon}{bn} - \frac{\pi}{2} \frac{|t|\varepsilon}{bn} - \frac{it\varepsilon}{bn} \gamma - \frac{it\varepsilon}{bn} \ln\left(\frac{|t|\varepsilon}{bn}\right) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^n = \\ &= \left[p_1 \cdot \left(1 + \frac{itr}{bn} \frac{1}{2} \right) + p_2 \cdot \left(1 + \frac{it\varepsilon}{bn} - \frac{\pi}{2} \frac{|t|\varepsilon}{bn} - \frac{it\varepsilon}{bn} \gamma - \frac{it\varepsilon}{bn} \ln\left(\frac{|t|\varepsilon}{bn}\right) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^n = \\ &= \left[p_1 + p_1 \frac{itr}{2bn} + p_2 + p_2 \cdot \left(\frac{it\varepsilon}{bn} - \frac{\pi}{2} \frac{|t|\varepsilon}{bn} - \frac{it\varepsilon}{bn} \gamma - \frac{it\varepsilon}{bn} \ln\left(\frac{|t|\varepsilon}{bn}\right) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^n = \\ &= \left[1 + p_1 \frac{itr}{2bn} + p_2 \cdot \left(\frac{it\varepsilon}{bn} - \frac{\pi}{2} \frac{|t|\varepsilon}{bn} - \frac{it\varepsilon}{bn} \gamma - \frac{it\varepsilon}{bn} \ln\left(\frac{|t|\varepsilon}{bn}\right) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^n. \end{aligned} \tag{11}$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем представление характеристической функции нормированной суммы S_n в виде экспоненты, из которого видна необходимость введения

сдвига $a_n = a \cdot n$. После осуществления соответствующих изменений характеристическая функция нормированной и центрированной суммы приобретет вид:

$$\begin{aligned} f_{S_n}(t) &= \exp \left\{ p_1 \frac{itr}{2b} + p_2 \cdot \left(\frac{it\varepsilon}{b} - \frac{\pi}{2} \frac{|t|\varepsilon}{b} - i \frac{t\varepsilon}{b} \gamma - i \frac{t\varepsilon}{b} \ln \left(\frac{|t|\varepsilon}{bn} \right) + O \left(\frac{|t|\varepsilon^2}{bn} \right) - \frac{ita}{b} \right\} + O \left(\frac{1}{n} \right) = \\ &= \exp \left\{ \frac{it}{b} \left(p_2 r (1 - \gamma + \ln(bn)) - p_2 r \ln(r) + p_1 \frac{r}{2} - a \right) - \right. \\ &\quad \left. - p_2 \frac{\pi}{2} \frac{|t|r}{b} \left(1 + i \frac{2}{\pi} \ln |t| \cdot \text{sign}(t) \right) \right\} + O \left(\frac{1}{n} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Если положить

$$\begin{aligned} r &= \sigma/p_2, \\ a &= p_2 r (1 - \gamma + \ln(bn)) - p_2 r \ln(r) + p_1 \frac{r}{2}, \\ b &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (13)$$

то получим при $n \rightarrow \infty$ характеристическую функцию устойчивого закона (2).

Для моделирования устойчивых случайных чисел в этом случае будем задавать параметры $\sigma > 0$ и $p_2 < 1$. Работа датчика продемонстрирована на рисунках 5 и 6, из которых видно, что можно подобрать такие значения a и b , что при произвольно заданных значениях параметров σ, p_2 можно получить случайные величины, имеющие требуемое одностороннее устойчивое распределение. На рисунках представлены графики для различных сочетаний параметров p_1 и p_2 смеси распределений равномерного и Парето:

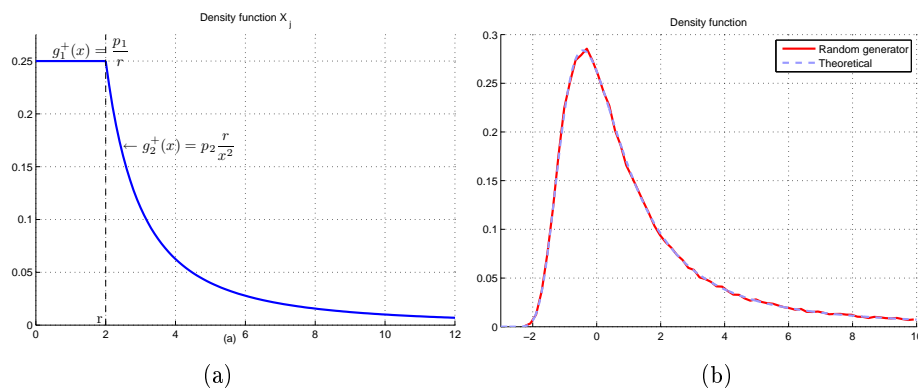


Рис. 5: а) вид плотности распределения X_j , б) график функций плотности сгенерированных чисел и устойчивого распределения при $n = 10^4$, $K = 10^5$, $\beta = 1$, $\sigma = 1$, $p_2 = 0.5$, $r = 2$

