

# МАТЕМАТИКА, СТАТИСТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЭКОНОМИКЕ И УПРАВЛЕНИИ

УДК 338.27: 519.862.6

## **МЕТОДЫ ВЫБОРА ПОСТОЯННОЙ СГЛАЖИВАНИЯ В МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ БРАУНА**

**А.А. Васильев**

Тверской государственной университет, г. Тверь  
*Кафедра математики, статистики и информатики в экономике*

Рассмотрены основные методы выбора постоянной сглаживания в однопараметрической модели прогнозирования Брауна и особенности их применения на практике.

**Ключевые слова:** метод последней точки, метод тестовой последовательности, модель Брауна, оптимальное значение постоянной сглаживания.

### **1. Введение**

Адаптивная однопараметрическая модель Брауна предназначена для прогнозирования стационарных временных рядов на основе простого экспоненциального сглаживания. Одна из форм ее записи для одношагового прогнозирования имеет вид [1, с. 41, 156]:

$$\hat{y}_{t+1} = S_t, \quad S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) S_{t-1}, \quad t = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

где  $\hat{y}_{t+1}$  – прогнозное значение уровня временного ряда показателя  $y$  на момент времени  $(t + 1)$ ;  $S_t$  – экспоненциальная средняя (сглаженное значение временного ряда) на момент времени  $t$ ;  $\alpha$  – постоянная сглаживания (сглаживающая константа);  $y_t$  – фактическое (наблюдавшееся) значение уровня временного ряда показателя  $y$  на момент времени  $t$ .

К основным проблемам применения модели Брауна относятся [2, с. 22-29; 3, с. 94-95]: 1) выбор оптимального значения постоянной сглаживания  $\alpha$ ; 2) выбор начального значения экспоненциальной средней  $S_0$ .

Объектом настоящего исследования является выбор оптимального значения постоянной сглаживания при краткосрочном прогнозировании временных рядов экономических показателей.

### **2. Методы выбора значения постоянной сглаживания в модели Брауна**

Выбор величины постоянной сглаживания  $\alpha$  определяет результаты, и соответственно, точность прогноза [4, с. 145]. В зависимости от значения постоянной сглаживания прогнозные оценки по-разному учитывают влияние исходного ряда наблюдений. Чем больше  $\alpha$ , тем больше вклад последних уровней ряда в формирование прогноза и тем быстрее убывание влияния начальных условий. При малом  $\alpha$  прогнозные оценки учитывают все наблюдения и уменьшение влияния более “старой” информации происходит медленно [4, с. 145].

При  $\alpha = 1$  в соответствии с (1) получим  $S_t = y_t$ ,  $\hat{y}_{t+1} = S_t = y_t$ . Последнее выражение описывает так называемую “наивную” модель прогноза на основе предыдущего уровня ряда, в соответствии с которой прогноз на любой период упреждения равен последнему уровню ряда [5, с. 41]. В этом случае сглаженные и, соответственно, прогнозные значения просто повторяют исходные данные и сглаживания не происходит [6, с. 111].

При  $\alpha = 0$  в соответствии с (1) получим случай полного отсутствия адаптации модели Брауна:  $S_t = S_{t-1}$ ,  $S_0 = y_1$  (при использовании в качестве начального значения экспоненциальной средней  $S_0$  первого уровня ряда  $y_1$ ),  $\hat{y}_{t+1} = S_t = y_1$  [5, с. 42]. В данном случае производится сглаживание в виде прямой линии с ординатой, равной первому уровню ряда  $y_1$  [6, с. 111], то есть прогноз всегда равен  $y_1$ .

Таким образом, с одной стороны, значение  $\alpha$  необходимо увеличивать для учета более новых наблюдений, а, с другой стороны, следует уменьшать для сглаживания случайных отклонений уровней ряда [2, с. 20]. Эти противоречивые требования ставят задачу поиска компромиссного значения  $\alpha$ , оптимизирующего предсказываемые свойства модели [2, с. 20; 7, с. 18].

К основным методам выбора значения постоянной сглаживания в модели Брауна относятся:

- 1) определение постоянной сглаживания из соотношения Брауна;
- 2) определение постоянной сглаживания из соотношения Майера;
- 3) выбор постоянной сглаживания в зависимости от значения автокорреляционной функции прогнозируемого временного ряда;
- 4) выбор постоянной сглаживания в зависимости от значения периода упреждения прогноза;
- 5) выбор постоянной сглаживания исходя из статистических свойств временного ряда;
- 6) выбор постоянной сглаживания экспертом из множества ее возможных значений;
- 7) определение постоянной сглаживания путем оптимизации ее значения на множестве возможных значений с использованием какого-либо показателя точности прогноза.

### **3. Определение значения постоянной сглаживания в модели Брауна из соотношения Брауна**

Соотношение Р. Брауна для приближенной оценки  $\alpha$ , выведенное из условия равенства скользящей и экспоненциальной средней, имеет вид [4, с. 145; 8, с. 66]

$$\alpha = \frac{2}{m+1},$$

где  $m$  - число уровней ряда, для которых динамика ряда считается однородной и устойчивой (период сглаживания).

При выборе значения  $\alpha$  из соотношения Брауна при  $m > 10$  последним  $m$  уровням временного ряда придается около 87% веса [8, с. 66].

При определении  $\alpha$  из соотношения Брауна величина  $m$ , а, следовательно, и  $\alpha$  определяются эмпирически [9, с. 186].

### **4. Определение значения постоянной сглаживания в модели Брауна из соотношения Майера**

Соотношение Р. Майера для приближенной оценки  $\alpha$  имеет вид [4, с. 145]

$$\alpha \approx \frac{\sigma_{\hat{y}}}{\sigma_y},$$

где  $\sigma_{\hat{y}}$  - среднеквадратическая ошибка прогноза уровней ряда с использованием модели Брауна,  $\sigma_y$  - среднеквадратическое отклонение уровней исходного ряда.

Использование соотношения Майера затруднено тем, что достоверно определить  $\sigma_{\hat{y}}$  и  $\sigma_y$  по коротким временным рядам сложно [4, с. 145].

### **5. Выбор значения постоянной сглаживания в модели Брауна в зависимости от значения автокорреляционной функции прогнозируемого временного ряда**

В соответствии с подходом Х. Грюнвальда выбор постоянной сглаживания может быть осуществлен в зависимости от значения автокорреляционной функции прогнозируемого временного ряда. Однако в экономических исследованиях при наличии малого числа наблюдений проведение корреляционного анализа временных рядов затруднено. Поэтому на практике для определения величины  $\alpha$  используют либо характеристики автокорреляционной функции, либо разные эмпирические процедуры [8, с. 66].

Так, зависимость оптимального значения постоянной сглаживания  $\alpha$  при прогнозировании на один шаг вперед временного ряда с автокорреляционной функцией вида  $\rho_k = \rho_1^k$  ( $\rho_1$  - коэффициент автокорреляции при лаге 1,  $k$  - лаг) от коэффициента автокорреляции

при лаге 1, полученная Д.Р. Коксом и Дж.Д. Кохеном, имеет вид [2, с. 26]

$$\alpha_{opt} = \begin{cases} \frac{3\rho_1 - 1}{2\rho_1} & \text{при } \frac{1}{3} < \rho_1 \leq 1; \\ 0 & \text{при } -1 \leq \rho_1 \leq \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (2)$$

Соответствующая оптимальному значению постоянной сглаживания дисперсия ошибки прогноза с использованием модели Брауна равна [2, с. 26]

$$D_{\hat{y}} = \sigma_{\hat{y}}^2 = \begin{cases} \frac{8\rho_1(1-\rho_1)}{(1+\rho_1)^2} \sigma_y^2 & \text{при } \frac{1}{3} < \rho_1 \leq 1; \\ \sigma_y^2 & \text{при } -1 \leq \rho_1 \leq \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (3)$$

Проведенный в [2, с. 26-27] анализ зависимостей (2) и (3) выявил следующее:

1) дисперсия ошибки прогноза  $D_{\hat{y}}$  слабо зависит от  $\alpha$ , поэтому точность прогноза нечувствительна к выбору постоянной сглаживания в окрестности  $\alpha_{opt}$ ;

2) при  $\frac{1}{3} < \rho_1 \leq 1$  экспоненциальная средняя в определенной степени отражает колебания, обусловленные сильной автокорреляцией, при соответствующем выборе значения  $\alpha$ ;

3) при  $-1 \leq \rho_1 \leq \frac{1}{3}$  модель Брауна может прогнозировать только средний уровень, вокруг которого изменяются уровни ряда (в этом случае на практике не следует брать  $\alpha$  слишком малым, иначе модель Брауна будет нечувствительна к изменениям среднего уровня);

4) при  $-1 \leq \rho_1 < 0$  модель Брауна не обладает хорошими предсказательными свойствами (в этом случае дисперсия прогноза будет сравнима с дисперсией уровней ряда только при  $0 \leq \alpha < 0,1 \dots 0,2$ );

5) если данные сильно коррелированы ( $|\rho_1|$  близко к 1) и период упреждения прогноза мал, то сглаживать уровни ряда не следует, а в качестве прогноза целесообразно использовать последнее наблюдение.

#### **6. Выбор значения постоянной сглаживания в модели Брауна в зависимости в зависимости от значения периода упреждения прогноза**

Оптимальное значение  $\alpha$  в общем случае должно зависеть от периода упреждения прогноза [2, с. 25].

Для периода упреждения, равного единице, необходимо использовать большее значение  $\alpha$ . Чем длиннее период упреждения, тем меньшее значение постоянной сглаживания следует выбирать. При таком подходе величина  $\alpha$  может рассматриваться как функция от величины периода упреждения прогноза [8, с. 66].

В [2, с. 25] получены экспериментальная зависимость среднего квадрата ошибки прогноза от величины упреждения прогноза при разных значениях постоянной сглаживания. Однако характер таких зависимостей определяется особенностями конкретного временного ряда и требует специального изучения [2, с. 25].

### 7. Выбор значения постоянной сглаживания в модели Брауна исходя из статистических свойств временного ряда

Зависимость оптимального значения  $\alpha$  от статистических свойств прогнозируемого временного ряда, полученная Д. Матом из условия минимума дисперсии ошибки прогноза временного ряда, имеет вид [2, с. 35]

$$\alpha_{opt} = \frac{\sigma_u}{\sigma_\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2}} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2}, \quad (4)$$

где  $\sigma_u^2$  – дисперсия приращений  $u_t = y_t - y_{t-1}$ ,  $t = 2, 3, \dots$ , уровней временного ряда на каждом шаге (предполагается, что величины  $u_t$  независимы и имеют среднее значение, равное 0);  $\sigma_\varepsilon^2$  – дисперсия случайных независимых отклонений уровней ряда от тренда (шума)  $\varepsilon_t$ , которые имеют среднее значение, равное 0.

Анализ зависимости (4) показывает следующее [2, с. 35]:

1) если дисперсия приращений уровней ряда  $\sigma_u^2$  мала по сравнению с дисперсией шума  $\sigma_\varepsilon^2$ , то значение  $\alpha$  будет близко к 0 (в этом случае прогнозы будут слабо зависеть от новой информации, а низкое значение  $\alpha$  будет обеспечивать хорошую фильтрацию шума);

2) если дисперсия приращений уровней ряда  $\sigma_u^2$  велика по сравнению с дисперсией шума  $\sigma_\varepsilon^2$ , то значение  $\alpha$  будет близко к 1 (в этом случае вес новой информации возрастет).

Если  $\varepsilon_t$  и  $u_t$  коррелированы и  $M(\varepsilon_t u_t) = \sigma_{\varepsilon u}$ ,  $M(\varepsilon_t u_{t'}) = 0$  при  $t \neq t'$ , то выражение (4) примет вид [2, с. 35]

$$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_{\varepsilon u}} \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_{\varepsilon u}} \right)} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_{\varepsilon u}}.$$

## 8. Выбор значения постоянной сглаживания в модели Брауна экспертом

Рекомендации разных авторов по выбору значения постоянной сглаживания приведены в табл. 1.

Таблица 1

**Рекомендации по выбору постоянной сглаживания в модели Брауна**

| Авторы, источник                          | Диапазон возможных значений | Диапазон рекомендуемых значений   | Примечания   |
|---|-----------------------------|---|--|
| Браун Р., [2, с. 25; 8, с. 65; 9, с. 186] | $0 < \alpha \leq 1$         | $0,1 < \alpha < 0,3$  | Этот ничем не обоснованный диапазон рекомендуемых значений некритически повторен в ряде работ [2, с. 25; 8, с. 65], что часто приводило к неудовлетворительным прогнозам [8, с. 65]  |
| Четыркин Е.М., [1, с. 43]                 | $0 < \alpha \leq 1$         | 1. Эксперименты показывают, что практически значения $\alpha$ находятся в диапазоне $0,1 < \alpha < 0,3$ .<br>2. В большинстве случаев хорошие результаты дает $\alpha = 0,1$ . | -  |
| Льюис К.Д., [10, с. 21,22]                | $0 < \alpha < 1$            | $0,05 < \alpha < 0,3$ ; наиболее популярное значение – 0,1  | 1. На практике встречаются модели Брауна с $\alpha > 0,3$ .<br>2. Если более подходящими оказываются значения $\alpha > 0,3$ , то это указывает на нарушение условий стационарности временного ряда, и необходимо применять другие, более сложные модели, описывающие нестационарные временные ряды. |
| Минько А.А., [6, с. 111]                  | $0 < \alpha < 1$            | $0,2 \leq \alpha \leq 0,8$  | -  |

Продолжение табл. 1

| Авторы, источник                                 | Диапазон возможных значений | Диапазон рекомендуемых значений  | Примечания  |
|--|-----------------------------|--|---|
| Лугачев М.И.,<br>Ляпунцов Ю.П.<br>[11, с. 71-72] | $0 < \alpha < 1$            | Некоторые специалисты рекомендуют при достаточно большой дисперсии высокочастотной компоненты не использовать большие значения $\alpha$ , например, больше 0,2   | Для каждого конкретного ряда исследователь должен выбрать свое значение $\alpha$ в зависимости от цели прогнозирования  |
| Лукашин Ю.П.,<br>[2, с. 17,25]                   | $0 < \alpha < 1$            | Наибольшая точность прогнозирования может быть достигнута при любых допустимых значениях $\alpha$  | 1. Величине $\alpha$ следует давать то или иное промежуточное значение между 0 и 1 в зависимости от конкретных свойств динамического ряда.<br>2. Если в результате испытаний обнаружено, что наилучшее значение $\alpha$ близко к 1, то следует проверить обоснованность выбора модели Брауна. Часто к большим значениям $\alpha$ приводит наличие в прогнозируемом ряде ярко выраженных тенденций или сезонных колебаний. В этом случае для получения эффективных прогнозов требуется другая модель. |
| Френкель А.А.,<br>[8, с. 66,69]                  | $0 < \alpha < 1$            | Опыт применения экспоненциального сглаживания для прогнозирования экономических временных рядов показывает, что наибольшая точность прогноза может быть достигнута при любых допустимых значениях $\alpha$ | Проблема выбора оптимального значения постоянной сглаживания $\alpha$ для своего решения требует, прежде всего, четкой постановки задачи и принципиально сводится к оценке точности прогнозов   |

| Авторы, источник                           | Диапазон возможных значений | Диапазон рекомендуемых значений  | Примечания   |
|--|-----------------------------|--|--|
| Светульников С.Г., [12, с. 212; 13, с. 18] | $0 < \alpha < 2$            | $0 < \alpha < 1$ - для прогнозирования эволюционных процессов,<br>$1 \leq \alpha < 2$ - для прогнозирования процессов хаотической динамики [13, с. 25] | Для каждого конкретного ряда значений показателя существует свое, наиболее точно соответствующее особенностям данного ряда оптимальное значение постоянной сглаживания [12, с. 210], которое определяется свойствами прогнозируемого временного ряда [13, с. 25] |

Как видно из табл. 1, диапазон возможных значений постоянной сглаживания в модели Брауна в [12, с. 212; 13, с. 18] расширен с  $0 < \alpha < 1$  до  $0 < \alpha < 2$ , и, соответственно, расширена область применения модели Брауна на случай прогнозирования нестационарных временных рядов. В связи с этим диапазон значений постоянной сглаживания, удовлетворяющий условию  $0 < \alpha < 1$ , назван классическим, а диапазон, удовлетворяющий условию  $1 \leq \alpha < 2$ , – запредельным множеством [13, с. 18]. Когда оптимальное значение постоянной сглаживания находится в классических пределах, модель Брауна может использоваться для прогнозирования достаточно эффективно. Если же оптимальное значение  $\alpha$  оказалось в запредельном множестве, то это свидетельствует о том, что средняя взвешенная в принципе не может использоваться в качестве хорошей оценки прогнозного значения моделируемого процесса [13, с. 25]. В последнем случае следует либо использовать другую модель прогнозирования (например, соответствующую модификацию модели Брауна) при появлении тенденции в развитии прогнозируемого процесса, либо признать отсутствие альтернативы применению модели Брауна с запредельным значением постоянной сглаживания при невозможности описания динамики прогнозируемого процесса сложными эконометрическими моделями из-за перехода данного процесса от эволюционной к хаотической динамике [13, с. 25].

Таким образом, модель Брауна со значением постоянной сглаживания из классического множества значений описывает эволюционные процессы (изменяющиеся, но инерционные), а со значением постоянной сглаживания из запредельного множества –



процессы хаотической динамики (без инерционности изменения тенденций) [13, с. 25].

В связи с расширением диапазона возможных значений постоянной сглаживания с  $0 < \alpha < 1$  до  $0 < \alpha < 2$  следует обратить внимание на следующие обстоятельства.

1. Классический диапазон возможных значений постоянной сглаживания в модели Брауна получен исходя из условия сходимости ряда весов  $\alpha, \alpha(1-\alpha), \alpha(1-\alpha)^2, \alpha(1-\alpha)^3, \dots, \alpha(1-\alpha)^n, \dots$ ,  $n=0,1,2,\dots$ , уровней ряда на основа признака Даламбера и условия равенства суммы этого ряда весов 1, чтобы сглаженное значение ряда  $S_t$  имело смысл взвешенной средней величины [10, с. 21; 12, с. 209].

2. Расширенный диапазон возможных значений постоянной сглаживания в модели Брауна получен исходя только из условия сходимости ряда весов уровней ряда как бесконечной геометрической прогрессии [12, с. 212; 13, с. 17-18], поэтому сглаженное значение ряда  $S_t$  может не иметь смысла взвешенной средней величины.

3. Браун показал, что математические ожидания и дисперсии экспоненциальных средних  $S_t$  и исходных уровней стационарного временного ряда  $y_t$  связаны соотношениями вида [1, с. 42]

$$\begin{aligned} M(S_t) &= M(y_t), \\ D(S_t) &= \frac{\alpha}{2-\alpha} D(y_t). \end{aligned} \quad (5)$$

Так как для классического диапазона возможных значений постоянной сглаживания  $0 < \alpha < 1$ , то  $D(S_t) < D(y_t)$  [2, с. 18]. Следовательно, экспоненциальная средняя  $S_t$  имеет то же математическое ожидание, что и исходный временной ряд, но меньшую дисперсию [2, с. 18].

При этом из соотношения (5) видно, что при  $\alpha$ , близком к 1, дисперсия экспоненциальных средних незначительно отличается от дисперсии уровней временного ряда, а чем меньше  $\alpha$ , тем больше постоянная сглаживания играет роль “фильтра”, поглощающего колебания уровней исходного временного ряда [1, с. 42; 2, с. 19].

4. Для запредельного диапазона возможных значений постоянной сглаживания  $1 \leq \alpha < 2$  будет иметь место соотношение  $D(S_t) \geq D(y_t)$ , то есть экспоненциальная средняя  $S_t$  будет иметь большую дисперсию, чем исходный временной ряд.

В связи с отмеченными обстоятельствами представляется целесообразным исследование точности модели Брауна с запредельными значениями постоянной сглаживания при

прогнозировании реальных временных рядов экономических показателей.

### 9. Определение постоянной сглаживания в модели Брауна путем оптимизации ее значения на множестве возможных значений

В общем случае задача определения оптимального значения постоянной сглаживания в модели Брауна может быть представлена в виде

$$\alpha_{onm} = \underset{\alpha \in A}{arg \ extr} [f(e_t)], \quad (6)$$

где  $A$  – множество возможных значений постоянной сглаживания, например,  $A = \{\alpha: 0 < \alpha < 1\}$  – классическое множество возможных значений постоянной сглаживания,  $A = \{\alpha: 1 \leq \alpha < 2\}$  – запредельное множество возможных значений постоянной сглаживания,  $A = \{\alpha: 0 < \alpha < 2\}$  – расширенное множество возможных значений постоянной сглаживания;  $f(e_t)$  – характеристика точности прогноза, являющаяся функцией абсолютных ошибок прогноза для каждого момента времени  $e_t = \hat{y}_t - y_t$ ,  $t \in T$ ,  $T$  – множество моментов времени, используемых для расчета характеристики точности прогноза.

Обычно множество  $A$  состоит из конечного числа элементов, например,  $A = \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$  для классического множества [14, с. 149].

В качестве характеристик точности прогноза могут быть использованы средний квадрат ошибки (дисперсия ошибки прогноза) (MSE) [8, с. 66; 9, с. 186; 11, с. 71; 13, с. 23; 14, с. 149,152; 15, с. 113], средняя абсолютная ошибка прогноза в процентах (MAPE) [14, с. 152], сумма абсолютных ошибок прогноза [13, с. 23] и другие характеристики, приведенные, например, в [16; 17, с. 29-30].

При использовании в качестве характеристики точности прогноза среднего квадрата ошибки задача (6) примет вид

$$\alpha_{onm} = \underset{\alpha \in A}{arg \ min} [MSE(\alpha)],$$

а при использовании коэффициента детерминации –

$$\alpha_{onm} = \underset{\alpha \in A}{arg \ max} [R^2(\alpha)],$$

Решение задачи (6) определения оптимального значения постоянной сглаживания в модели Брауна для разных характеристик точности прогноза при длинных рядах показателей приводит к получению примерно одинаковых значений  $\alpha_{onm}$  и проблема выбора критерия отбора не возникает [13, с. 24]. При коротких рядах показателей разные характеристики точности приводят к существенно разным решениям задачи (6) [13, с. 24].

Для определения оптимального значения постоянной сглаживания в модели Брауна при решении задачи (6) в зависимости от вида множества  $T$  моментов времени, используемых для расчета характеристики точности прогноза, могут быть использованы:

- 1) метод ретропрогноза;
- 2) метод последней точки;
- 3) метод тестовой последовательности и его модификации.

Метод ретропрогноза заключается [9, с. 186; 13, с. 21-22; 14, с. 149,152]:

- 1) в последовательном вычислении прогнозов для всех уровней ряда при разных значениях  $\alpha$  (с шагом, равным, например, 0,1),  $\alpha \in A$ ;
- 2) в расчете выбранной характеристики точности прогноза для всего временного ряда для каждого значения  $\alpha$ ;
- 3) в выборе для дальнейшего использования в прогнозах значения  $\alpha_{opt}$ , доставляющего экстремум выражению (6).

При реализации данного метода множество моментов времени, используемых для расчета характеристики точности прогноза, имеет вид  $T = \{1, 2, \dots, t\}$ , где  $t$  – момент времени, соответствующий последнему наблюдению уровня ряда.

Метод ретропрогноза с использованием в качестве характеристики точности прогноза среднего квадрата ошибки (MSE) реализован в большинстве статистических пакетов прикладных программ (“Мезозавр”, “SPSS”, “STATISTICA”) [15, с. 113].

Метод последней точки [17, с. 25–26] применительно к выбору оптимального значения постоянной сглаживания в модели Брауна включает следующие этапы:

- 1) формирование обучающей последовательности из всех уровней ряда, кроме последнего;
- 2) последовательное вычисление прогнозов для всех уровней ряда при разных значениях  $\alpha$ ,  $\alpha \in A$ ;
- 3) расчет модуля абсолютной ошибки прогноза  $|e_t| = |\hat{y}_t - y_t|$  в тестовой точке для каждого значения  $\alpha$ ;
- 4) выбор для дальнейшего использования в прогнозах значения  $\alpha_{opt}$ , при котором модуль абсолютной ошибки прогноза в тестовой (последней) точке минимален.

Выражение (6) при реализации метода последней точки имеет вид

$$\alpha_{opt} = \arg \min_{\alpha \in A} |e_t(\alpha)|, t \in T, T = \{t\}.$$

Метод последней точки рекомендуется использовать только при малом количестве уровней ряда (от 3 до 5) [17, с. 26].

Метод тестовой последовательности фиксированной длины [17, с. 26-27] применительно к выбору оптимального значения постоянной сглаживания в модели Брауна включает следующие этапы:

- 1) выделение в финальной части временного ряда тестового участка длиной  $t'$ ;
- 2) последовательное вычисление прогнозов для всех уровней ряда при разных значениях  $\alpha$ ,  $\alpha \in A$ ;
- 3) расчет выбранной характеристики точности прогноза для тестового участка временного ряда для каждого значения  $\alpha$ ;
- 4) выбор для дальнейшего использования в прогнозах значения  $\alpha_{opt}$ , доставляющего экстремум выражению (6).

Выражение (6) при реализации метода тестовой последовательности имеет вид

$$\alpha_{opt} = \arg \underset{\alpha \in A}{extr} [f(e_t)], t \in T, T = \{t - t' + 1, t - t' + 2, \dots, t\}.$$

В качестве тестовой последовательности рекомендуется использовать, например, последнюю треть ряда [11, с. 71] или вторую часть временного ряда [8, с. 66].

Метод тестовой последовательности рекомендуется использовать при количестве уровней ряда, большем 5 [17, с. 27].

#### 10. Выводы

Проведенный анализ методов выбора постоянной сглаживания в модели прогнозирования Брауна и особенностей их применения позволяет сделать следующие выводы.

1. Методы определения оптимального значения постоянной сглаживания, основанные на определении статистических характеристик временных рядов (соотношение Майера, в зависимости от значения автокорреляционной функции временного ряда, исходя из статистических свойств временного ряда, исходя из коэффициента автокорреляции) применимы в случае наличия длинных временных рядов (больше 50 уровней). В случае прогнозирования коротких временных рядов, характерных для решения управленческих и экономических задач, оценить статистические характеристики временных рядов и, соответственно, постоянную сглаживания с достаточной точностью не представляется возможным.

2. Определение постоянной сглаживания из соотношения Брауна основывается на опыте эксперта.

3. Выбор постоянной сглаживания в зависимости от периода упреждения прогноза определяется особенностями конкретного временного ряда и требует специального изучения такой зависимости, что проблематично для коротких временных рядов.

4. Эволюция рекомендаций экспертам по выбору значения постоянной сглаживания прошла путь от указания конкретного

диапазона значений (например,  $0,1 < \alpha < 0,3$ ) до осознания фактов, что, во-первых, для каждого конкретного ряда значений показателя существует свое, наиболее точно соответствующее особенностям данного ряда оптимальное значение постоянной сглаживания, которое определяется свойствами прогнозируемого временного ряда, и, во-вторых, наибольшая точность прогнозирования может быть достигнута при любых допустимых значениях постоянной сглаживания.

