Вестник ТвГУ. Серия "Экономика и управление". 2012. Выпуск 15. С. 217–231

МАТЕМАТИКА, СТАТИСТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЭКОНОМИКЕ И УПРАВЛЕНИИ

УДК 330.45:656

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ЛОГИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

В.Б. Реут[1], Е.В. Реут[2]

[1]Тверской государственный университет
Кафедра математики, статистики и информатики в экономике
[2]ООО «Деловые линии», г. Санкт-Петербург

Предлагается постановка и метод решения транспортной задачи с дополнительными логическими условиями, выраженными в виде шкал предпочтения для поставщиков и потребителей.
Ключевые слова: *транспортная задача, закрытая транспортная задача, логическая шкала предпочтения, множество допустимых пунктов назначения.*

Транспортной задаче, математическая постановка которой имеет вид

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m} \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j, \quad j = \overline{1,n} \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \tag{4}$$

обычно дается следующая экономическая интерпретация [1]:

i – номер поставщика (пункта отправления) однородного товара, $i = \overline{1,m}$;

j – номер потребителя (пункта доставки) товара, $j = \overline{1,n}$;

c_{ij} – стоимость доставки единицы товара из i-го пункта в j-ый;

a_i – количество товара у i-го поставщика;

b_j – количество товара, необходимое j-му потребителю;

$\{x_{ij,} i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\}$ – искомый план перевозки, который следует выбрать таким, чтобы общие затраты на перевозку были минимальными.

Для совместности системы ограничений (2-4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5)$$

Задачу (1-4), в которой условие (5) выполняется, принято называть транспортной задачей закрытого типа.

Задачу (1-4), в которой $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, называют открытой. Введение фиктивного потребителя в случае, если предложение превышает спрос $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$, или фиктивного поставщика, если спрос превышает предложение $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$, со стоимостью перевозки единицы товара к фиктивному потребителю или от фиктивного поставщика к потребителям равной или превышающей стоимость перевозки из всех, приведенных в задаче (1-4), любая открытая задача сводится к закрытой. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только задачи закрытого типа.

В практике при планировании перевозок часто приходится учитывать дополнительные условия как, например, уже установившиеся связи между поставщиками и потребителями, время доставки товара, последовательность разгрузки и т.д., которые могут быть выражены в виде шкал предпочтения для поставщиков и потребителей.

Логическая шкала предпочтения для i-го поставщика имеет вид

$$L_i = \left(j_1 \succ j_2 \succ j_3 \succ \ldots \succ j_s \succ \ldots \succ j_n\right), \qquad (6)$$

где j_s определяет номер потребителя, занимающего s-ое место в шкале предпочтения.

Дополнительные логические условия носят не обязательный, а желательный, предпочтительный характер, не в ущерб основному требованию минимизации общей суммы перевозок. То есть речь идет о выборе среди альтернативных решений задачи (1-4), таких решений, которые бы наиболее полно учитывали дополнительные логические условия (6). Условия (6) могут распространяться на всех поставщиков и потребителей, или на какую-либо группу.

В шкале (6) не обязательно должно быть указано место каждого потребителя. Множество потребителей, номера которых отсутствуют в шкале предпочтения, составляют множество потребителей, на которые не распространяются условия предпочтения.

В работе [2] предложен метод решения задачи назначения с учетом приоритетов, заданных в виде шкал предпочтения. В его основу положено использование метода решения задачи назначения, предложенный в работе [3].

В настоящей работе метод решения задачи назначения с учетом приоритетов распространяется на транспортную задачу (1-4) с дополнительными логическими условиями вида (6) для заданной группы поставщиков.

Идея метода решения задачи (1-4, 6) состоит в следующем.