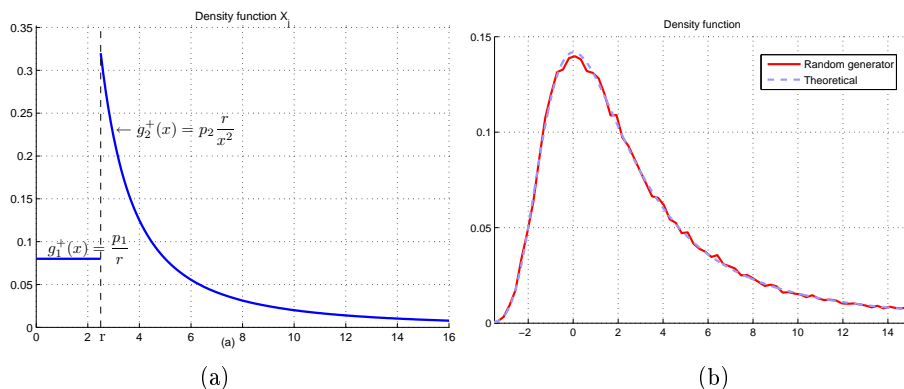


Рис. 6: а) вид плотности распределения X_j , б) график функций плотности сгенерированных чисел и устойчивого распределения при $n = 10^4$, $K = 10^5$, $\beta = 1$, $\sigma = 2$, $p_2 = 0.8$, $r = 2.5$

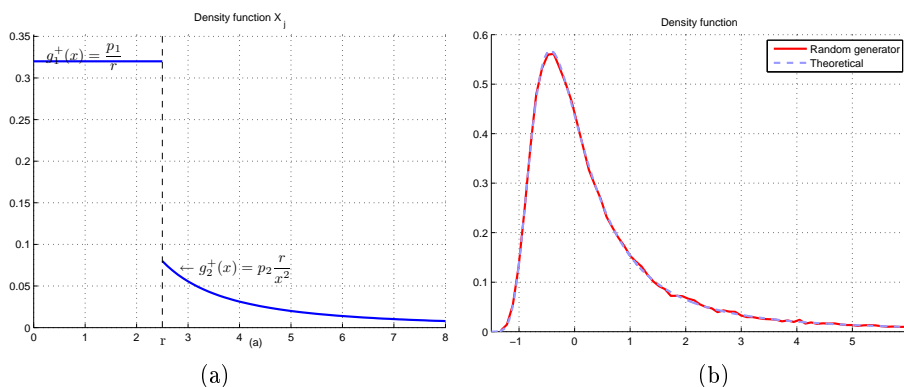


Рис. 7: а) вид плотности распределения X_j , б) график функций плотности сгенерированных чисел и устойчивого распределения при $n = 10^4$, $K = 10^5$, $\beta = 1$, $\sigma = 0.5$, $p_2 = 0.2$, $r = 2.5$

4. Моделирование двухсторонних устойчивых величин при помощи смеси распределений Парето и равномерного

Для моделирования двухстороннего устойчивого распределения при $\alpha = 1$ можно также использовать смеси распределений Парето и равномерного на положительной и отрицательной полуосях:

$$X_j = q_1 \cdot X_{j1}^-(x) + q_2 \cdot X_{j2}^- + p_1 \cdot X_{j1}^+ + p_2 \cdot X_{j2}^+,$$

где $p_1 + p_2 = p$, $q_1 + q_2 = q$, $p + q = 1$, $g_1^-(x)$, $g_1^+(x)$ – плотности распределения равномерного закона соответственно на интервалах $(-l; 0)$ и $(0; r)$, $g_2^-(x)$, $g_2^+(x)$ – плотности распределения Парето соответственно на лучах $(-\infty; -l]$ и $[r; \infty)$, $r, l > 0$.

