

УДК 574.4:330.1:519.72

К ВОПРОСУ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПРОИЗВОДСТВА ЭНТРОПИИ ПРИ АНАЛИЗЕ ЭКОЛОГО- ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.В.Белоцерковский

Ректор Тверского государственного университета

Н.Е. Сердитова

Тверской государственной университет, г. Тверь

Кафедра экономики и управления производством

Статья посвящена теоретическому обоснованию принципа максимума производства энтропии в неравновесных системах с использованием методов теории информации.

Ключевые слова: метод максимальной энтропии, репродуцируемое поведение, индикатор устойчивости эколого-экономического развития.

THE PROBLEM OF THE USE OF MAXIMAL ENTROPY PRODUCTION PRINCIPLE WHILE ANALYZING ECOLOGICAL AND ECONOMIC SYSTEMS

Belotserkovsky A. V.

Chancellor of Tver State University

Serditova N. E.

The department of enterprise economy of Tver State University

The paper dwells on theoretical reasoning for maximal entropy production principle in non-equilibrium systems using information theory.

Keywords: the method of maximal entropy, reproduced behavior, the indication of stable ecological and economic development.

Многочисленные исследования в разных предметных областях, имеющие дело с моделированием поведения сложных неравновесных систем, в том числе, в экономике, указывают на плодотворность подхода с использованием принципа максимума производства энтропии (МПЭ). Привлекательность оперирования макро-характеристикой вместо анализа бесчисленного множества микро-характеристик и индивидуальных фазовых траекторий очевидна. Один из авторов настоящей статьи разработал индикатор устойчивости эколого-экономического развития, основываясь на МПЭ. Однако чем может

быть оправдано использование принципа МПЭ в эколого-экономических, и вообще, неравновесных системах, с теоретической точки зрения? Эвристическому ответу на этот вопрос и посвящена настоящая статья.

Уже более 100 лет для моделирования и предсказания поведения равновесных систем используется равновесная статистическая механика (РСМ), разработанная Больцманом и Гиббсом [1, С.50. 2, С.316]. Что же касается неравновесных систем, общепринятого подхода к их формальному описанию до сих пор не сложилось. Правда, еще 50 лет назад, сразу после разработки Шэнноновской теории информации, многие указывали на то, что подход Гиббса может служить основой для прогнозирования как равновесного, так и неравновесного поведения [2,С.317-318].

Основа подхода Гиббса в РСМ состоит в максимизации величины $-\sum p_i \ln p_i$ по вероятностям микросостояний p_i при соответствующих внешних ограничениях системы. В свете интерпретации Шэнноном величины $-\sum p_i \ln p_i$ как меры недостающей информации, Джейнс [3, С.228] рассматривал математическую модель Гиббса в РСМ как пример общей формы статистического вывода (максимум энтропии – МЭ), которая могла бы быть распространена на неравновесные системы, а также другие задачи, требующие прогноза при недостаточных данных

В соответствии с предельной теоремой Шэннона, информационная энтропия равна логарифму количества возможных исходов i с пренебрежимой вероятностью p_i (с учетом соотношения

Больцмана $S = k_B \ln W$), т.е. $S_i = \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i$. Это легко видно для

предельных случаев, когда p_i равномерно распределена ($S_i = \ln N$) и имеет острый пик при одном исходе ($S_i = \ln 1 = 0$). В случае НРСМ,

следовательно, $S_i = \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i$ равна логарифму числа

микроскопических фазовых траекторий Γ , имеющих пренебрежимые вероятности p_Γ . Процедура Джейнса сводится к нахождению наиболее вероятной макроскопической истории, т.е. такой, которая могла бы реализоваться через максимальное количество микроскопических траекторий (наиболее широкое распределение p_Γ) и удовлетворяла бы наложенным ограничениям. Соображения здесь аналогичны подсчетам микросостояний Больцмана, только в терминах микроскопических траекторий. Траектории вместо состояний являются центральным моментом в неравновесных системах из-за присутствия ненулевых

макроскопических потоков, чье статистическое описание требует, чтобы мы рассматривали лежащее в основе микроскопическое поведение во времени.

