

УДК 519.866:338.5-032.32

КЛАССИФИКАЦИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В РАМКАХ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ

И.В. Цветков

Тверской государственной институт
Кафедра экономики и управления производством

Изложены основы мультифрактальной динамики. Дана классификация динамики экономических процессов в рамках данной модели. Получена формула для прогноза динамики кусочно-линейного тренда социально-экономических процессов, когда их характер относится к I и II типу.

Ключевые слова: *фрактальный анализ, мультифрактальная динамика, цена на нефть, прогноз, классификация социально-экономических процессов.*

Введение

Критические явления в социально-экономических системах представляют большой интерес, поскольку они обусловлены их структурой и особенностями динамики основных параметров таких систем. Изучение этих явлений позволяет выявлять их природу и понять наиболее важные элементы структуры процессов, протекающих в социально-экономических системах. В критических областях значений основных параметров характерны существенно-нелинейные зависимости основных характеристик систем от этих параметров.

Целью данной работы является построение новой схемы анализа и прогноза динамики социально-экономических процессов в рамках модели мультифрактальной динамики. Моделирование кризисных явлений в экономике, в частности, финансовых процессов помогает глубже понять природу этих явлений, а также делать соответствующие прогнозы. Ценность таких прогнозов очевидна.

Модель мультифрактальной динамики

В основе использования мультифракталов для описания динамических систем лежит принцип самоподобия. Первым, кто обратил внимание на самоподобный характер поведения цен, был основоположник фракталов – Бенуа Мандельброт [4]. Применительно к ценам на нефть подробно вопрос самоподобия рассмотрен в работах [3; 5]. В работе [6] на конкретном примере динамики цен на нефть в 2009–2010 гг. показан самоподобный характер поведения цен на нефть и дано обоснование использования метода мультифрактальной динамики для описания данного экономического явления.

В основе математической модели мультифрактальной динамики [5; 6] лежит уравнение для скорости кусочно-линейного тренда динамического процесса $X(i)$:

$$A(D)X_i + B_k X^3 = \eta \quad (1)$$

Удобно выбрать такой масштаб, чтобы выполнялось условие $|X| \ll 1$. Параметр η описывает эффективное влияние внешних факторов на изучаемую систему.

Для функции $A(D)$ выберем следующее аналитическое представление:

$$A(D) = \begin{cases} (D_0 - D)^{-1} & \text{при } 1 \leq D \leq D_0 \\ (D_0 - D_k)^{-1} (D_0 - D)^{-1} (D - D_k)^{-1} & \text{при } D_0 \leq D \leq 2 \end{cases} \quad (2)$$

В [8] предложено несколько иное аналитическое представление $A(D)$, достаточно близкое к (2).

Параметры модели D_0 , D_k , B_k и η выбираются из наилучшего согласия с опытными данными.

В случае $D < D_0$ членом с B_k можно пренебречь и справедливо линейное приближение: $X = \eta(D_0 - D)$ (3)

В этой области значений D уравнение (1) имеет один вещественный корень, определяемый формулой приведенной в [5].

При стремлении D к D_k ситуация существенно изменяется и членом B_k в (2) пренебречь уже нельзя.

Пусть $y(t)$ – мультифрактальная кривая, описывающая динамику интересующей нас величины и имеющей на интервалах времени $T_i (i = 1, 2, 3 \dots n)$ определенное значение фрактальной размерности D_i .

Тогда, если скорость X_i линейного тренда $\bar{y}_i(t)$, аппроксимирующего эту функцию на интервале T_i с нужной нам степенью точности, зависит только от D_i , то данный вид динамики мы будем называть мультифрактальной.

В этом случае в [5] предлагается следующий подход: Динамику мультифрактального процесса на интервале $T_i (t_{0i} < t < t_{0i+1}, T_i = t_{0i+1} - t_{0i})$ можно разделить на две составляющие, используя понятие линейного тренда:

$$y_i(t) = \bar{y}_i(t) + \tilde{y}_i(t), \quad (4)$$

где $\bar{y}_i(t)$ – линейный тренд процесса, который во времени меняется гладко; $\tilde{y}_i(t)$ – быстрые осцилляции относительно тренда. Предполагается, что $|\bar{y}_i(t)| \gg |\tilde{y}_i(t)|$ и кривая $y(t)$ является мультифрактальной. Линия тренда $\bar{y}_i(t)$ имеет фрактальную размерность равную единице, а $\tilde{y}_i(t)$ – фрактальную размерность D .