Находятся начальные допустимые двойственные переменные задачи (1-4) и для каждого *i*-го поставщика определяется множество потребителей K_i. К множеству K_i относятся те потребители j, для которых выполняется условие

$$u_i + v_j = c_{ij} \tag{7}$$

Поставки от *i*-го поставщика разрешаются только потребителям $j \in K_i$. Поставки x_{ij} производятся, учитывая логические шкалы (6) и обязательные требования

$$\sum_{j \in K_i} x_{ij} \le a_i, \qquad i = \overline{1, m} \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \qquad j = \overline{1, n}. \tag{9}$$

Если требования (8), (9) выполняются в виде равенства для всех i и j, то решение задачи завершается. В противном случае определяются новые двойственные переменные и для каждого поставщика i новые множества потребителей K_i из условия

$$j \in K_i / u_i + v_j = c_{ij} \tag{10}$$

Полученное после полного распределения продукции всех поставщиков одно из альтернативных решений задачи (1-4) будет наиболее полно учитывать дополнительные логические условия, накладываемые в виде шкал (6). Такова идея решения задачи (1-4, 6).

Перейдем к описанию алгоритма решения задачи.

Начальные двойственные переменные определим следующим образом

$$u_i^0 = \min_j c_{ij}, \qquad i = \overline{1, m}, \tag{11}$$

$$v_j^0 = \begin{cases} 0, \textit{если } c_{ij} = u_i, \textit{хотя бы для одного } i, \\ \min\limits_i c_{ij} - \min\limits_i u_i^0, \textit{если } c_{ij} > u_i^0, \quad \forall i. \end{cases} \tag{12}$$

Определенные согласно (11), (12) двойственные переменные будут допустимыми, поскольку выполняются условия

$$u_i^0 + v_j^0 \le c_{ij}, \qquad i = \overline{1,m}, \;\; j = \overline{1,n}$$

Распределяем продукцию i-го поставщика ($i = \overline{1,m}$) в пункты K_i с учетом логических шкал (6) и соблюдая требования (8) и (9).

Возможны два исхода. Первый – продукция всех поставщиков распределена. Второй – имеется некоторое множество поставщиков I^H, которые не могут распределить всю продукцию, не нарушая условия (8) и (9). В первом случае полученное распределение

$$x_{ij} = \begin{cases} \ge 0, \; \textit{если} \;\; j \in K_i, \\ 0, \; \textit{если} \;\; j \notin K_i \end{cases} \tag{13}$$

является оптимальным решением задачи (1-4), что непосредственно вытекает из теоремы двойственности.

В то же время это распределение будет являться решением задачи (1-4, 6), поскольку распределение продукции каждого из поставщиков производилось с учетом логических условий (6).

При втором исходе для каждого $i \in I^H$ определяется множество поставщиков, которые направили продукцию в пункты, в которые мог бы направить продукцию i-ый поставщик. Обозначим это множество Θ_i^1. Формально определить множество Θ_i^1 очень просто, если воспользоваться операциями алгебры логики. Введем обозначения.

Вектор

$$Y_i = \left(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ij}, \ldots, y_{in}\right), \tag{14}$$

компоненты y_{ij} которого определяются следующим образом

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \; \textit{если} \;\; u_i + v_j = c_{ij}, \\ 0, \; \textit{если} \;\; u_i + v_j < c_{ij}, \end{cases} \tag{15}$$

назовем шкалой индикаторов разрешения.

Введем шкалу-вектор

$$Z_i = \left(z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{ij}, \ldots, z_{in}\right) \tag{16}$$

компоненты z_{ij} которого определяются как

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, \; \textit{если} \;\; x_{ij} > 0, \\ 0, \; \textit{если} \;\; x_{ij} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Тогда к множеству Θ_i^1 относятся все поставщики λ, для которых выполняются условия

$$y_{ij} \cap z_{\lambda j} = 1,\ j = \overline{1,n}, \qquad (18)$$

хотя бы для одного значения *j*.
(операция (18) – логическое умножение – дает значение истины тогда и только тогда, когда y_{ij} и $z_{\lambda j}$ истины).

Введем множество $K_{i\lambda}$. К множеству $K_{i\lambda}$ отнесем всех потребителей *j*, которым разрешается получать продукцию от поставщика *i* $(y_{ij} = 1)$ и в которые поступает продукция от поставщика λ $(z_{\lambda j} = 1)$, т.е. $\lambda \in \Theta_i^1$ если $K_{i\lambda}$ не пустое множество.