Функция плотности распределения случайной величины X_j имеет вид:

$$g(x) = \begin{cases} q_2 \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \leq -l, \\ \frac{q_1}{l}, & \text{если } -l \geq x > 0, \\ \frac{p_1}{r}, & \text{если } 0 < x < r, \\ p_2 \frac{r}{x^2}, & \text{если } x \geq r. \end{cases}$$

Характеристическая функция будет представлена следующим образом:

$$f_{X_j}(t) = q_2 \int_{-\infty}^{-l} e^{itx} g_2^-(x) dx + q_1 \int_{-l}^0 e^{itx} g_1^-(x) dx + p_1 \int_0^r e^{itx} g_1^+(x) dx + p_2 \int_r^{\infty} e^{itx} g_2^+(x) dx.$$

Тогда характеристическая функция нормированной и центрированной суммы $S_n = \left(\sum_{j=1}^n (X_j - a) / (b \cdot n) \right)$ будет иметь вид при $n \rightarrow \infty$:

$$f_{S_n}(t) = \exp \left\{ \frac{it}{b} \left((p_2 r - q_2 l) (1 - \gamma + \ln(bn)) - p_2 r \ln(r) + q_2 l \ln(l) + p_1 \frac{r}{2} - q_1 \frac{l}{2} - a \right) - \frac{\pi}{2} \frac{|t|}{b} (p_2 r + q_2 l) \left(1 + i \left(\frac{p_2 r - q_2 l}{p_2 r + q_2 l} \right) \frac{2}{\pi} \ln |t| \cdot \text{sign}(t) \right) \right\} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (14)$$

Видно, что в этом случае, чтобы получить при $n \rightarrow \infty$ устойчивую случайную величину, необходимо положить:

$$a = (p_2 r - q_2 l) (1 - \gamma + \ln(bn)) - p_2 r \ln(r) + q_2 l \ln(l) + p_1 \frac{r}{2} - q_1 \frac{l}{2}, \\ b = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда параметры смеси распределений Парето и равномерного и параметры устойчивого распределения связаны соотношениями:

$$\begin{cases} p + q = 1, \\ p_1 + p_2 = p, \\ q_1 + q_2 = q, \\ p_2 r + q_2 l = \sigma, \quad r, l > 0 \\ \frac{p_2 r - q_2 l}{p_2 r + q_2 l} = \beta. \end{cases}$$

Откуда получаем, что $r = \frac{\sigma(1+\beta)}{2p_2}$, $l = \frac{\sigma(1-\beta)}{2q_2}$, $p_1 = p - p_2$, $q_1 = q - q_2$, $q = 1 - p$.

Для моделирования устойчивого распределения с требуемыми параметрами β, σ с помощью смеси распределений Парето и равномерного будем задавать следующие параметры: $\beta \in (-1; 1)$, $\sigma > 0$, $p \in (0; 1)$, $q_2 \leq 1 - p$.

Работа датчика при различных сочетаниях входных параметров продемонстрирована на рисунках:

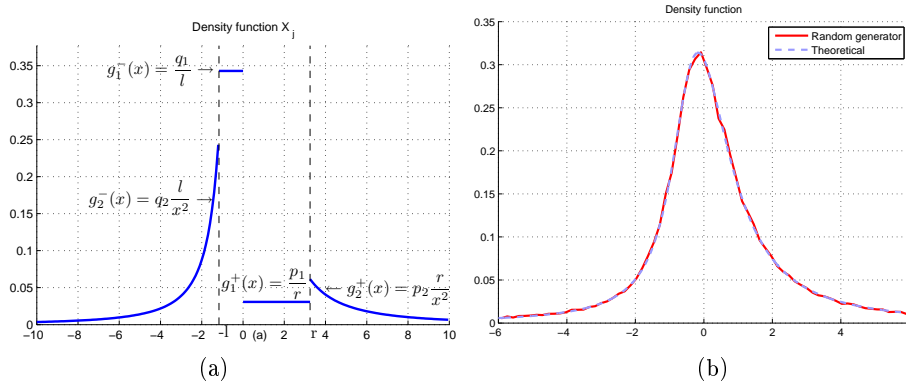


Рис. 8: а) вид плотности распределения X_j , б) график функций плотности сгенерированных чисел и устойчивого распределения при $n = 10^4$, $K = 10^5$, $\beta = 0.3$, $\sigma = 1$, $p = 0.3$, $p_2 = 0.2$, $q_2 = 0.3$