Мерой погрешности модели у нас будет величина $\Delta_i = \max|\tilde{y}_i(t)$ на рассматриваемом интервале изменений D_i . На всем интервале наблюдения общее значение погрешности $\Delta = \max \Delta_i, i = 1 \dots n$.

В предлагаемой нами модели фрактальной динамики угол и предполагается, что тангенс наклона линейного тренда $\bar{y}(t)$ является функцией фрактальной размерности D . В нашем случае в качестве $y(t)$ выступает цена на нефть.

Важным моментом подхода является то, что часть параметров модели являются управляющими параметрами. Изменяя их значения можно на основании изученных свойств модели делать предсказания поведения системы в дальнейшем и выработать рекомендации по предотвращению критических явлений и достижению системой оптимальных характеристик. Так при изменении управляющих параметров модель показывает переход из некризисной области в область катастроф и наоборот.

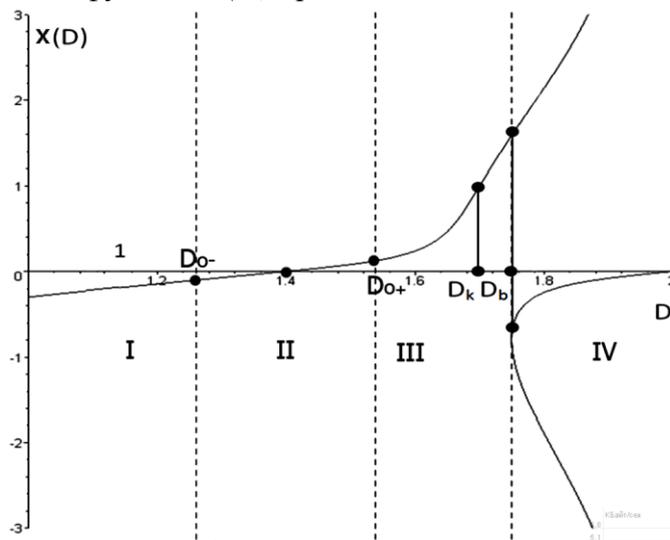
Классификация социально-экономических процессов в модели мультифрактальной динамики

Выше нами были приведены аргументы о возможности использования фрактальной модели с аналитической зависимостью коэффициента $A(D)$, определяемой формулой для описания кризисных социально-экономических процессов [6]. Детально данный вопрос был исследован в нашей статье [7], посвященной изучению валютного кризиса 1998 года и бифуркационных явлений в рамках фрактальной модели.

Использование теории катастроф при исследовании фрактальных моделей кризисных явлений в социально-экономических системах позволяет более глубоко понять структуру этих моделей.

Исключительная важность точки бифуркации D_b прежде всего связана с возможностью перехода системы вблизи этой точки из одного состояния X_1, X_2, X_3 в другое из данного набора состояний резким скачком без изменения D . В данном случае выполняются все признаки катастрофы вблизи точки бифуркации D_b и данный вид катастрофы естественно назвать бифуркационной катастрофой. Точкой катастрофы A_3 являются критические значения $D_k(A(D_k)=0)$ и $\eta=0$. Данная катастрофа происходит при сдвиге параметров D и η из этой точки. Бифуркационная катастрофа же возникает при фиксированных значениях D и η и связана с одновременным наличием нескольких состояний системы. Поскольку бифуркационная катастрофа находится вблизи обычной катастрофы A_3 , то естественно ее называть бифуркационной катастрофой типа A_{3b} . Детально бифуркационная катастрофа A_{3b} была исследована в работе [7], посвященной изучению валютного кризиса 1998 года как бифуркационного явления в рамках

