

УДК 551.46: 532.5: 51(075.8)

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ
ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТИ
ОЗЕРА СЕЛИГЕР**

Климок В.И., Дударев А.В.

Кафедра вычислительной математики

Выполнены численные эксперименты по расчету распространения примеси системой течений, вызванной ветровым воздействием в центральной части оз. Селигер. При моделировании миграции загрязняющего вещества использовались среднемесячные поля осредненных по глубине ветровых течений, найденные из решения системы уравнений для потенциального вихря и интегральной функции тока.

The modeling results of the spreading an admixture by currents in the central part of Lake Seliger were obtained by numerical experiments. In the time of modeling the spreading of pollution substance were used average-in-depth monthly wind-driven fields of currents which were found from solution of a set of two equations for potential vorticity and stream function.

Ключевые слова: численный эксперимент, поле течений, примесь.

Keywords: numerical experiment, field of currents, admixture.

Введение. Исследование качества такой лимнологической системы, как озеро Селигер, является актуальной проблемой при изучении экологического состояния водных объектов центральной части России. Ввиду отсутствия данных наблюдений за полями течений и их изменчивостью, воспроизведение элементов динамического режима озера выполнено с помощью математического моделирования. Численные эксперименты проведены для центральных плесов озера, веским аргументом чего является высокая степень техногенно-антропогенной нагрузки и расположение основных источников загрязнения именно в этой части водоема. При расчете ветровых течений и переноса примеси учитывались рельеф дна (важная роль которого в формировании течений отмечалась, например, в работах [1]–[3]), конфигурация берегового очертания и расходы воды втекающих и вытекающих рек. Водное питание Слободского и Осташковского плесов (исключая грунтовые воды и осадки) в основном происходит за счет поступления водных масс из верхних плесов (8,34 м³/с) и рек (Сабровки – 0,58 м³/с, Глубочицы – 0,97 м³/с, Емши – 0,38 м³/с, Сороги – 1,26 м³/с). Преобладающими ветрами над озером являются северо-западный (май – июль) и юго-западный (август – октябрь). Среднемесячная скорость ветра [4] составляет 3,9; 3,7; 3,3; 3,3; 3,7; 4,5 м/с, соответственно в мае – октябре. Остальное время озеро покрыто льдом и течение вызвано только притоком водных масс с верхних плесов озера, а также из устьев впадающих в него рек и оттоком их в Селижаровский плес.

1. Математическая формулировка модели. Распространение по акватории озера загрязняющего вещества определялось из решения уравнения адвективно-диффузионного переноса концентрации примеси

$$\frac{\partial HC}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}HC}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}HC}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A^x H \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A^y H \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (1)$$

с краевыми условиями: на участках «жидкой» границы, где поток направлен в рассматриваемую область и известно, что он содержит примесь, концентрация примеси задается, а на остальной части границы находится из уравнения (1) при условии равенства нулю производной по направлению внешней нормали к границе. В начальный момент времени содержание концентрации примеси в водоеме считалось известным.

Осредненные по вертикали скорости течения связаны с интегральной функцией тока ψ соотношениями:

$$\bar{u} = -\frac{1}{\rho_0 H} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{v} = \frac{1}{\rho_0 H} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Уравнение для интегральной функции тока

$$e^{-Rt} \frac{\partial}{\partial t} (L\psi e^{Rt}) - J\left(\frac{L\psi}{\rho_0} - f\right)/H, \psi) - A_H L\Delta\psi = \frac{\partial \tau_y/H}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x/H}{\partial y} \quad (3)$$

получено осреднением уравнений движения Навье-Стокса по глубине и исключением атмосферного давления.

Используемые обозначения общеприняты: x, y – оси декартовой системы координат; ρ_0 – среднее значение плотности воды; f – параметр Кориолиса; R – коэффициент придонного трения; A_H – коэффициент горизонтального турбулентного трения; $H = H(x, y)$ – глубина водоема; τ_x, τ_y – составляющие касательного напряжения трения ветра; t – время; через $L\varphi$ обозначено выражение: $L\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$, где $\varphi = \psi$ или $\Delta\psi$; $\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа; $J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}$ – оператор Якоби; A^x, A^y – коэффициенты диффузии примеси.

2. Метод решения. При решении уравнения (3) использовался один из известных способов его линеаризации – это сведение его решения к решению системы двух уравнений относительно потенциального вихря

$$\xi = \frac{1}{H} \left(\frac{L\psi}{\rho_0} - f \right) \quad (4)$$

и интегральной функции тока ψ :

$$\begin{aligned} \rho_0 H \frac{\partial \xi}{\partial t} + J(\psi, \xi) + \rho_0 R H \xi = A_H \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} \right) \right] - \rho_0 R f + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_y}{H} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_x}{H} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \rho_0 (H \xi + f). \quad (6)$$

На «твердых» участках границы функция тока задается с учетом известных расходов втекающих и вытекающих рек, а потенциальный вихрь определяется из

соотношения (4) с учетом того, что производная по направлению внешней нормали от функции тока равна нулю. На участках «жидкой» границы потенциальный вихрь и функция тока находятся из уравнений (5) и (6) при условии равенства нулю производных по направлению внешней нормали. Такое же условие принимается и для касательной составляющей скорости. В зимний период года, когда озеро находится подо льдом, трение о лед не учитывалось ($\tau_x = \tau_y = 0$). В это время года течения формируются только под влиянием орографических неоднородностей, притоком водных масс в озеро и их оттоком в Селижаровский плес.

При расчете функции тока на островах используется метод «дырочной релаксации», т.е. расчет ведется одновременно, в одном итерационном процессе, и на островах и внутри области [5]. Дополнительными соотношениями являются двойные интегралы:

$$\iint_{S_i} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] dS = \rho_0 \iint_{S_i} (H\xi + f) dS,$$

которые получаются интегрированием уравнения (6) по островам, с учетом того, что значение функции тока на острове постоянно, а правая часть равна нулю.

При численном решении уравнений (1), (5), (6) используются консервативно-диссипативные разностные схемы второго порядка точности по пространственным переменным и схема естественного фильтра при аппроксимации по времени. Функция тока ψ и потенциальный вихрь ξ определяются в узлах разностной сетки с целочисленными значениями индексов i по оси x и j по оси y , составляющие осредненной по глубине скорости (2) находились в точках с индексами $i, j+1/2$ и $i+1/2, j$ соответственно. Концентрация примеси определялась в точках с полуцелыми значениями индексов $i+1/2$ и $j+1/2$. Системы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующие исходные дифференциальные уравнения, решались методом последовательной верхней релаксации. Более подробно метод решения изложен в [6]. Осредненные по глубине скорости течения определялись из соотношений (2) для каждого месяца, с учетом соответствующего ветрового воздействия на водоем.

3. Результаты расчетов. Распространение загрязняющего вещества, на примере хрома общего, рассчитывалось с шагом по времени 5 суток на 200 лет модельного времени с использованием среднемесячных полей течений. Разрешение по горизонтальным координатам составляло 250 м. Значения коэффициентов горизонтального турбулентного трения A_H и придонного трения R задавались равными $2 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{с}$ и $3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ соответственно. Обоснование выбора величины коэффициента горизонтального турбулентного трения и результаты предварительных расчетов ветровых течений центральной части озера имеются в [7].

Основной вклад в антропогенную нагрузку осуществляется сточными водами кожевенного завода и г. Осташкова, поэтому постоянный источник примеси был задан в устье реки Емши, на которой располагаются очистные сооружения завода и города. Среднегодовые концентрации примеси задавались по фактическим данным и составляли от 2,33 до 0,0043 мг/л в зависимости от объемов производства кожевенного завода (использовались данные районного отделения Комитета по природным ресурсам г. Осташкова, которые были любезно предоставлены сотрудниками Тверского государственного технического университета). Воды остальных рек, впадающих в центральную часть озера и водных масс, поступающих с верх-

них плесов, считались «чистыми», т.е. не содержащими хрома. В начальный момент времени предполагалось, что вода в озере не содержала указанной примеси. Дальнейшее распространение по акватории центральной части водоема обусловлено адвективным переносом загрязняющего вещества существующей структурой течений, вызванной ветровым воздействием.

Поля «стоковых» течений и осредненных за период май-октябрь представлены на рис. 1,2. Изолинии концентрации примеси на конец 1992 года и 2000 года иллюстрируются рис. 3,4.

После 1988 года, когда производство кож значительно снизилось, уменьшились и концентрации хрома в центральной части озера. Согласно расчетам в 1992 году максимальная концентрация общего хрома в центральной части Слободского плеса составила 0,765мг/л, а в центральной части Осташковского плеса – 0,425мг/л. В 2000 г. соответствующие значения концентрации примеси составили 0,0072 и 0,0054мг/л. Наибольшие значения концентрации загрязняющего вещества в этот период наблюдаются к западу от о. Городомля и составляют 0,022мг/л.