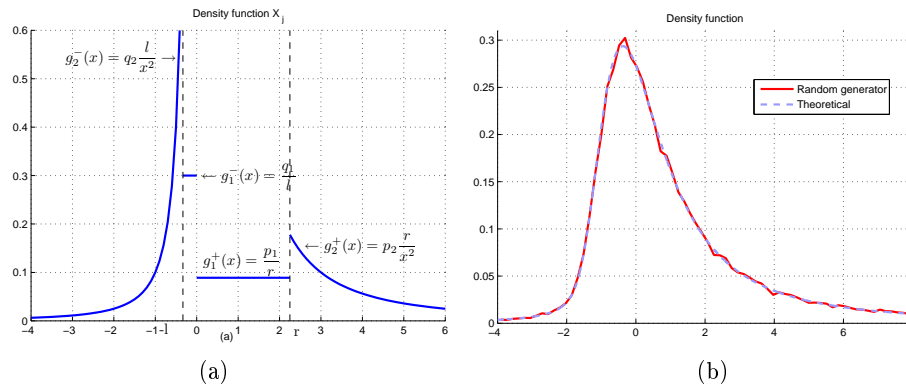


Рис. 9: а) вид плотности распределения X_j , б) график функций плотности сгенерированных чисел и устойчивого распределения при $n = 10^4$, $K = 10^5$, $\beta = 0.8$, $\sigma = 1$, $p = 0.6$, $p_2 = 0.4$, $q_2 = 0.3$

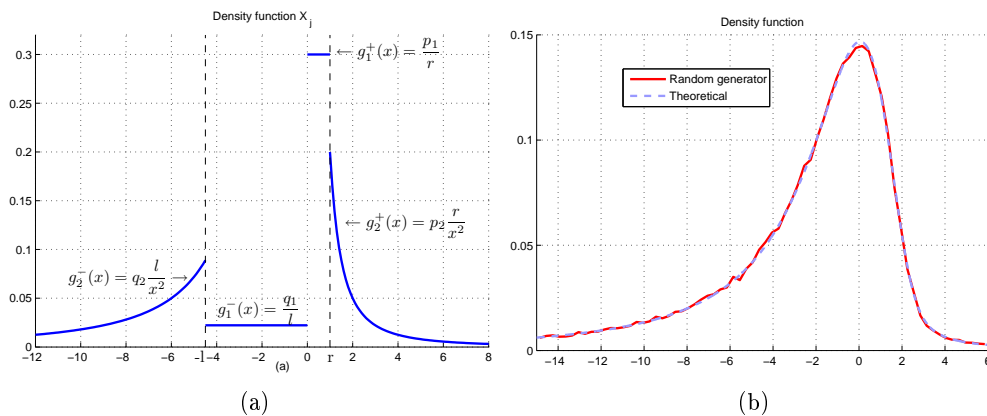


Рис. 10: а) вид плотности распределения X_j , б) график функций плотности сгенерированных чисел и устойчивого распределения при $n = 10^4$, $K = 10^5$, $\beta = -0.8$, $\sigma = 2$, $p = 0.5$, $p_2 = 0.2$, $q_2 = 0.4$

Отдельно рассмотрим случай, соответствующий распределению Коши, когда $\alpha = 1, \beta = 0$, при этом параметр положения $\mu = 0$. В этом случае $\beta = 0, \frac{p_2 r - q_2 l}{p_2 r + q_2 l} = 0, p_2 r = q_2 l, r = \sigma/2p_2, l = \sigma/2q_2, p_1 = p - p_2, q_1 = q - q_2$.

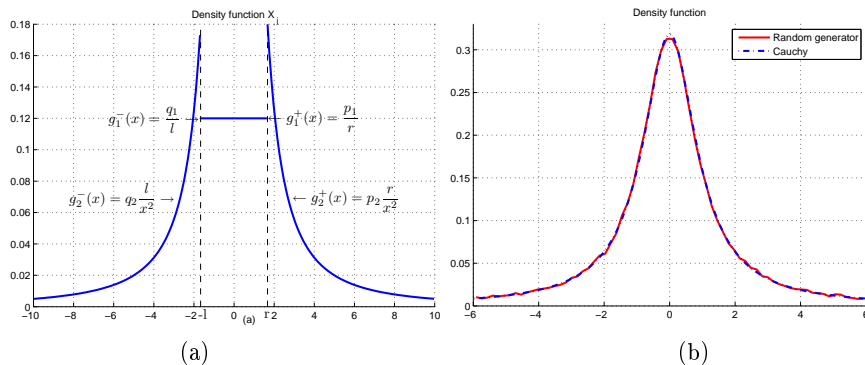


Рис. 11: а) вид плотности распределения X_j , б) график функций плотности сгенерированных чисел и распределения Коши при $n = 10^4, K = 10^5, \beta = 0, \sigma = 1, p = 0.5, p_2 = 0.3, q_2 = 0.3$