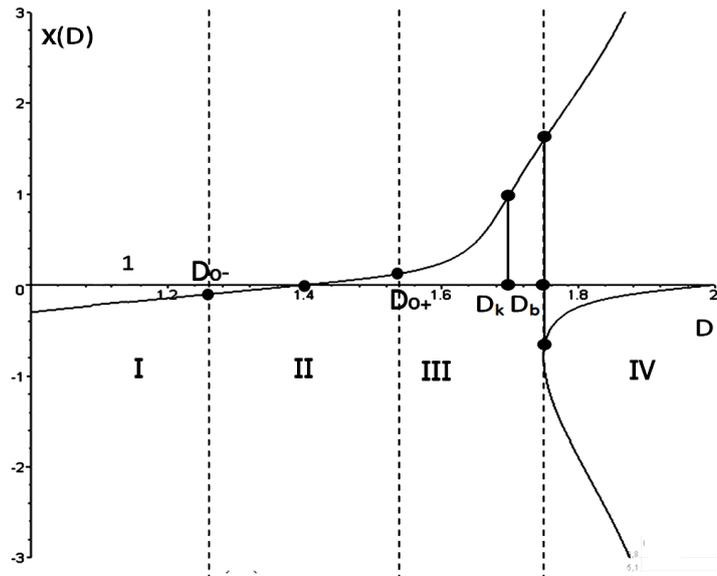
фрактальной модели. Проиллюстрируем вышесказанное графически. График зависимости функции $\zeta(D)$ представлен на *Рис. 1*.



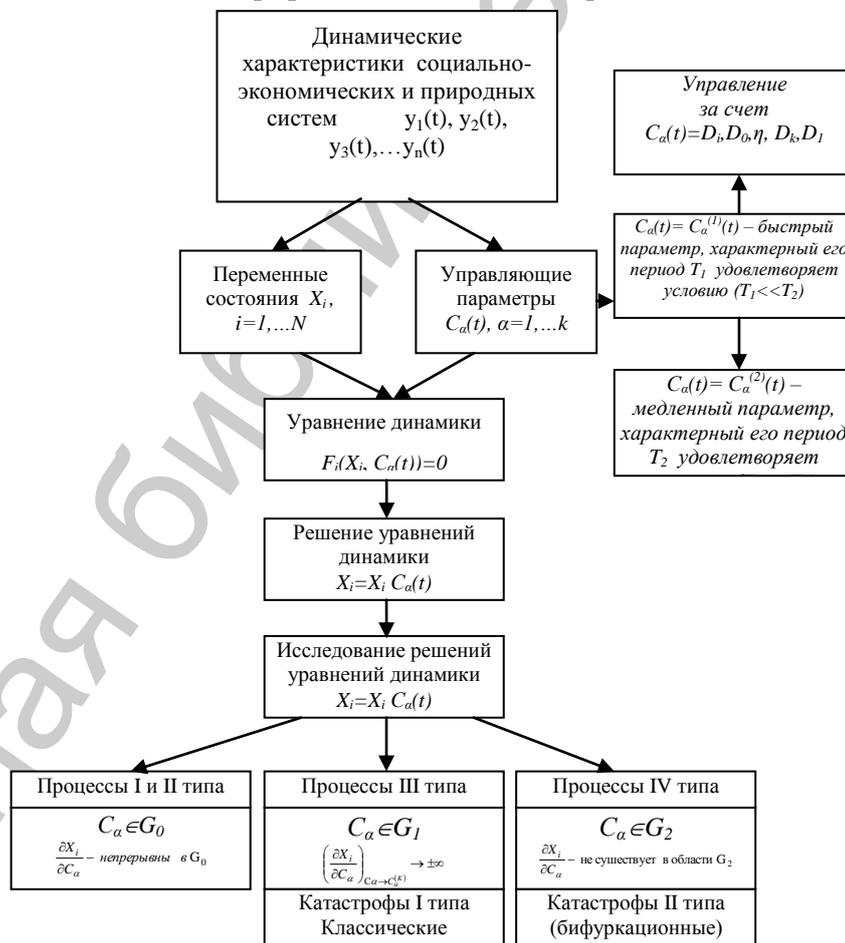
Р и с 1. График зависимости $X(D)$ при $B_k=0,4$