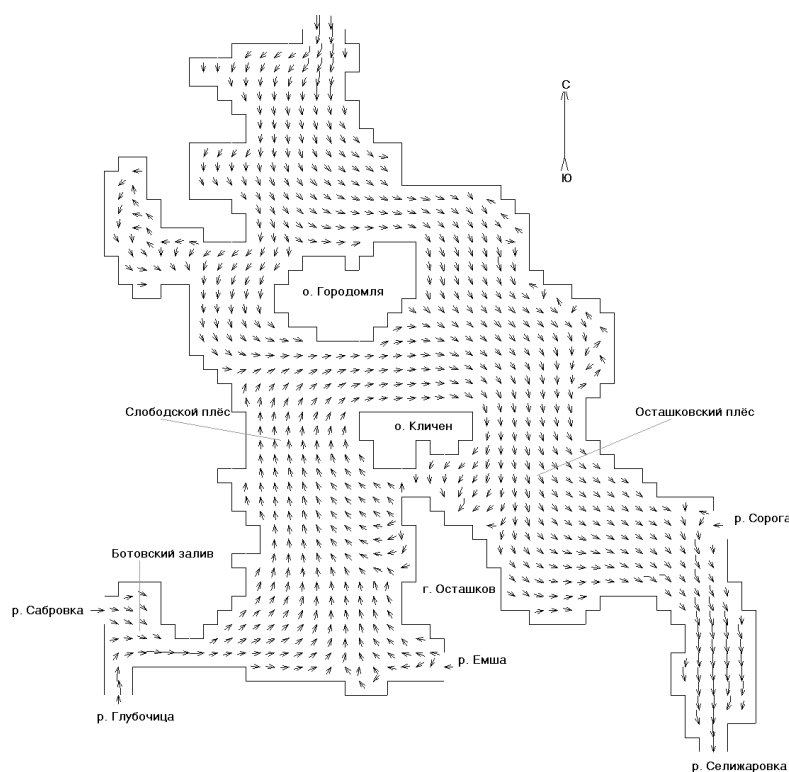


Рис. 1: Поле течений в зимний период года

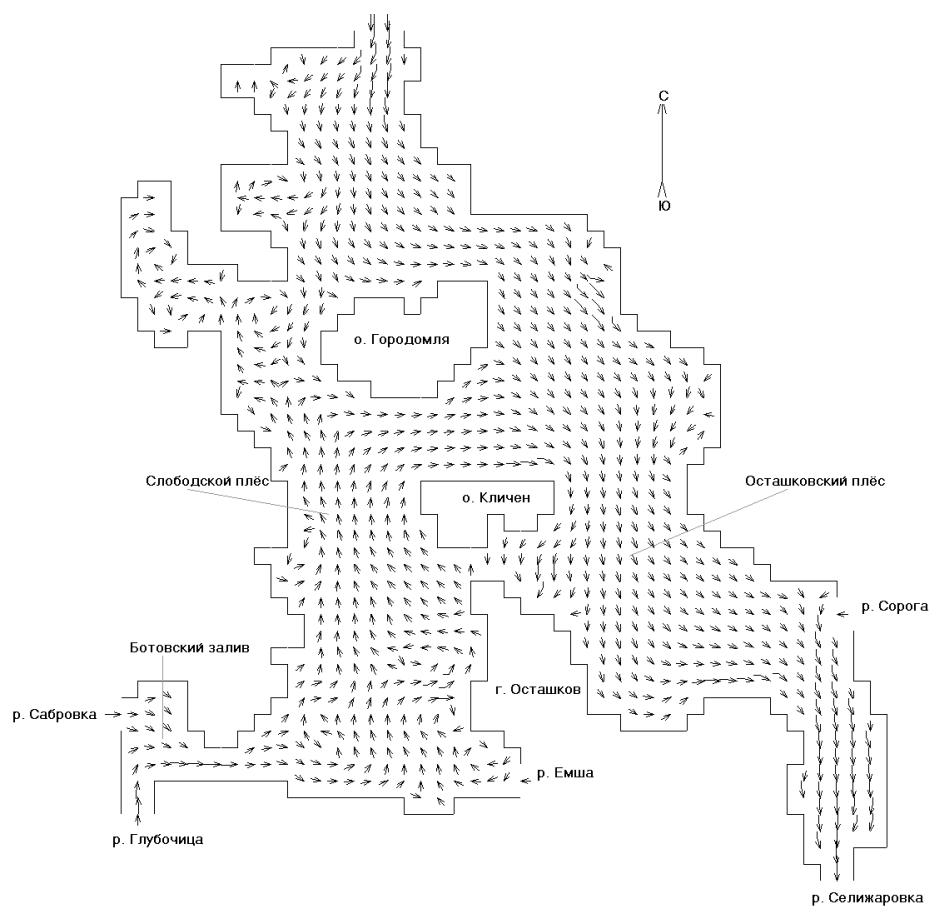


Рис. 2: Поле течений в весенне-осенний период года

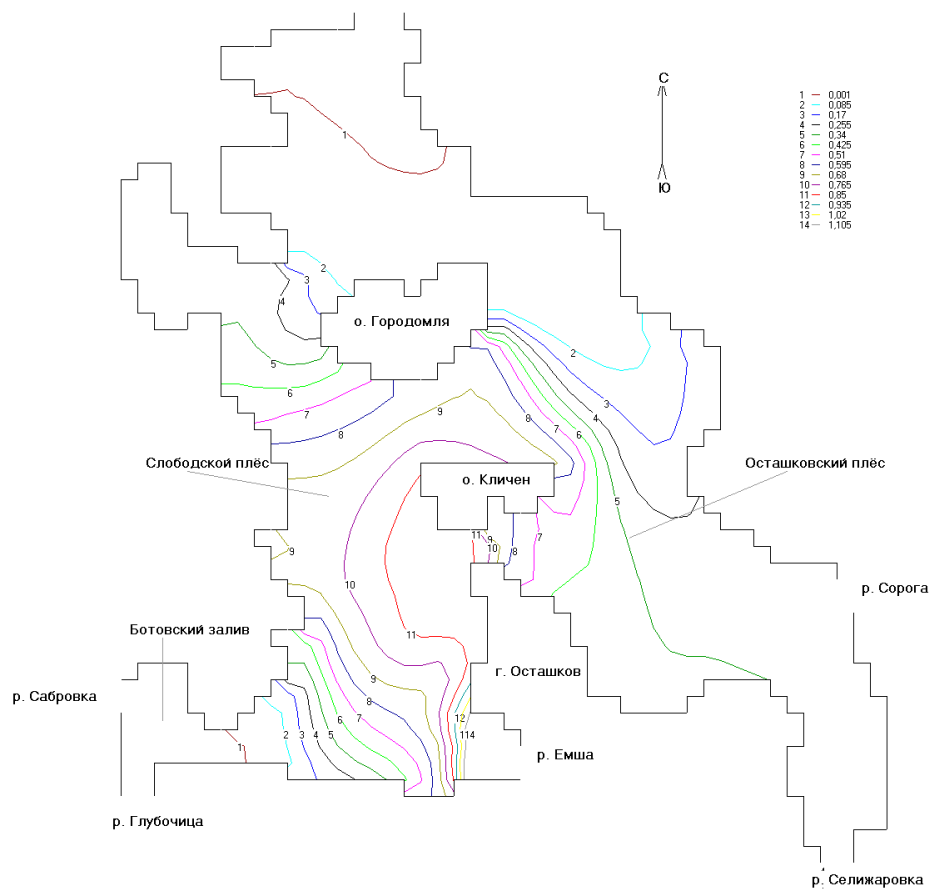


Рис. 3: Изолинии концентрации примеси на конец 1992 года

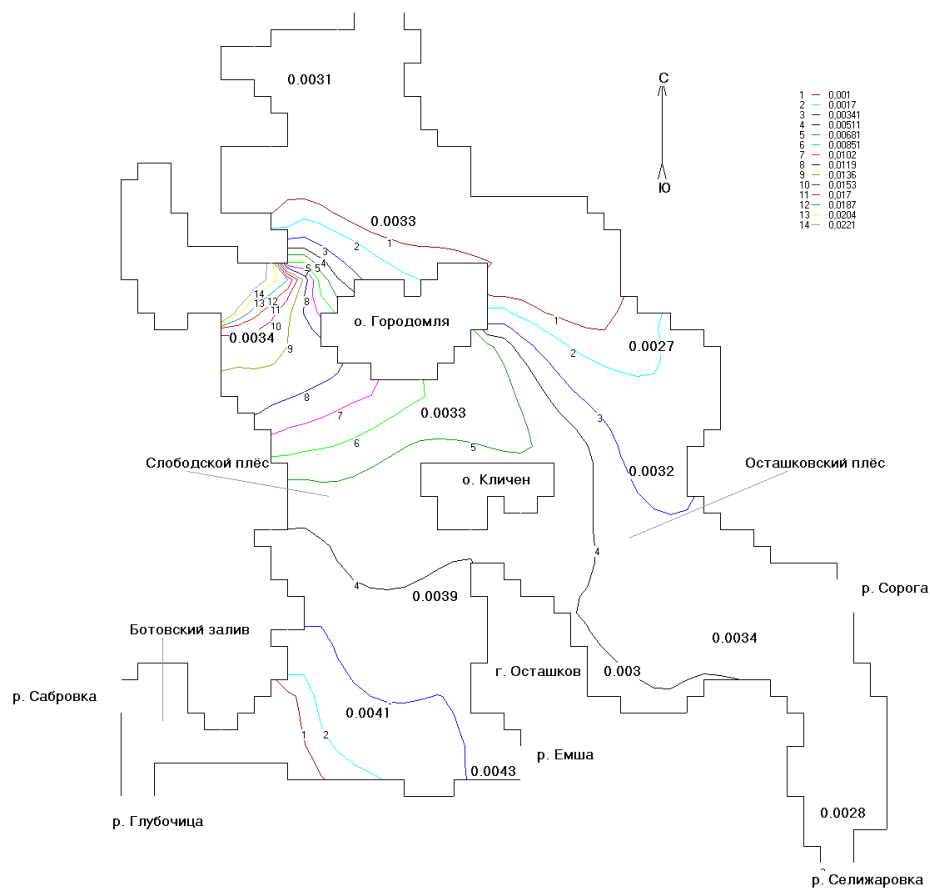


Рис. 4: Изолинии концентрации примеси на конец 2000 года

Из рис. 2 видно, что попадающие туда загрязненные воды «удерживаются» там антициклоническим круговоротом, образующимся в летне-осенний период года, который и препятствует «вымыванию» ингредиента из этой области водами, поступающими из верхних плесов озера. Для проверки степени достоверности полученных с помощью математического моделирования результатов на рис. 4 числами представлены данные измерений. Нужно отметить то обстоятельство, что в северной части исследуемой области расчетные и фактические