Множество потребителей $K_{i\lambda}$ выделяются операцией логического умножения шкал Y_i и Z_λ.

Введем вектор

$$Z_0 = (z_{01}, z_{02}, \ldots, z_{0j}, \ldots, z_{0n}) \qquad (19)$$

Компоненты которого

$$z_{0j} = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \\ 1, \ \textit{если} \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} < b_j \end{cases} \qquad (20)$$

Вектор Z_0 будем называть шкалой индикаторов незанятости потребителей.

Операцией

$$y_{\lambda j} \cap z_{0j} = 1,\ \lambda \in \Theta_i^1,\ j = \overline{1,n} \qquad (21)$$

выделяются потребители $j \in \tilde{K}_\lambda$, которым может быть направлена продукция поставщика $\lambda \in \Theta_i^1$ без нарушения условий (8, 9) (множество $\tilde{K}_\lambda$ легко выделить путем логического умножения шкал Y_λ и Z_0).

Если среди поставщиков $\lambda \in \Theta_i^1$ оказался поставщик, для которого выполняется условие (21) (т.е. множество свободных потребителей $\tilde{K}_\lambda$ не пусто), то производится переназначение поставок. Увеличивается поставка продукции в один из пунктов $j \in \tilde{K}_\lambda$ и освобождается один из пунктов $j \in K_{i\lambda}$ для приема продукции от *i*-го поставщика. Перераспределение поставок поставщика λ и назначение продукции поставщика *i* в освободившийся пункт $j \in K_{i\lambda}$ производится с учетом шкал L_λ, L_i и условий (8, 9).

Если для всех $\lambda \in \Theta_i^1$ множество свободных потребителей $\tilde{K}_\lambda$ пусто, то определяется множество поставщиков второго уровня связей

$$\Theta_i^2 = \bigcup_{\lambda \in \Theta_i^1} \Theta_\lambda^1 - \Theta_i \,, \qquad (22)$$

здесь в Θ_i включается *i*-ый поставщик и множество Θ_i^1. Множество Θ_i называется множеством рассмотренных поставщиков при распределении продукции *i*-го поставщика.

Если $\Theta_i^2 = \varnothing$ (пустое множество), то переходим к распределению продукции следующего $i \in I^H$.

Если Θ_i^2 не пусто, то для каждого $\beta \in \Theta_i^2$ выделяется множество свободных потребителей $\widetilde{K}_\beta$ операцией логического умножения шкал Y_β и Z_0.

Если среди поставщиков $\beta \in \Theta_i^2$ оказался поставщик, для которого $\widetilde{K}_\beta$ не пусто, то производится переназначение поставок. Увеличивается поставка продукции от поставщика β в один из пунктов $j \in \widetilde{K}_\beta$ и соответственно уменьшается поставка от него в один из пунктов $j \in K_{\lambda\beta}$.

В освободившийся пункт $j \in K_{\lambda\beta}$ направляется продукция поставщика λ за счет уменьшения поставки продукции от этого поставщика одному из потребителей $j \in K_{i\lambda}$, в который и направляется продукция от *i*-го поставщика. Все переназначения производятся с учетом обязательных условий (1-4) и логических шкал, участвующих в переназначениях поставщиков. Если в результате переназначений *i*-ый поставщик полностью распределяет свою продукцию в разрешенные пункты, то осуществляется переход к распределению продукции следующего поставщика из множества I^H.

Если для всех $\beta \in \Theta_i^2$ множество $\widetilde{K}_\beta$ пусто, то множество Θ_i^2 включается в множество Θ_i и определяется множество поставщиков третьего уровня связей.