Из *Рис. 1* следует наличие четырех областей значений D , в которых характер течения процесса имеет большие различия. В областях I $1 \leq D \leq D_{0-}$ и IV $D_b < D < 2$ процессы имеют монотонный характер. В них происходит быстрый монотонный рост или убывание параметров системы. Значение величин D_{0+} и D_{0-} можно указать лишь приблизительно. Эти точки отстоят от D_0 примерно на $0,1 - 0,15$ в зависимости от конкретной природы процессов X . Эту область можно назвать осцилляционной, т.к. рост величин сменяет убыванием и наоборот. В области III $D_{0+} \leq D \leq D_b$. При фиксированном значении D имеют место решения X_1, X_2, X_3 . Возникает возможность скачкообразных переходов между этими состояниями, связанная с наличием у системы при фиксированном значении D и η нескольких состояний. И что очень важно, это возможно при $\eta \neq 0$, тогда как в точке катастрофы A_3 параметр $\eta = 0$. Область III является областью бифуркационной катастрофы A_{3b} , в которой без видимых причин внезапно может наступить скачкообразное изменение состояния. Эта область чрезвычайно важна для описания кризисных социально-экономических процессов, которые постоянно возникают в настоящее время. Катастрофы динамики курса рубля в 1998 году и курса евро в конце 2009 и начале 2010 годов имеют несомненно бифуркационный характер. В области IV $D_b < D < 2$ лежит точка D_k , вблизи которой имеет место обычная катастрофа A_3 , поэтому эту область естественно назвать областью катастроф.

Из *Рис. 2* при $B_k < 0$ следует, что области I и II остаются теми же, что для $B_k > 0$. В области III в этом случае $D_b < D < 2$, и в области IV $D_{0+} \leq D \leq D_b$.



Р и с 2. График зависимости $X(D)$ при $B_k = -0,4$



С х е м а 1

В результате классификацию процессов, описываемых мультифрактальными кривыми в зависимости от значения фрактальной размерности D и знака коэффициента B_k можно наглядно представить в виде таблицы (табл. 1).

Таблица 1

$Sign B_k$	I	II	III	IV
+1	$1 < D < D_{0-}$	$D_{0-} < D < D_{0+}$	$D_{0+} < D < D_b$	$D_b < D < 2$
-1	$1 < D < D_{0-}$	$D_{0-} < D < D_{0+}$	$D_b < D < 2$	$D_{0+} < D < D_b$

Значения D_{0+} , D_{0-} , D_0 , B_k , D_b определяются конкретной динамикой каждого из рассматриваемых процессов. Основные моменты развиваемого нами подхода в описании социально-экономических систем представлены выше на схеме 1.

Схема прогноза динамики мультифрактальных систем

Динамика мультифрактальных систем на i -м участке мультифрактальной кривой с фрактальной размерностью D_i динамика функции $y_i(t)$ представлена на схеме 2.