5. В результате исследований модели Брауна изменился взгляд на диапазон возможных значений постоянной сглаживания (от классического диапазона вида  $0 < \alpha < 1$  до расширенного диапазона вида  $0 < \alpha < 2$ ). Однако для запредельной части расширенного диапазона вида  $1 \leq \alpha < 2$ , во-первых, сглаженное значение ряда не имеет смысла взвешенной средней величины, а, во-вторых, это сглаженное значение будет иметь большую дисперсию, чем исходный временной ряд в соответствии с теоретически полученным Брауном выражением для дисперсии экспоненциальной средней. Поэтому представляется целесообразным обширное исследование точности модели Брауна с запредельными значениями постоянной сглаживания при прогнозировании реальных временных рядов экономических показателей.

6. В настоящее время основным методом выбора значения постоянной сглаживания является оптимизация этого значения на множестве возможных значений на основе выбранной характеристики точности прогноза (как правило, минимизация среднего квадрата ошибки).

### Список литературы

1. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования: монография. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Статистика, 1977. – 200 с.
2. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.
3. Арженовский С.В. Методы социально-экономического прогнозирования: учеб. пособие. – М.: Дашков и К0; Ростов н/Д: Наука-Спектр, 2009. – 236 с.
4. Рабочая книга по прогнозированию: монография / Редкол.: И.В. Бестужев-Лада (отв. ред.). – М.: Мысль, 1982. – 430 с.
5. Мотышина М.С. Методы социально-экономического прогнозирования: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во СПбУЭФ, 1994. – 114 с.
6. Минько А.А. Прогнозирование в бизнесе с помощью Excel. Просто как дважды два: научно-популярное изд. – М.: Эксмо, 2007. – 208 с.
7. Давнис В.В. Адаптивное прогнозирование: Модели и методы: монография – Воронеж.: Изд-во Воронежского гос. ун-та, 1997. – 196 с.

8. Френкель А.А. Прогнозирование производительности труда: методы и модели: научное изд. – М.: Экономика, 1989. – 214 с.
9. Статистическое моделирование и прогнозирование: учеб. пособие / Г.М. Гамбаров, Н.М. Журавель, Ю.Г. Королев и др.; под ред. А.Г. Гранберга – М.: Финансы и статистика, 1990. – 383 с.
10. Льюис К.Д. Методы прогнозирования экономических показателей: монография / Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 133 с.
11. Лугачев М.И., Ляпунцов Ю.П. Методы социально-экономического прогнозирования: учеб. пособие. – М.: Экономический факультет МГУ; ТЭИС, 1999. – 160 с.
12. Светуных С.Г. Методы маркетинговых исследований: учеб. пособие. – СПб.: ДНК, 2003. – 352 с.
13. Светуных С.Г., Светуных И.С. Методы социально-экономического прогнозирования: учеб. пособие. – Т.2. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2011. – 103 с.
14. Ханк Д.Э., Уичерн Д.У., Райтс А.Дж. Бизнес-прогнозирование: научно-популярное изд. / Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2003. – 656 с.
15. Дуброва Т.А. Прогнозирование социально-экономических процессов: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Маркет ДС, 2010. – 192 с.
16. Васильев А.А. Критерии селекции моделей прогноза (обзор) / Вестник Тверского государственного университета, 2012, №2 (серия “Экономика и управление”, 2012, вып. 13). – С. 133-148.
17. Гибридные модели прогнозирования коротких временных рядов / Л.А. Демидова, А.Н. Пылькин, С.В. Скворцов, Т.С. Скворцова. – М.: Горячая линия – Телеком, 2012. – 208 с.

## THE METHOD OF SELECTING SMOOTHING CONSTANT IN THE FORECASTING MODEL BROWN

**A.A. Vasiliev**

Tver State University, Tver

*The department of mathematics, statistics and informatics in economics*

The article considers the basic methods of selecting the smoothing constant in Brown's one-parameter prediction model and the peculiarities of their application in practice.

**Keywords:** *the method of the last point, the method of the test sequence, Brown's model, the optimal value of the smoothing constant.*

*Об авторе:*

ВАСИЛЬЕВ Александр Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой математики, статистики и информатики в экономике Тверского государственного университета, e-mail: [vasiljev-tvgu@yandex.ru](mailto:vasiljev-tvgu@yandex.ru)