$$\Theta_i^3 = \bigcup_{\beta \in \Theta_i^2} \Theta_\beta^1 - \Theta_i$$

Для каждого $\gamma \in \Theta_i^3$ определяется множество потребителей $\widetilde{K}_\beta$. Если хотя бы одно множество $\widetilde{K}_\beta$ не пусто, то делаются все необходимые переназначения, в результате которых увеличиваются поставки от поставщика *i* в один из пунктов множества $K_{i\lambda}$. Если все $\widetilde{K}_\beta = \varnothing$, то множество Θ_i^3 включается в множество Θ_i и аналогично строится множество четвертого уровня связей Θ_i^4 и т.д., до тех пор, пока для какого-то поставщика d найдется не пустое $\tilde{K}_d$ и будут произведены все необходимые переназначения с учетом шкал предпочтения, приводящие к увеличению поставок от i, либо будет получено пустое множество Θ_i^h. Переход к распределению продукции следующего поставщика $l \in I^H$ осуществляется, если выполняется одно из условий:

а) полностью распределена продукция рассматриваемого поставщика $l \in I^H$;

б) получено пустое множество Θ_i^h:

$$\Theta_i^h = \bigcup_{\alpha \in \Theta_i^{h-1}} \Theta_\alpha^1 - \Theta_i , \qquad (23)$$

где $\Theta_i = \bigcup_{s=0}^{h-1} \Theta_i^s$,

Здесь множество Θ_i^0 состоит из самого i-го поставщика.

При этом, ввиду того, что число рассматриваемых поставщиков конечно, а при построении Θ_i^s в него включаются только те поставщики, которые не рассматривались ранее при построении множеств Θ_i^s, $s = \overline{1, h-1}$, совершенно очевидна конечность алгоритма построения Θ_i. В результате продукция поставщика $i \in I^H$ будет либо полностью распределена в пункты K_i, либо будет построено множество поставщиков Θ_i, объем продукции в которых больше, чем возможности потребителей, которым разрешено ее принимать при принятых значениях двойственных переменных, т.е. имеет место

$$\sum_{i \in \Theta_i} a_i > \sum_{j \in N_i} b_j , \qquad (24)$$

где $N_i = \bigcup_{i \in \Theta_i} K_i$.

Если все поставщики i распределяют свою продукцию (множество I^H пусто), то

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (u_i + v_j) x_{ij} ,$$

Поскольку при $c_{ij} \neq (u_i + v_j)$, обязательно $x_{ij} = 0$, так как $y_{ij} = 0$, то

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (u_i + v_j) x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} v_j \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{i=1}^{m} v_j b_j ,$$

следовательно, решение оптимально, а поскольку при распределении продукции каждого поставщика учитывались приоритеты, то полученное оптимальное решение задачи (1-4) отражает и дополнительные логические условия (6).

Если в результате работы алгоритма не все поставщики распределили свою продукцию, то строим множество $\Theta = \bigcup_{i \in I^n} \Theta_i$ поставщиков и множество $K = \bigcup_{i \in \Theta} K_i$ потребителей и определяем новые двойственные переменные

$$u_i^1 = \begin{cases} u_i^0 + \Delta, & \text{если } i \in \Theta, \\ u_i^0, & \text{если } i \notin \Theta, \end{cases}$$
$$v_j^1 = \begin{cases} v_j^0 - \Delta, & \text{если } j \in K, \\ v_j^0, & \text{если } j \notin K \end{cases} \tag{25}$$

здесь Δ – некоторая положительная постоянная величина, такая, что $c_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \Delta$, где α_{ij} – некоторые целые числа.

Определив новое допустимое решение двойственной задачи по формулам (25), находим новые вектора Y_i, используя условие (15), и повторяем процедуру распределения продукции поставщиков с учетом логических шкал заново. В результате либо распределяем полностью продукцию всех поставщиков, либо определим новые множества поставщиков Θ и K и вычислим новый план двойственной задачи, более близкий к оптимальному и т.д., пока на каком-то шаге не распределим всю продукцию всех поставщиков.

Заметим, что представление каждой из компонент матрицы $(c_{ij})_{mn}$ в виде $c_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \Delta$ вовсе не является принципиальным для данного алгоритма.

Величину Δ можно выбирать на каждом шаге *t* следующим образом.

Определим

$$\alpha_{ij}^t = c_{ij} - \left(u_i^{t-1} + v_j^{t-1}\right) \quad \text{для} \quad i \in \Theta,\ j \notin K \tag{26}$$

Здесь u^{t-1} и v^{t-1} - допустимое решение двойственной задачи на шаге $t-1$. Выберем в качестве Δ^t минимальное значение α_{ij}^t, т.е.

$$\Delta^t = \min_{i \in \Theta,\, j \notin K} \alpha_{ij}^t \tag{27}$$

Поскольку для $i \in \Theta$ и $j \notin K$ имеем $u_i^{t-1} + v_j^{t-1} < c_{ij}$, всегда $\Delta^t > 0$.

Покажем, что новые двойственные переменные u_i^t и v_j^t, определенные как

$$u_i^t = \begin{cases} u_i^{t-1} + \Delta^t, & \text{если } i \in \Theta, \\ u_i^{t-1}, & \text{если } i \notin \Theta, \end{cases}$$

$$v_j^t = \begin{cases} v_j^{t-1} - \Delta^t, & \text{если } j \in K, \\ v_j^{t-1}, & \text{если } j \notin K, \end{cases}$$

также являются допустимыми решениями двойственной задачи. Действительно,

если $i \in \Theta$, $j \in K$, то $u_i^t + v_j^t = u_i^{t-1} + \Delta^t + v_j^{t-1} - \Delta^t = u_i^{t-1} + v_j^{t-1} \le c_{ij}$;

если $i \in \Theta$, $j \notin K$, то $u_i^t + v_j^t = u_i^{t-1} + \Delta^t + v_j^{t-1}$, учитывая (27), можно записать $u_i^t + v_j^t \le c_{ij}$;

если $i \notin \Theta$, $j \in K$, то $u_i^t + v_j^t = u_i^{t-1} + v_j^{t-1} - \Delta^t \le c_{ij}$;

наконец, если $i \notin \Theta$, $j \notin K$, то $u_i^t + v_j^t = u_i^{t-1} + v_j^{t-1} \le c_{ij}$.

При небольшом количестве градаций элементов матрицы $(c_{ij})_{mn}$ (т.е. при небольших α_{ij}) можно пользоваться фиксированным Δ. При большом количестве градаций использование $\Delta = const$ может привести к неоправданному увеличению количества шагов, за которое достигается оптимальное решение. Поэтому в общем случае целесообразно иметь переменную величину Δ^t, определяемую на каждом шаге.

Рассмотрим в качестве примера задачу, взятую из книги [1] (раздел «Транспортные задачи с альтернативным оптимумом»). «Имеется три производителя, поставляющих свои товары на четыре склада. Мощность производителей и потребность складов в единицах товара, а также стоимость перевозки единицы товара к складу представлены в таблице 1».

Таблица 1

Номер производителя i	**Мощность производителя** a_i	**Склады** j **и их спрос**			
		1	**2**	**3**	**4**
		100	550	200	550
1	300	10	20	50	30
2	600	10	60	50	20
3	500	60	30	70	40

Расширим таблицу 1, введя столбец для двойственных переменных u_i и строку для двойственных переменных v_j.

Клетки, в которых представлены стоимости перевозки единицы товара от *i*-го производителя до *j*-го склада, разобьем на две части: в верхней части остается стоимость перевозки, вторая часть, в свою очередь, разбивается на две половины – в верхней половине будем ставить значение индикатора разрешения, если он равен 1, либо оставлять пустой, если $y_{ij} = 0$; нижняя половина заполняется значениями x_{ij} (если $x_{ij} > 0$, то автоматически индикатор назначения $y_{ij} = 1$).

К приведенным в таблице 1 условиям задачи добавим дополнительные логические условия, которые представим в виде следующих логических шкал:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= (3,2,1,4) \\ L_2 &= (1,4,3,2) \\ L_3 &= (4,2,1,3) \end{aligned}\right\} \quad \text{Вариант 1} \; .$$

Решение задачи начнем с задания согласно (11) и (12) значений двойственных переменных и заполнения столбца u_i^0 и строки v_j^0. В верхней половинке нижней части клетки (i, j) поставим значение индикатора разрешения $y_{ij}^0 = 1$, если $u_i^0 + v_j^0 = c_{ij}$.

Расширенная таблица 2 с двойственными переменными u_i^0 и v_j^0, индикаторами разрешения поставки y_{ij} приведена ниже. Первоначально индикаторы незанятости z_{0j} равны 1 для всех потребителей.

Таблица 2

i	**j**	**1**	**2**	**3**	**4**	
	b_j	~~100~~ ; 0	~~550~~ ; 50	~~200~~ ; 0	~~550~~ ; 0	u_i^0
	z_{0j}	~~1~~ ; 0	1	~~1~~ ; 0	~~1~~ ; 0	
1		10	20	50	30	
	300	1		1		**10**
	0	100		200		
2	~~600~~	10	60	50	20	
	50	1		1	1	**10**
					550	
3		60	30	70	40	
	500		1			**30**
	0		500			
v_j		0	0	40	10	$\min\limits_i u_i^0 = 10$

Распределяем товар 1-го производителя, учитывая шкалу L_1. В шкале L_1 наиболее предпочтительным для 1-го поставщика указан склад №3. поскольку $y_{13} = 1$, направляем от первого производителя на 3-й склад товар в количестве min (300, 200)=200 единиц.

Следующий в шкале L_1 пункт 2. Но поставка от 1-го производителя в пункт 2 закрыта $y_{12} = 0$.

Переходим к следующему по шкале L_1 пункту 1. поскольку $y_{11}=1$, то направляем на 1-й склад товар в количестве $\min(a_1-200,b_1)=\min(300-200,100)=100$.

Товар 1-го производителя распределен полностью. Индикаторы незанятости у 3-го и 1-го потребителей стали равными 0.

Переходим ко второму производителю. Для второго производителя открыт один четвертый склад (склады 1 и 3 имеют индикаторы незанятости $z_{01}=0$, $z_{03}=0$, поэтому не могут быть использованы 2-м производителем, несмотря на то, что $y_{21}=1$ и $y_{23}=1$). Второй производитель направляет на склад №4 товар в количестве min (600, 550)=550. Индикатор незанятости z_{04} становится равным нулю. Поскольку 2-й производитель не распределил товар в разрешенные пункты, он относится к множеству поставщиков, не распределивших продукцию, т.е. к множеству I^H. Переходим к третьему поставщику. Третий поставщик может направлять товар только на 2-й склад. Направляем от третьего производителя товар в количестве min (500, 550)=500 единиц на второй склад. Индикатор незанятости остается в положении 1. В множестве I^H оказался один 2-й поставщик. Строим множество Θ_2^1. Умножаем шкалу Y_2 на шкалу Z_1, получим $y_{21}\cap z_{11}=1$ и $y_{23}\cap z_{13}=1$.

Согласно (18) 1-ый поставщик относится к множеству Θ_2^1. Поскольку для 1-го поставщика не выполняется условие (21) (ни для одного *j* не выполняется $y_{1j}\cap z_{0j}=1,\ \ j=\overline{1,4}$), т.е. множество $\widetilde{K}_1=\varnothing$, переходим к построению множества Θ_i^2. Умножение шкалы Y_1 на Z_3 не дает истины ни для одного *j*, следовательно, $\Theta_2^2=\varnothing$, а в множество Θ_2 войдут второй поставщик и $\Theta_2^1=\{1\}$. Поскольку в I^H только один 2-ой поставщик, то множество $\Theta=\Theta_2=\{2,1\}$.

В множество *К* войдут K_2 и K_1

$$K=\{1,3,4\}$$

Определяем новые двойственные переменные согласно (25) и соответствующие им вектора учета $y_{i,j}, i=\overline{1,3}, j=\overline{1,4}$, которые заносим в таблицу 3, и начинаем процедуру распределения товара от производителей по складам заново с учетом новых индикаторов разрешения и логических шкал (вариант 1).

Начинаем с 1-го производителя. Первый производитель может поставлять 1-му, 2-му и 3-му потребителям. В соответствии с логической шкалой L_1, назначаем на 3-й склад от первого производителя 200 единиц товара (индикатор z_{03} переходит в положение $z_{03}=0$), на 2-ой склад – 100 единиц. Индикатор z_{02} остается в положении 1. От второго производителя назначаем 100 единиц на 1-ый склад и 500 единиц на 4-ый склад.

Таблица 3

i	j	1	2	3	4	
	b_j	~~100~~ ; 0	~~550~~ ; 450 ; 0	~~200~~ ; 0	~~550~~ ; 50	u_i^1
	z_{0j}	1	1	~~1~~ ; 0	1	
1		10	20	50	30	
	~~300~~	1	1	1		**20**
	0	50^{+}	100 ; 50^{-}	200		
2	~~600~~	10	60	50	20	
	0	1		1	1	**20**
		~~100~~ ; 50^{-}			~~500~~ ; 550^{+}	
3	~~500~~	60	30	70	40	
	~~50~~		1			**30**
	0		~~450~~ ; 500^{+}			
v_j		–10	0	30	0	

Третий производитель может назначить только 2-му потребителю 450 единиц (индикатор $z_{02}=0$).

В состав множества поставщиков, не распределивших всю продукцию, попадает один 3-й поставщик.

Строим множество Θ_3^1. Умножая шкалу Y_3 на шкалы Z_1 и Z_2, получим истину в случае $y_{32}\cap z_{12}=1$, следовательно, $\Theta_3^1=\{1\}$. При умножении шкалы Y_1 на Z_0, получаем ложь при всех j, т.е. переназначить продукцию от 1-го поставщика $\left(\tilde{K}_1=\varnothing\right)$ нельзя. Переходим к построению множества $\Theta_3^2=\bigcup\limits_{\lambda\in\Theta_3^1}\Theta_\lambda^1-\{3{,}1\}=2$. Поскольку $y_{24}\cdot z_{04}=1$. Увеличиваем поставку продукции от 2-го поставщика 4-му потребителю на 50 единиц, уменьшив поставку от 2-го поставщика 1-му потребителю на 50 единиц; поставляем 50 единиц продукции от 1-го поставщика 1-му потребителю, уменьшив поставку от 1-го поставщика 2-му потребителю на 50 единиц, освободив тем самым 2-го потребителя для приема 50 единиц продукции от 3-го поставщика. Поскольку все поставщики распределили продукцию, решение примера завершается. Окончательный план запишем в виде двух массивов, каждый из которых содержит $m+n$ элементов. В указанных массивах первые m позиций занумерованы от 1 до m, следующие n – от 1 до n. Будем их называть левой и правой частями массивов. В первый массив записываются величины x_{ij} либо в *i*-й позиции левой части, либо в *j*-й позиции правой части. Соответственно в *i*-й позиции левой части второго массива помещается номер *j*, либо в *j*-й позиции правой части – номер *i*.

Подобная запись позволяет легко учесть все возможные $m+n-1$ связи между поставщиками и потребителями и производить необходимые переназначения.

Таблица 4

1	2	3	1	2	3	4
50	550	500	50	50	200	
1	4	2	2	1	1	

j – номера потребителей (столбцы 1–3) *i* – номера поставщиков (столбцы 1–4)

Стоимость всех поставок

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 10\cdot 50 + 20\cdot 550 + 30\cdot 500 + 10\cdot 50 + 20\cdot 50 + 50\cdot 200 = 38000$$

Если решить ту же задачу (1-4,6), но со шкалами:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= (1,2,3,4) \\ L_2 &= (3,4,1,2) \\ L_3 &= (4,2,3,1) \end{aligned}\right\} \quad \text{Вариант 2}$$

то получим план перевозок, представленный в таблице 5.

Таблица 5

1	2	3	1	2	3	4
100	50	500		50	150	550
1	3	2		1	1	2

Стоимость перевозок

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 10\cdot 100 + 50\cdot 50 + 30\cdot 500 + 20\cdot 50 + 50\cdot 150 + 20\cdot 550 = 38000$$

Стоимость доставки всей продукции одинакова в обоих вариантах и соответствует минимально возможной.

На рис. 1 показано распределение продукции 1-го и 2-го поставщиков в каждом из вариантов:

3-й поставщик в обоих вариантах поставляет всю продукцию в количестве 500 единиц второму потребителю.

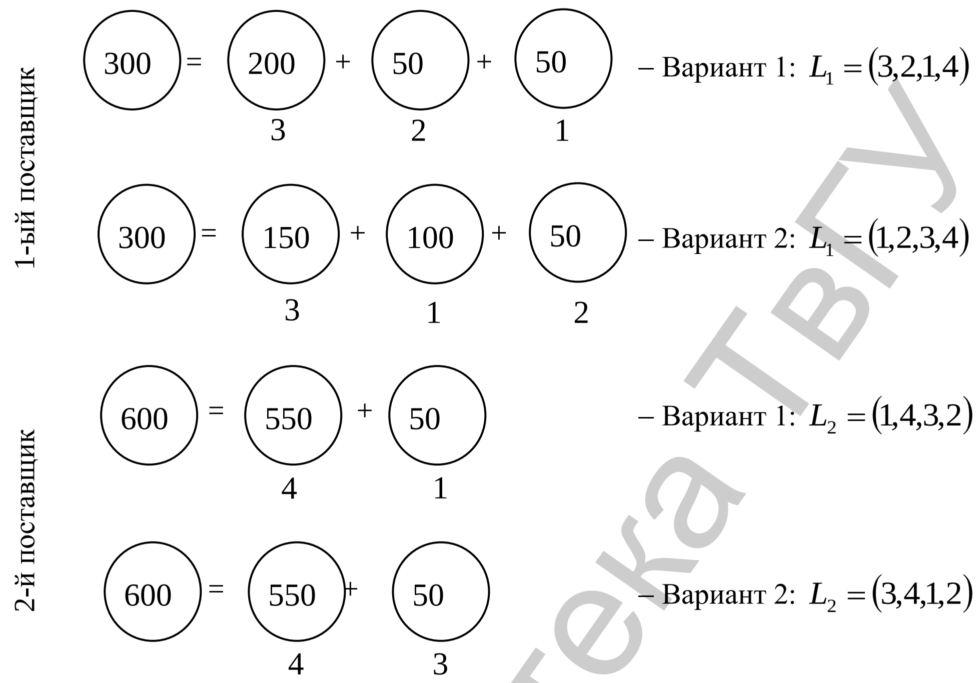

Рис. 1

Принципиальное отличие рассмотренного метода решения транспортной задачи от широко известных состоит в том, что для каждого поставщика при заданных двойственных переменных открывается все множество допустимых пунктов поставки, что позволяет, используя шкалы Y_i и Z_i, не только значительно ускорить процесс решения, но и учесть дополнительные логические условия.

Список литературы

1. Кузнецов Б.Т. Математические методы и модели исследования операций. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 392 с.
2. Реут В.Б. Решение задачи назначения с учетом заданных приоритетов. В сб. Математика, статистика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании. Материалы I Международной научно-практической конференции 15-16 мая 2012 года, г. Тверь. – Тверь, ТвГУ, 2012.
3. Реут В.Б. Об одном методе решения задачи назначения. В сб. Математические методы решения экономических задач. Академия наук СССР, ЦЭМИ, изд. «Наука». – М., 1969.

TRASPORT PROBLEM WITH ADDITIONAL LOGIC TERMS AND ITS SOLVATION

V.B. Reut [1], E.V. Reut [2]

[1]Tver State University

The department of mathematics, statistics and informatics in economics

[2]National economy department

Limited company "business lines" Sankt –Petersberg

The authors suggest the method of solving transport problem with additional logic terms. The method is represented in the form of preference scales for suppliers and consumers.

***Keywords**: transport problem, closed transport problem, logic preference scale, multitude of acceptable destinations*

Об авторах:

РЕУТ Владимир Борисович – доктор технических наук, профессор, кафедры математики, статистики и информатики в экономике Тверского государственного университета, e-mail: v.b.reut@yandex.ru,

РЕУТ Елена Владимировна – директор управления по организационно-корпоративной деятельности ООО «Деловые линии» г. Санкт-Петербург, e-mail: elena.reut@dellin.ru.