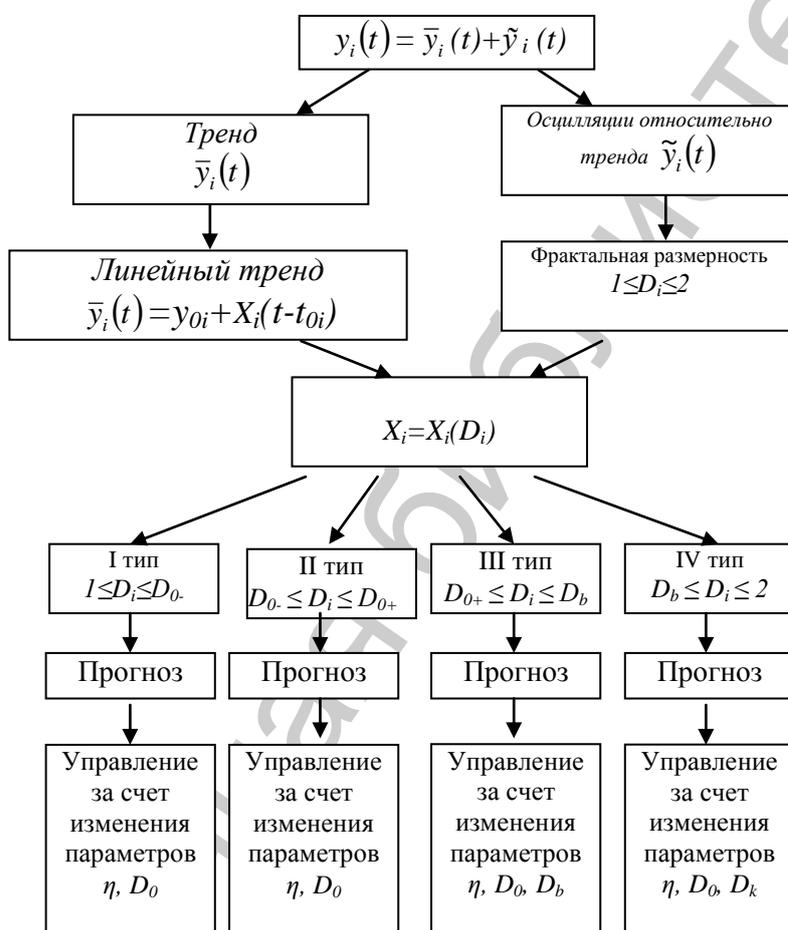


Схема 2

Рассмотрим более подробно вопрос о прогнозах в этой динамике. Все интересующие нас моменты времени можно разделить на две области:

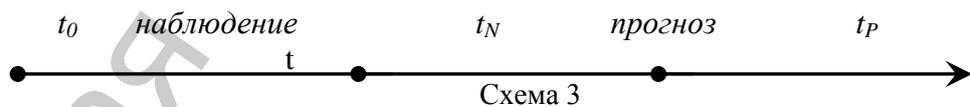
1. *Время, в течение которого ведется наблюдение за системой (t_n);*
2. *Промежуток времени для которого делается прогноз (t_n).*

На основании данных наблюдения за системой в течение времени t_n и разбивая этот промежуток на отдельные периоды T_i , на основании приведенной выше методики, вычисляем значение фрактальной размерности D_i изучаемого процесса, а также значения коэффициентов кусочнолинейного тренда X_i . Находим значения остальных параметров модели – D_0, D_k, η из условия наилучшего приближения опытных данных. На основании полученных результатов и согласно *схеме 2* мы определяем, к какому типу из четырех относится процесс на интересующем нас промежутке T_i . Устанавливаем закономерности поведения фрактальной размерности D_i в течение времени наблюдения за системой t_n и исходя из этих закономерностей даем прогноз поведения значений $D_i^{(n)}$ на время прогноза t_n . Прогнозные значения $D_i^{(n)}$ позволяют на основании уравнения (1) вычислить прогнозные значения $X_i^{(n)}$. Подставляя эти значения в уравнение, определяющее поведение линейного тренда, находим значение $\bar{y}(t^n)$. Тогда прогнозное значение $\bar{y}(t^n)$ оценивается по формуле:

$$y(t^n) = \bar{y}(t^n) \pm \Delta(t^n) \quad (6)$$

При выводе (3) мы предположили, что уклонение от линейного тренда Δ на промежутке времени прогноза t^n будет совпадать со значением Δ на промежутке времени наблюдения t^n .

Приведем конкретную схему прогноза в рамках модели мультифрактальной динамики для процессов I и II типа, для которых применимо линейное приближение. Временную ось от начала времени наблюдения t_0 до момента времени прогноза t_p представим на *схеме 3*. Время конца последнего линейного промежутка наблюдения за системой обозначим t_N



Значения D_i, T_i на наблюдаемом интервале $t \leq t_N$ связаны между собой функционально, поскольку их значения определяются свойствами социально-экономических процессов, протекающих в изучаемой системе. Это математически может быть выражено следующим образом

$$D_i = \phi_i(D_{i-s}), 1 \leq s \leq k_1, 1 \leq i \leq N, k_1 \leq N$$

$$T_i = \psi_i(T_{i-s}), 1 \leq s \leq k_2, 1 \leq i \leq N, k_2 \leq N \quad (7)$$

Конкретный вид функций φ_i, ψ_i определяется структурой социально-экономической системы. В случае, когда существуют \bar{D} и \bar{T} такие, что выполнены условия $|D_i - \bar{D}| \ll \bar{D}, |T_i - \bar{T}| \ll \bar{T}$, то соотношения (7) могут быть представлены в линейном приближении следующим образом.

$$D_i = \sum_{s=1}^{k_1} d_{is} D_{i-s} + d_i \quad T_i = \sum_{s=1}^{k_1} t_{is} T_{i-s} + t_i \quad (8)$$

Параметры d_{is}, t_{is}, d_i, t_i выбираются из наилучшего согласия с наблюдениями на интервале $t \leq t_N$. Если соотношение (7) продолжить в область прогноза $t > t_N, i > N$, то мы получим значение D_i и T_i в области прогноза. Используя их, можно найти прогнозные значения $y(t)$.

Пусть в промежутке времени $t_p - t_N$ последовательно укладывается m промежутков T_N и n промежутков T_{N-1} . Тогда из (1) и (2) и *схемы 3* при условии, что коэффициенты η и D_0 на прогнозном и наблюдаемом промежутке одни и те же, и считая, что соотношения (8) сохраняют свою вид в прогнозной области $t > t_N$ получаем формулу прогноза для $y(t_p)$

$$y(t_p) = \bar{y}(t_N) + m \cdot \eta \cdot (D_0 - D_N) \cdot T_N + n \cdot \eta \cdot (D_0 - D_{N-1}) \cdot T_{N-1} + \eta \cdot (D_0 - D_r) \cdot (t_p - m \cdot T_N - n \cdot T_{N-1}) \pm \Delta \quad (9)$$

где $D_r = D_N$ или D_{N-1} в зависимости от того, на продолжение какого промежутка $N-1$ или N попадает время прогноза t_p , а Δ определяется по промежутку наблюдения.

Заключение

На основе модели мультифрактальной динамики может быть предложена следующая классификация социально-экономических процессов. В зависимости от значения параметров фрактальной модели все процессы делятся на четыре типа: *I тип – монотонные, II – осцилляционные, III – катастрофы классические, IV – катастрофы бифуркационные.*

Получена формула для прогноза динамики кусочно-линейного тренда социально-экономических процессов, когда их характер относится к *I* и *II* типу.

Список литературы

1. Цветков И.В. Управление нефтяными ценами в рамках фрактального подхода // Управление экономическими системами: электронный научный журнал, 2011. – № 2 (26). – № гос. рег. статьи 0421100034.

2. A.N. Kudinov, V.P. Tsvetkov, and I.V. Tsvetkov. Catastrophes in the Multi-Fractal Dynamics of Social-Economic Systems. Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 18, No. 2, 2011, pp. 149–155.
3. Цветков И.В. Теория катастроф и фрактальная модель кризисных социально-экономических процессов// Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. Выпуск №19. – 2010. – С.71-79.
4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 стр.
5. Кудинов А.Н., Цветков В.П., Цветков И.В., Сажина О.И. Фрактальный анализ динамики цен на нефть// Программные продукты и системы. – 2010. – № 1. – С. 10-11.
6. Кудинов А.Н., Сажина О.И., Цветков В.П., Цветков И.В. Анализ цен на нефть в 2009 г. и первой половине 2010 г. и их прогноз на конец 2010 г. в рамках фрактальной модели// Финансы и кредит 38(422) – 2010. – С.21–26.
7. Кудинов А.Н., Цветков В.П., Цветков И.В. Валютный кризис и бифуркационные явления в рамках фрактальной модели// Финансы и кредит. Выпуск 46(326). – 2009. – С. 5–9.
8. A.N. Kudinov, O.I. Krylova, V.P. Tsvetkov, I.V. Tsvetkov Global warming in mathematical model of multifractal dynamics. Russian journal of earth sciences. Vol. 12, ES3001, doi:10.2205/2012ES000510, 2012.

CLASSIFICATION OF SOCIAL AND ECONOMIC PROCESSES IN THE FRAMEWORK OF MULTIFRACTAL DYNAMICS

I.V. Tsvetkov

Tver State University

The department of economics and production management

The article shows the basis of multifractal dynamics and classification of economic processes dynamics within this model. The author represents the formula for a forecast of dynamics of social-economic processes' piecewise linear trend, when their character falls into I and II type.

Keywords: *fractal analysis, multifractal dynamics, oil price, forecast, social-economic process classification.*

Об авторах:

ЦВЕТКОВ Илья Викторович – доктор технических наук, профессор кафедры экономики и управления производством Тверского государственного университета, e-mail: mancu@mail.ru

Научная библиотека ТВГУ