концентрации существенно отличаются. Одна из причин расхождения в количественном отношении, на наш взгляд, состоит в том, что это результат неучтенных процессов

седиментации. Динамика донных отложений, взмучивающихся под воздействием волн и течений и осаждающихся вновь под действием силы тяжести, значительно влияет на перенос загрязняющих веществ в мелководных водоемах. Этот механизм в модели отсутствует.

Заключение. В общем, если судить о сравнении расчетных и фактических данных с учетом вариабельности данного гидрохимического параметра, то можно говорить о достаточно высокой степени совпадения полученных результатов, что свидетельствует о достоверности численной модели и возможности применения ее как для прогноза, так и для расчета переноса других примесей.

Список литературы

- [1] Каменкович В.М. О влиянии рельефа дна на чисто дрейфовые течения в однородном безбрежном море // Изд. АН СССР, сер. Геоф., 1956. №10. С. 1182 – 1187.
- [2] Welander P. Wind-driven circulation in one-and two-layer oceans of variable depth // Tellus, 1968. Vol. 20, № 1. P. 1 – 16.
- [3] Кочергин В.П., Климок В.И. О влиянии рельефа дна на океаническую циркуляцию // Изд. АН СССР, ФАО, 1971. Т.7, №8. С. 885 – 891.
- [4] Бочаров М.М. Природа Калининской области // Облиздат., Калинин, 1951. 198 с.
- [5] Semtner A.J. An oceanic general circulation model with bottom topography. Numerical simulation of weather and climate // Tech. Rept. № 9. University of California, 1974. 99p.
- [6] Климок В.И. Математические модели гидротермодинамики водоема и их численная реализация. Учеб. пособ. // Изд. ТвГУ, Тверь, 2006. 124 с.
- [7] Климок В.И., Косова И.В. Математическое моделирование течений озера Селигер // Сложные системы: моделирование и оптимизация. – Тверь: ТвГУ, 2001. С. 189 – 203.