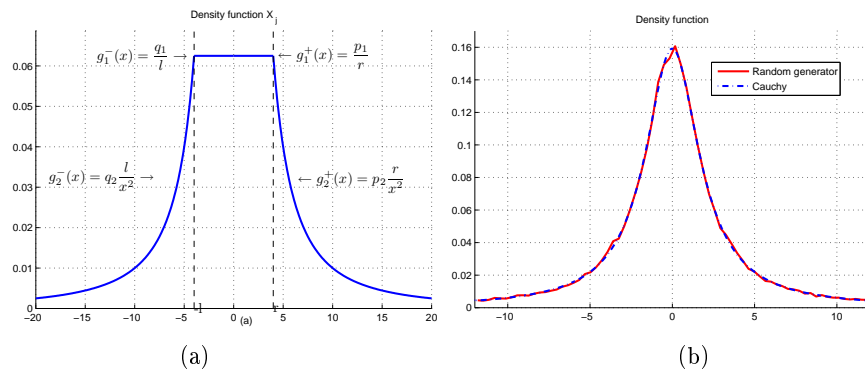


Рис. 12: а) вид плотности распределения X_j , б) график функций плотности сгенерированных чисел и распределения Коши при $n = 10^4, K = 10^4, \beta = 0, \sigma = 2, p = 0.5, p_2 = 0.25, q_2 = 0.25$

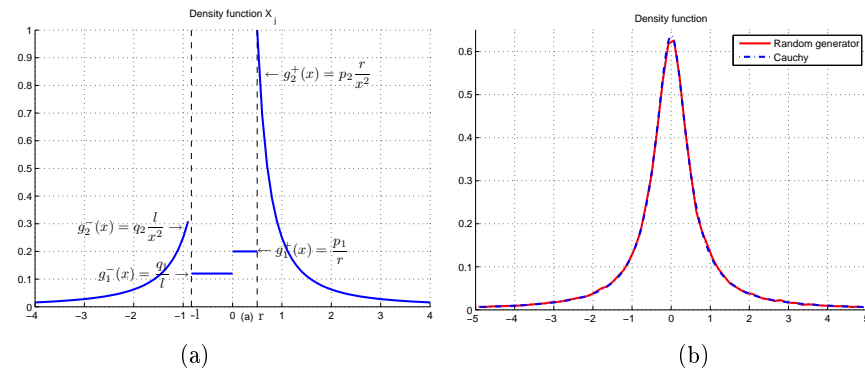


Рис. 13: а) вид плотности распределения X_j , б) график функций плотности сгенерированных чисел и распределения Коши при $n = 10^4, K = 10^4, \beta = 0, \sigma = 0.5, p = 0.6, p_2 = 0.5, q_2 = 0.3$

Заключение

В статье были получены выражения для параметров a и b из (1), необходимые для моделирования устойчивых случайных величин при $\alpha = 1$. Были определены соотношения между параметрами смеси распределений Парето и равномерного и параметрами устойчивого закона. Моделирование показало, что и для случая $\alpha = 1$ получение устойчивых случайных чисел возможно с помощью датчика, основанного на обобщенной центральной предельной теореме.

Список литературы

- [1] Архипов С.В., Багрова И.А. О моделировании односторонних устойчивых случайных величин // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика, выпуск 4(15). – Тверь: изд-во Тверского государственного университета, 2009. – С. 53-62.
- [2] Архипов С.В., Багрова И.А. О моделировании устойчивых случайных величин при α близких к единице // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика, выпуск 3(18). – Тверь: изд-во Тверского государственного университета, 2010. – С. 5-14.
- [3] Архипов С.В. О представлении характеристической функции устойчивого распределения при $\alpha = 1$ (в печати)
- [4] Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. – М.: Наука, 1972. – 375 с.
- [5] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983. – 304 с.
- [6] Janicki A., Weron A. Simulation and Chaotic Behavior of α -Stable Stochastic Processes. –New York: Marcel Dekker, 1994. – 355 p.
- [7] Samorodnitsky G., Taqqu M. Stable Non-Gaussian Random Processes. –New York: Chapman and Hall, 1994. – 632 p.
- [8] J. P. Nolan. <http://academic2.american.edu/jpnolan/stable/stable.html>
- [9] Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications. – Utrecht: VSP, 1999. – 594 p.