Эквивалентным взглядом на соображения Джейнса с учетом теории информации является признание того, что мы занимаемся предсказанием воспроизводимого макроскопического поведения. В то время как макроскопическое поведение экспериментально воспроизводимо при наложении ограничений, микроскопические траектории Γ невоспроизводимы (поскольку мы не можем настроить систему с точностью до атомов). То, что макроскопическое поведение воспроизводимо при данных ограничениях, означает, что оно является характерным для огромного числа микроскопических траекторий, совместимых с этими ограничениями. Из этого следует, что огромное большинство микроскопических деталей Γ неважно для прогнозирования макроскопических величин. Процедура Джейнса максимизации информационной энтропии зависит от налагаемых ограничений и эффективно игнорирует всю, не относящуюся к делу микроскопическую информацию. Она применима не только к физическим динамическим системам, но и к экономическим и биологическим. При условии, что воспроизводимые стационарные состояния системы могут быть описаны величинами $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$, подчиняющимися локальным законам сохранения с потоками \mathbf{F} и источниками \mathbf{Q}

$$\frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{x}, t)_{\Gamma}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{F}_{\Gamma} + \mathbf{Q}_{\Gamma}, \quad (1)$$

процедура Джейнса ведет к общему результату для распределения вероятностей $p_{\Gamma}(\lambda)$ микроскопических фазовых траекторий Γ (аналогом большого канонического распределения Гиббса), задаваемому уравнениями (2) и (3):

$$p_{\Gamma} = \frac{1}{Z} \exp(-A_{\Gamma}), \quad (2)$$

$$A_{\Gamma}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{\nu} \lambda \cdot (\mathbf{d}_{\Gamma(0)} + \mathbf{d}_{\Gamma(\tau)}) - \frac{\tau}{2} \int_{\nu} (\overline{\mathbf{F}}_{\Gamma} \cdot \nabla \lambda + \lambda \cdot \overline{\mathbf{Q}}_{\Gamma}), \quad (3)$$

в которых обобщенное производство энтропии может быть определено через второй член в уравнении (3). Следствия этого результата, МПЭ и самоорганизующаяся критичность, могут рассматриваться как общие свойства подобных систем.

Возникает вопрос: если метод максимальной энтропии является фундаментальным алгоритмом для статистических выводов, то почему следует ожидать, что он будет каким-либо образом описывать природу? Дело в том, что в приложении к статистической механике метод максимальной энтропии предсказывает такое поведение, которое репродуцируемо отбирается природой при наложенных ограничениях.

Последние состоят из экспериментальных условий (ограничения F или эквивалентно λ) вместе с известными или гипотетическими законами микрофизики, определяющими допустимые микросостояния или траектории в фазовом пространстве (априорная информация C). Очевидно, что одного знания F C должно быть достаточно, чтобы предсказать любой результат, который воспроизводит природа при условиях F C . Это и есть та информация, по которой методом максимальной энтропии строится распределение вероятностей $p(i/F C)$, осреднением по которому получают математические ожидания всех наблюдаемых физических переменных. В менее жесткой задаче оценки F по C условия избыточности физически интерпретируются как требование того, чтобы F_c репродуцируемо отбиралось при условиях C . Со статистической точки зрения репродуцируемое поведение – это наиболее вероятное поведение. Оно репродуцируется именно потому, что является характерным для каждого из подавляющего большинства микросостояний или траекторий, находящихся в согласии с наложенными ограничениями.

Суммируя изложенное, можно сделать вывод, что метод максимальной энтропии – это статистически обоснованный принцип физического отбора, который расширяет представления Больцмана о неравновесных системах. Он предсказывает репродуцируемое (наиболее вероятное) поведение, отбираемое заданными ограничениями. Однако оправдываемость прогнозов метода максимальной энтропии (как это справедливо для равновесной статистической механики) в значительной степени зависит от правильности определения ограничений, которые в действительности существуют в природе. В этом отношении метод максимальной энтропии в значительной степени остается методом проб и ошибок. Неудачи его применения свидетельствуют о наличии неизвестных новых ограничений (новых законов). В то же время, такая задача, как например, анализ устойчивости эколого-экономических систем, где ограничения вполне понятны, использование МПЭ можно считать эвристически оправданным.

1. Сердитова. Н.Е., А.В. Белоцерковский. Моделирование сложных эколого-экономических систем и принцип максимума производства энтропии. – СПб.: РГГМУ.– 2008. – С.49-79.
2. Сердитова Н.Е. Экономика природопользования: эколого-экономическая перспектива: Учеб. пособие – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2009. – С.316-342.
3. Jaynes, E.T. Information Theory and Statistical Mechanics. – Phys. Rev.– 1957.– V. 106. P. 224-246.

Об авторах:

БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ Андрей Владленович – доктор физико-математических наук, профессор, член Президиума координационного совета УМО и НМС высшей школы, ректор Тверского государственного университета, e-mail:

СЕРДИТОВА Наталья Евгеньевна – доцент кафедры экономики и управления производством Тверского государственного университета, e-mail: