

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ТОРООБРАЗНЫХ ТЕЛ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Колдунов В.А.*, Черепанов О.И.**

*Тверской государственный университет

**Томский университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР)

Представлена численная модель расчета НДС и устойчивости оболочек с трехмерных позиций теории упругости ортотропных тел без допущений, свойственных теориям оболочек различных приближений. В основу реализации модели положены соотношения в ортогональной системе координат тороидального типа, позволяющие проводить расчеты оболочек с различной формой срединной поверхности на основании единого алгоритма. Приводится пример численного расчета.

The numerical model making possible to calculate the stress-strain state of shells from three-dimensional positions is represented. Input equations and assumption formulae are constructed on the basis of the theory elasticity of orthotropic bodies with use the orthogonal coordinate system of toroidal type. By using these formulae, it is possible to calculate shells with various forms of their middle surface areas starting from uniform approach and numerical scheme.

Ключевые слова: теория упругости, напряженно-деформированное состояние, устойчивость, вариационные энергетические принципы, оболочки.

Keywords: theory of elasticity, stress-stain state, stability, variational energy principles, shells.

Развитие методов и средств компьютерного конструирования оболочечных конструкций сложной формы с учетом ограничений по прочности и устойчивости остается актуальной задачей механики. Примерами таких элементов конструкций могут служить цилиндрические тела с сечением круглой или эллиптической формы, тороидальные оболочки (далеко не всегда тонкостенные) с эллиптической, овальной или более сложной формой поперечного сечения. Широко используются различные пластины, сферические оболочки (и массивные тела), оболочки с произвольной формой меридиана. Относительно толстостенные тороидальные трубки применяются в качестве чувствительных элементов датчиков давления – трубок Бурдона.

Для расчета напряженно-деформированного состояния и оценки критических нагрузок потери устойчивости тороидальных конструкций развивается подход, основанный на вариационной постановке пространственных (трехмерных) задач прочности и устойчивости [1]. Область, в которой остаются актуальными задачи расчета деформаций таких тел, достаточно обширна: от проблем проектирования относительно небольших измерительных приборов до оценки напряженно-деформированного состояния элементов Земной коры.

Для описания деформации тел вращения нами используется, наряду с декартовой системой $OX_1X_2X_3$, специальная [2, 3] система координат $O\gamma\psi\theta$, удобная для описания тороидальных тел эллиптического сечения, которая показана на рис. 2. Далее эта система называется «тороидальной», хотя такое название закрепилось в литературе за координатной системой более общего вида.

Частные случаи применения специальной системы координат $O\gamma\psi\theta$ иллюстрирует рис. 2. Так, возможны два варианта описания цилиндрических тел (на рис. 2 приведен вариант для расчета кругового цилиндра с осью вращения X_3 и цилиндра эллиптического сечения с осью X_1), тела оживальной формы, сферы с осью вращения X_3 .

1. Формулы пересчета координат и компоненты тензора деформаций Грина в системе координат $O\gamma\psi\theta$. При описании геометрии моделируемых конструкций записи выражений для компонент тензора конечных деформаций Грина будем использовать следующие обозначения. Формулы перехода от координатной системы $OX_1X_2X_3$ к специальной системе $O\gamma\psi\theta$ получаются на основе следующих соображений. Уравнение эллипса (см. рис. 3) в локальной системе Oxy имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Направление осей этой системы выбрано так, что ось Ox совпадает с направлением оси OX_3 , ось Oy направлена против оси OX_2 . Примем, что большая полуось a лежит на оси Ox , малая полуось – на оси Oy (рис. 1-3). Угол между нормалью и осью Ox обозначим символом ψ , и будем отсчитывать от этой оси по направлению движения часовой стрелки (см. рис. 1-3).

Декартовы $OX_1X_2X_3$ и криволинейные $O\gamma\psi\theta$ координаты, как нетрудно установить (подобные соотношения использовались ранее, в частности, в [3,4] для расчета тороидальных оболочек и эллиптических куполов), связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} X_1 &= \rho \cos \theta = [R_0 + (R_2(\psi) + \gamma) \sin \psi] \cos \theta, \\ X_2 &= \rho \sin \theta = [R_0 + (R_2(\psi) + \gamma) \sin \psi] \sin \theta, \\ X_3 &= [R_{22}(\psi) + \gamma] \cos \psi. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь, напомним, приняты следующие обозначения для основных геометрических характеристик эллиптического тора (рис. 1-3):

R_0 – радиус криволинейной оси тора;

$R_{22} = a^2/c$ – локальный радиус кривизны меридиана (нормального сечения трубки);

R_2 – длина отрезка нормали к внутренней поверхности до вертикальной оси сечения трубки, $R_2 = \frac{b^2}{c}$, $R_1 = \frac{a^2 b^2}{c^3}$, $R_{22} = \frac{a^2}{c}$, $c = [a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi]^{1/2}$;

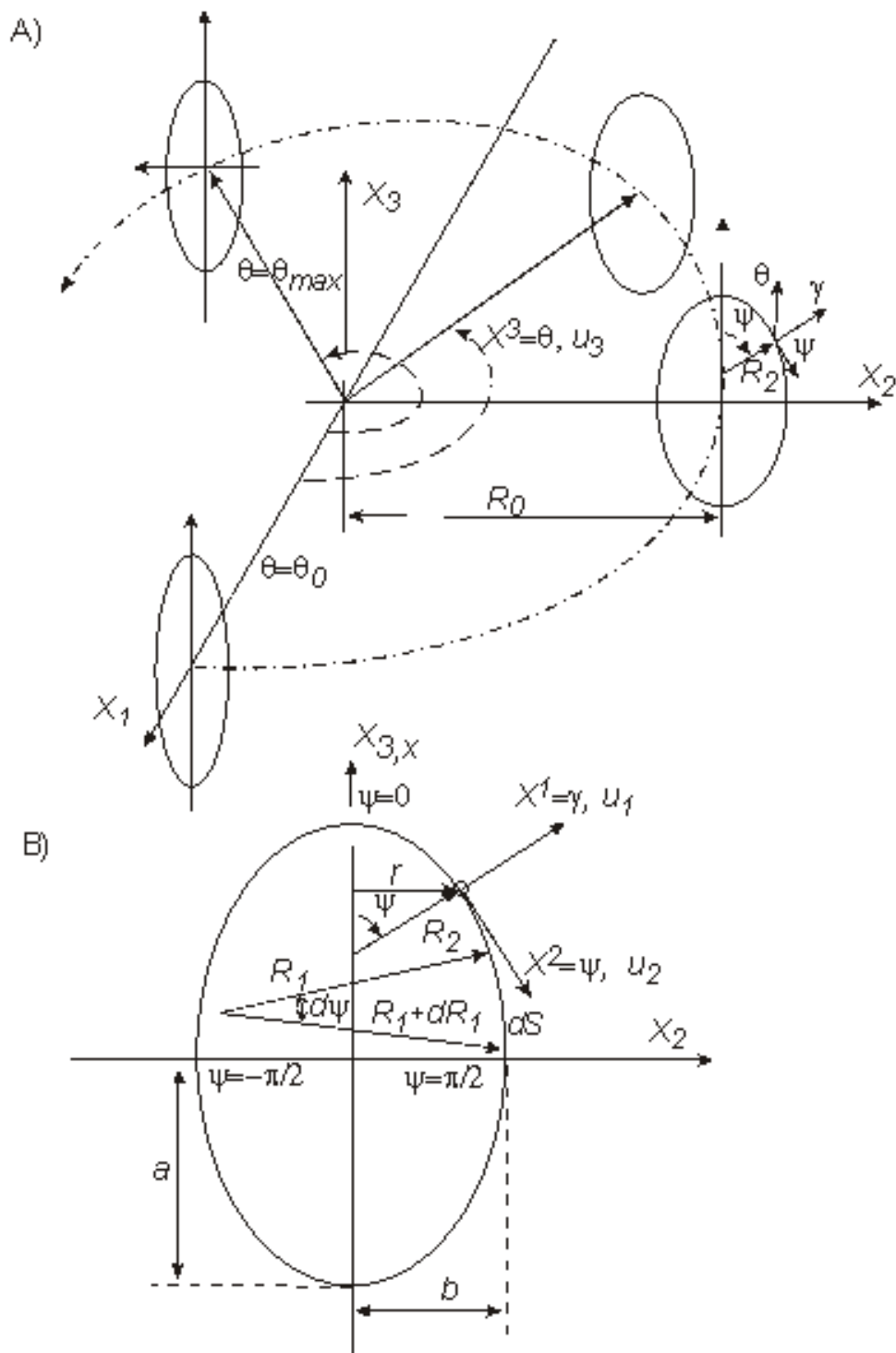


Рис. 1: Декартова $OX_1X_2X_3$ (A) и специальная $O\gamma\psi\theta$ (A,B) системы координат для расчета тора эллиптического сечения.

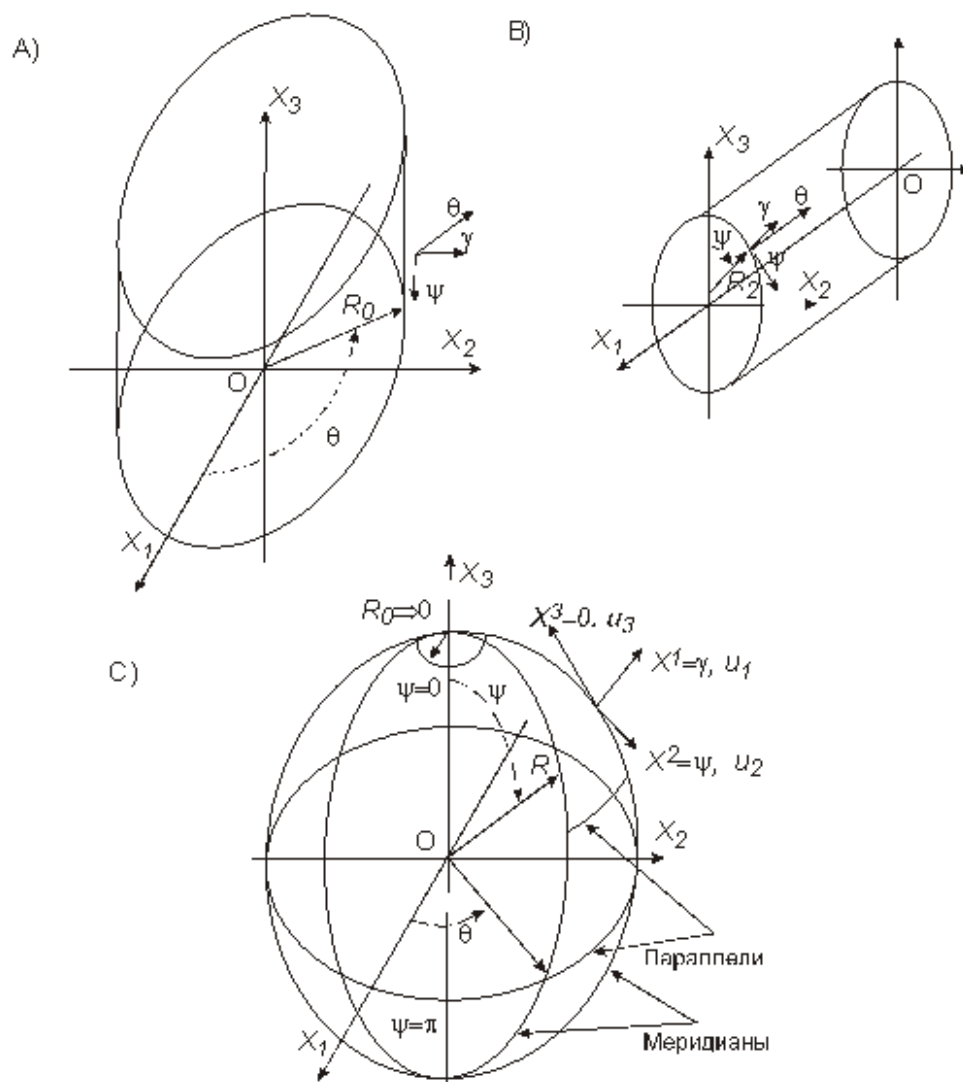


Рис. 2: Частные случаи применения специальной системы координат $O\gamma\psi\theta$ для расчета кругового цилиндра с осью вращения X_3 (A), цилиндра эллиптического сечения с осью симметрии X_1 (B), сферы с осью вращения X_3 (C).

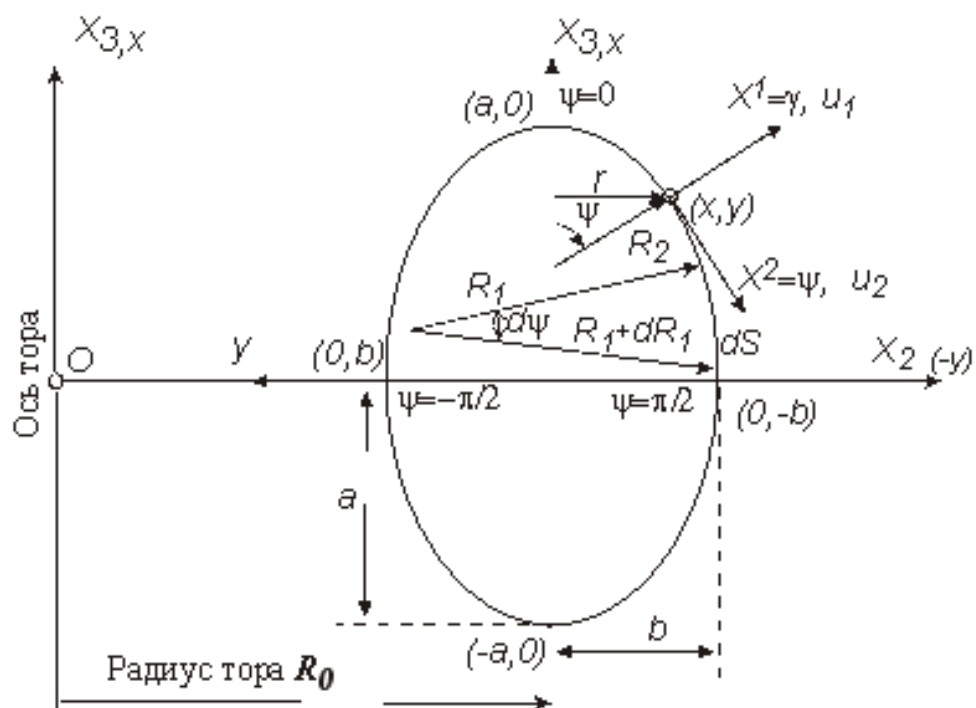


Рис. 3: Схема связи между декартовыми системами координат Oxy , $OX_1X_2X_3$, и специальной [2,3] системой $O\gamma\psi\theta$ для расчета эллиптического тора.

θ - угловая координата, которая определяет положение сечения, ортогонального криволинейной оси тора, и соответствует долготе в сферической системе;

ψ - угловая координата, отсчитываемая вдоль меридиана (аналог широты, но отсчет угла ведется от полюса к экватору);

γ - координата, отсчитываемая от внутренней поверхности трубки вдоль внешней нормали;

a - большая полуось эллиптической трубки;

b - малая полуось эллиптической трубки.

Для квадрата длины линейного элемента в ортогональной системе можно использовать представление через коэффициенты квадратичной формы и компоненты метрического тензор (см., например, [2-7]):

$$dS^2 = H_1^2 d\gamma^2 + H_2^2 d\psi^2 + H_3^2 d\theta^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 \quad (3)$$

Здесь $H_1 = H_1(\gamma, \psi, \theta)$, $H_2 = H_2(\gamma, \psi, \theta)$, $H_3 = H_3(\gamma, \psi, \theta)$ - коэффициенты Ламе, $g_{11} = H_1^2$, $g_{22} = H_2^2$, $g_{33} = H_3^2$ - ковариантные компоненты метрического тензора, а для криволинейных координат γ, ψ, θ приняты также обозначения

$$\gamma = x^1, \quad \psi = x^2, \quad \theta = x^3. \quad (4)$$

Для элементарного объема и площадок, ортогональных осям системы координат, получим соответственно формулы:

$$\begin{aligned} g &= g_{11}g_{22}g_{33} = 1^2(R_1 + x^1)^2 [R_0 + (R_2 + x^1) \sin x^2]^2, \\ dV &= \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 = (R_1 + x^1) [R_0 + (R_2 + x^1) \sin x^2] dx^1 dx^2 dx^3, \\ dS_1 &= (R_1 + x^1) [R_0 + (R_2 + x^1) \sin x^2] dx^2 dx^3, \\ dS_2 &= [R_0 + (R_2 + x^1) \sin x^2] dx^1 dx^3, \\ dS_3 &= (R_1 + x^1) dx^1 dx^2, \\ (R_2 &= \frac{b^2}{c}, R_1 = \frac{a^2 b^2}{c^3}, R_{22} = \frac{a^2}{c}, c = [a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi]^{1/2}). \end{aligned} \quad (5)$$

Для ковариантных компонент e_{ij} тензора конечных деформаций Грина [2, 6, 7] имеют место формулы:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k) = \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + g^{kl} \nabla_i u_l \nabla_j u_k), \\ \nabla_j u_i &= \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - u_\alpha \Gamma_{ij}^\alpha, \end{aligned} \quad (6)$$

где u_α - ковариантные компоненты вектора перемещений, Γ_{ij}^α - символы Кристоффеля второго рода.

Для физических компонент $e_{(ij)}$ тензора деформаций (технология получения этих формул подробно описана, например, в [1, 6, 7]) деформаций имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} e_{(11)} &= \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x^1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_{(1)}}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{(2)}}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{(3)}}{\partial x^1} \right)^2 \right], \\ e_{(22)} &= \frac{1}{(R_1 + x^1)} \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x^2} + \frac{u_{(1)}}{(R_1 + x^1)} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{(R_1 + x^1)} \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x^2} - \frac{u_{(2)}}{(R_1 + x^1)} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{(R_1 + x^1)} \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x^2} + \frac{u_{(1)}}{(R_1 + x^1)} \right)^2 + \left(\frac{1}{(R_1 + x^1)} \frac{\partial u_{(3)}}{\partial x^2} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{(33)} &= \frac{1}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \left(\frac{\partial u_{(3)}}{\partial x^3} + u_{(1)} \sin x^2 + u_{(2)} \cos x^2 \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x^3} - u_{(3)} \frac{\sin x^2}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \right)^2 + \right. \\
 &+ \left(\frac{1}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x^3} - u_{(3)} \frac{\cos x^2}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \right)^2 + \\
 &\left. + \frac{1}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]^2} \left(\frac{\partial u_{(3)}}{\partial x^3} + u_{(1)} \sin x^2 + u_{(2)} \cos x^2 \right)^2 \right], \\
 e_{(12)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_{(2)}}{\partial x^1} + \frac{1}{(R_1+x^1)} \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x^2} - \frac{u_{(2)}}{(R_1+x^1)} + \right. \\
 &+ \left(\frac{\partial u_{(1)}}{\partial x^1} \right) \left(\frac{1}{(R_1+x^1)} \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x^2} - \frac{u_{(2)}}{(R_1+x^1)} \right) + \left(\frac{\partial u_{(2)}}{\partial x^1} \right) \left(\frac{1}{(R_1+x^1)} \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x^2} + \frac{u_{(1)}}{(R_1+x^1)} \right) + \quad (7) \\
 &\left. + \left(\frac{\partial u_{(3)}}{\partial x^1} \right) \left(\frac{1}{(R_1+x^1)} \frac{\partial u_{(3)}}{\partial x^2} \right) \right], \\
 e_{(23)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(R_1+x^1)} \frac{\partial u_{(3)}}{\partial x^2} + \frac{1}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \left(\frac{\partial u_{(2)}}{\partial x^3} - u_{(3)} \cos x^2 \right) + \right. \\
 &+ \frac{1}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \left(\frac{\partial u_{(2)}}{\partial x^3} - u_{(3)} \cos x^2 \right) \times \\
 &\times \left(\frac{1}{(R_1+x^1)} \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x^2} + \frac{1}{(R_1+x^1)} u_{(1)} \right) + \\
 &+ \left(\frac{1}{(R_1+x^1)} \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x^2} - \frac{u_{(2)}}{(R_1+x^1)} \right) \left(\frac{1}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x^3} - \frac{u_{(3)} \sin x^2}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \right) + \\
 &\left. + \left(\frac{1}{(R_1+x^1)} \frac{\partial u_{(3)}}{\partial x^2} \right) \frac{1}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \left(\frac{\partial u_{(3)}}{\partial x^3} + u_{(1)} \sin x^2 + u_{(2)} \cos x^2 \right) \right], \\
 e_{(31)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x^3} - u_{(3)} \frac{\sin x^2}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} + \frac{\partial u_{(3)}}{\partial x^1} + \right. \\
 &+ \left(\frac{1}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x^3} - u_{(3)} \frac{\sin x^2}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \right) \left(\frac{\partial u_{(1)}}{\partial x^1} \right) + \\
 &+ \left(\frac{\partial u_{(2)}}{\partial x^1} \right) \left(\frac{1}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x^3} - u_{(3)} \frac{\cos x^2}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \right) + \\
 &\left. + \left(\frac{\partial u_{(3)}}{\partial x^1} \right) \frac{1}{[R_0+(R_2+x^1)\sin x^2]} \left(\frac{\partial u_{(3)}}{\partial x^3} + u_{(1)} \sin x^2 + u_{(2)} \cos x^2 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Для тензора малых деформаций $\varepsilon_{ij}^{(n)}$, характеризующего деформированное состояние тела на некотором очередном шаге нагружения с номером (n), как это принято, например, в инкрементальной теории пластичности [8], из этих соотношений нетрудно получить следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 2\varepsilon_{11}^{(n)} &= 2 \left\{ \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial S_1} \right\}, \quad 2\varepsilon_{22}^{(n)} = 2 \left\{ K_1 u_1^{(n)} + \frac{\partial}{\partial S_2} u_2^{(n)} \right\}, \\
 2\varepsilon_{33}^{(n)} &= 2 \left\{ S_k u_1^{(n)} + C_k u_2^{(n)} + \frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial S_3} \right\}, \\
 2\varepsilon_{12}^{(n)} &= \left\{ \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial S_2} + \left(\frac{\partial}{\partial S_1} - K_1 \right) u_2^{(n)} \right\}, \quad 2\varepsilon_{23}^{(n)} = \left\{ \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial S_3} + \left(\frac{\partial}{\partial S_2} - C_k \right) u_3^{(n)} \right\}, \quad (8) \\
 2\varepsilon_{31}^{(n)} &= \left\{ \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial S_3} + \left(\frac{\partial}{\partial S_1} - S_k \right) u_3^{(n)} \right\}, \\
 (S_1 &= x^1, \quad S_2 = (R_1 + x_1)x^2, \quad S_3 = [(R_0 + (R_1 + x^1)\sin x^2)]x^3, \\
 dS_1 &= dx^1, \quad dS_2 = (R_1 + x_1)dx^2, \quad dS_3 = [(R_0 + (R_1 + x^1)\sin x^2)]dx^3, \\
 S_k &= \frac{\sin x^2}{[(R_0 + (R_1 + x^1)\sin x^2)], \quad C_k = \frac{\cos x^2}{[(R_0 + (R_1 + x^1)\sin x^2)], \\
 K_1 &= 1/(R_1 + x_1), \quad R_2 = a^2/c, \quad R_{22} = b^2/c, \quad R_1 = a^2b^2/c^3).
 \end{aligned}$$

Здесь и далее в формулах для тензора деформаций подразумеваются физические компоненты этого тензора, вектора перемещений и других величин, независимо от того, использовано в записи верхнее или нижнее расположение индексов.

2. Вариационные уравнения Лагранжа для расчета напряженно-деформированного состояния упругих и упругопластических тел и решения задач устойчивости. Прежде всего, рассмотрим вариационное уравнение Лагранжа, которое выражает принцип виртуальной работы для задач теории упругости и инкрементальной теории пластичности [8]. Процесс деформирования тела представляется как последовательность равновесных состояний $\Omega^{(0)}$, ..., $\Omega^{(n)}$, $\Omega^{(n+1)}$, ... где $\Omega^{(n)}$ - некое актуальное состояние равновесия. Уравнения инкрементальной теории строятся в предположении, что состояние $\Omega^{(n+1)}$ является бесконечно близким к состоянию $\Omega^{(n)}$ и определяющие уравнения можно линеаризовать относительно приращений переменных состояния в окрестности конфигурации $\Omega^{(n)}$. Решение этих уравнений позволяет определить значения переменных в состоянии $\Omega^{(n+1)}$ и продолжить процесс по параметру нагружения. Переход от актуального состояния равновесия $\Omega^{(n)}$ к состоянию $\Omega^{(n+1)}$ описывается вариационным уравнением Лагранжа инкрементальной теории. Оно имеет вид:

$$\begin{aligned} & \iiint_{V^{(n)}} (\sigma_{ij}^E + \Delta^* \sigma_{ij}) \cdot \delta(\Delta^* e_{ij}) \cdot dV - \\ & - \iiint_{V^{(n)}} (\bar{P}_i + \Delta \bar{P}_i) \cdot \delta(\Delta u_i) \cdot dV - \int \int_{S_\sigma^{(n)}} (\bar{R}_i + \Delta \bar{R}_i) \cdot \delta(\Delta u_i) \cdot dS = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где \bar{P}_i , $\Delta \bar{P}_i$, \bar{R}_i , $\Delta \bar{R}_i$ - заданные объемные и поверхностные силы и их приращения на (n+1) шаге нагружения; Δu_i , $\delta(\Delta u_i)$ - приращения компонент вектора перемещений и их вариации; $\Delta \sigma_{ij}^E + \Delta^* \sigma_{ij}$ - модифицированный тензор напряжений Кирхгофа. Таким образом, на (n+1) шаге за исходное состояние принимается состояние $\Omega^{(n)}$. Расчет ведется в переменных Лагранжа. Верхний индекс (n) в уравнении (9) указывает на то, что координаты на (n+1) шаге нагружения связываются с равновесным состоянием, достигнутым системой на предыдущем шаге.

На части боковой поверхности S_u в уравнении (9) заданы ограничения:

$$\Delta u_i = \Delta \bar{u}_i, \quad (10)$$

поэтому здесь вариация перемещений $\delta(\Delta \bar{u}_i) \equiv 0$. На части поверхности S_σ заданы поверхностные силы (граничные условия в напряжениях), которые входят в последний интеграл в уравнении (9).

При проектировании конструкций необходима оценка устойчивости напряженно-деформированного состояния тела [8] под действием нагрузок, которые могут изменять величину и направление действия в процессе деформирования. Следуя работе [8], рассмотрим вариационное уравнение, которое выражает энергетический критерий устойчивости для этих задач, и определяет метод оценки устойчивости некоторой исходной конфигурации деформированного тела $\Omega^{(n)}$. Предполагается, что на некотором этапе с номером (n) процесса нагружения наряду с этой исходной равновесной конфигурацией $\Omega^{(n)}$ тела появляется смежная равновесная конфигурация $\Omega_*^{(n)}$, и возможен внезапный переход к этой новой конфигурации при малых возмущениях внешней нагрузки. Обозначим через $u_\kappa^{(n)}$ перемещения, которые соответствуют переходу системы из состояния $\Omega^{(n-1)}$ в состояние $\Omega^{(n)}$. Если это состояние неустойчиво, то наряду с ним возможен переход в состояние

$\Omega_*^{(n)}$. Перемещения, описывающие возможный переход системы в состояния $\Omega^{(n)}$ или $\Omega_*^{(n)}$ представим в виде:

$$\Delta u_\kappa = u_\kappa^{(n)} + u_\kappa^*. \quad (11)$$

Напряжения, деформации, перемещения, температуру, объемные и поверхностные внешние нагрузки в исходной $\Omega^{(n)}$ и возможной смежной $\Omega_*^{(n)}$ равновесных конфигурациях обозначим символами $\sigma_{ij}^{(n)}$, $e_{ij}^{(n)}$, $u_\kappa^{(n)}$, $T^{(n)}$, $\bar{P}_i^{(n)}$, $\bar{R}_i^{(n)}$ и $\sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^*$, $e_{ij}^{(n)} + e_{ij}^*$, $u_\kappa^{(n)} + u_\kappa^*$, $T^{(n)} + T^*$, $\bar{P}_i^{(n)} + \bar{P}_i^*$, $\bar{R}_i^{(n)} + \bar{R}_i^*$ соответственно. Здесь, как и ранее, индексы i, j будем использовать для нумерации компонент векторов или тензоров.

На основании принципа виртуальной работы (который, как отмечено в [8], «выполняется безотносительно к конкретному виду соотношений напряжения—деформация») в случае конечных деформаций, можно получить вариационное уравнение для смежной формы равновесия. Чтобы записать соответствующее вариационное уравнение, рассмотрим выражение для тензора $(e_{ij}^{(n)} + e_{ij}^*)$ и вариации $\delta(e_{ij}^{(n)} + e_{ij}^*)$. Имеем выражения вида:

$$\begin{aligned} 2(e_{ij}^{(n)} + e_{ij}^*) &= \Delta_{ij}^\kappa u_\kappa^{(n)} + \Delta_{ji}^\kappa u_\kappa^{(n)} + (\Delta_{im}^\alpha u_\alpha^{(n)})(\Delta_{jm}^\beta u_\beta^{(n)}) + \\ &+ \Delta_{ij}^\kappa u_\kappa^* + \Delta_{ji}^\kappa u_\kappa^* + \Delta_{im}^\alpha u_\alpha^*(\Delta_{jm}^\beta u_\beta^*) + \\ &+ (\Delta_{im}^\alpha u_\alpha^{(n)})(\Delta_{jm}^\beta u_\beta^*) + (\Delta_{im}^\alpha u_\alpha^*)(\Delta_{jm}^\beta u_\beta^{(n)}), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} 2\delta(e_{ij}^{(n)} + e_{ij}^*) &= [\delta_{im} + \Delta_{im}^\alpha (u_\alpha^{(n)} + u_\alpha^*)](\Delta_{jm}^\beta \delta u_\beta^{(n)}) + \\ &+ [\delta_{jm} + \Delta_{jm}^\beta (u_\beta^{(n)} + u_\beta^*)](\Delta_{im}^\alpha \delta u_\alpha^{(n)}) + [\delta_{im} + \Delta_{im}^\alpha (u_\alpha^{(n)} + u_\alpha^*)](\Delta_{jm}^\beta \delta u_\beta^*) + \\ &+ [\delta_{jm} + \Delta_{jm}^\beta (u_\beta^{(n)} + u_\beta^*)](\Delta_{im}^\alpha \delta u_\alpha^*). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя эти формулы в вариационное уравнение вида (9), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_{V^{(n)}} \sigma_{ij}^{(n)} \{ [\delta_{im} + \Delta_{im}^\alpha (u_\alpha^{(n)})](\Delta_{jm}^\beta \delta u_\beta^{(n)}) + \\ + [\delta_{jm} + \Delta_{jm}^\beta (u_\beta^{(n)})](\Delta_{im}^\alpha \delta u_\alpha^{(n)}) \} dV - \\ - \iiint_{V^{(n)}} \bar{P}_i^{(n)} \delta(u_i^{(n)}) dV - \int \int_{S_\sigma^{(n)}} \bar{R}_i^{(n)} \delta(u_i^{(n)}) dS = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_{V^{(n)}} \sigma_{ij}^* \{ [\delta_{im} + \Delta_{im}^\alpha (u_\alpha^{(n)} + u_\alpha^*)](\Delta_{jm}^\beta \delta u_\beta^*) + \\ + [\delta_{jm} + \Delta_{jm}^\beta (u_\beta^{(n)} + u_\beta^*)](\Delta_{im}^\alpha \delta u_\alpha^*) \} dV + \\ + \frac{1}{2} \iiint_{V^{(n)}} \sigma_{ij}^{(n)} \{ [\Delta_{im}^\alpha (u_\alpha^*)](\Delta_{jm}^\beta \delta u_\beta^*) + [\Delta_{jm}^\beta (u_\beta^*)](\Delta_{im}^\alpha \delta u_\alpha^*) \} dV + \\ - \iiint_{V^{(n)}} \bar{P}_i^* \delta(u_i^*) dV - \int \int_{S_\sigma^{(n)}} \bar{R}_i^* \delta(u_i^*) dS = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнение (15) целесообразно линеаризовать, по крайней мере, относительно неизвестных u_κ^* . В результате описанных рассуждений, применение вариационного принципа Лагранжа (9) к анализу устойчивости состояния $\Omega^{(n)}$ приводит к следующему вариационному уравнению устойчивости:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \iiint_{V^{(n)}} \sigma_{ij}^* \{ [\delta_{im} + \Delta_{im}^\alpha(u_\alpha^{(n)})] (\Delta_{jm}^\beta \delta u_\beta^*) + \\
& + [\delta_{jm} + \Delta_{jm}^\beta(u_\beta^{(n)})] (\Delta_{im}^\alpha \delta u_\alpha^*) \} dV + \\
& + \frac{1}{2} \iiint_{V^{(n)}} \sigma_{ij}^{(n)} \{ [\Delta_{im}^\alpha(u_\alpha^*)] (\Delta_{jm}^\beta \delta u_\beta^*) + [\Delta_{jm}^\beta(u_\beta^*)] (\Delta_{im}^\alpha \delta u_\alpha^*) \} dV + \\
& - \iiint_{V^{(n)}} \bar{P}_i^* \delta(u_i^*) dV - \int \int_{S_\sigma^{(n)}} \bar{R}_i^* \delta(u_i^*) dS = 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

На части боковой поверхности S_u для компонент вектора перемещений, которые определяют возможную смежную форму равновесия, имеют место ограничения:

$$u_i^* = 0, \Rightarrow \delta u_i^* = 0. \tag{17}$$

Возможна следующая интерпретация выполненных преобразований и их результатов. Величины u_i^* можно рассматривать как вариации смещений $u_i^{(n)}$, так что имеет место равенства:

$$u_i^* = \delta u_i^{(n)}, \quad \delta(u_i^{(n)} + u_i^*) = \delta u_i^{(n)} + \delta u_i^* = \delta u_i^{(n)} + \delta^2 u_i^{(n)}. \tag{18}$$

Тогда уравнения (17) можно рассматривать как условие, при выполнении которого возможна смена знака второй вариации полной потенциальной энергии деформации на некотором шаге нагружения конструкции.

Уравнения (14), (15) – физически и геометрически нелинейные уравнения. Эти уравнения могут быть линеаризованы в результате линеаризации соотношений, определяющих связь между приращениями напряжений и деформаций на очередном шаге по нагрузке, а также за счет линеаризации геометрических соотношений.

Примем, что соотношения между приращениями напряжений и деформаций на очередном шаге нагружения деформируемого тела (как при переходе из состояния равновесия $\Omega^{(n-1)}$ к состоянию $\Omega^{(n)}$, устойчивость которого должна быть проверена, так и для возможного перехода к смежному состоянию равновесия $\Omega_*^{(n)}$) линеаризованы, например, в рамках модели среды с упрочнением и накоплением повреждений [9-11], и представлены одинаковыми соотношениями вида:

$$\Delta^* \sigma_{ij} = C_{ijkl}^* \cdot e_{kl}^{(n)} - \beta_{ij}^* \cdot \Delta T, \tag{19}$$

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijkl}^* \cdot e_{kl}^* - \beta_{ij}^* \cdot \Delta T^*, \tag{20}$$

Формулы (5)-(20) позволяют записать линеаризованное вариационное уравнение (14) в матричной форме, довольно удобной при численной реализации алгоритма расчета напряженно-деформированного состояния на очередном шаге процесса нагружения. При этом достаточно наглядным становится тот факт, что это уравнение распадается на три совместных уравнения, соответствующих трем независимым вариациям компонент вектора перемещений. Уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{V^{(n)}} \left(\vec{U}_1 A \delta \vec{U}_1 + \vec{U}_2 B \delta \vec{U}_1 + \vec{U}_3 C \delta \vec{U}_1 \right) dV + \\
 & + \iiint_{V^{(n)}} \left(\vec{\Sigma}_1, \delta \vec{U}_1 \right) dV - \\
 & - \iiint_{V^{(n)}} \left(P_1^{(n-1)} + \Delta P_1 \right) \delta u_1^{(n)} dV - \int \int_{S_\sigma^{(n)}} \left(R_1^{(n-1)} + \Delta R_1 \right) n_1 \delta u_1^{(n)} dS + \\
 & \iiint_{V^{(n)}} \left(\vec{U}_1 B^T \delta \vec{U}_2 + \vec{U}_2 D \delta \vec{U}_2 + \vec{U}_3 E \delta \vec{U}_2 \right) dV + \\
 & + \iiint_{V^{(n)}} \left(\vec{\Sigma}_2, \delta \vec{U}_2 \right) dV - \\
 & - \iiint_{V^{(n)}} \left(P_2^{(n-1)} + \Delta P_2 \right) \delta u_2^{(n)} dV - \int \int_{S_\sigma^{(n)}} \left(R_2^{(n-1)} + \Delta R_2 \right) n_2 \delta u_2^{(n)} dS + \\
 & \iiint_{V^{(n)}} \left(\vec{U}_1 C^T \delta \vec{U}_3 + \vec{U}_2 E^T \delta \vec{U}_3 + \vec{U}_3 F \delta \vec{U}_3 \right) dV + \\
 & + \iiint_{V^{(n)}} \left(\vec{\Sigma}_3, \delta \vec{U}_3 \right) dV - \\
 & - \iiint_{V^{(n)}} \left(P_3^{(n-1)} + \Delta P_3 \right) \delta u_3^{(n)} dV - \int \int_{S_\sigma^{(n)}} \left(R_3^{(n-1)} + \Delta R_3 \right) n_3 \delta u_3^{(n)} dS = 0,
 \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}
 \vec{U}_i &= \left\{ \left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial S_1} \right), \left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial S_2} \right), \left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial S_3} \right), u_i^{(n)} \right\}, \\
 \delta \vec{U}_i &= \left\{ \left(\frac{\partial \delta u_i^{(n)}}{\partial S_1} \right), \left(\frac{\partial \delta u_i^{(n)}}{\partial S_2} \right), \left(\frac{\partial \delta u_i^{(n)}}{\partial S_3} \right), \delta u_i^{(n)} \right\},
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\vec{\Sigma}_1 = \{ (\sigma_{11}^{(n-1)} - \beta_{11}^* \Delta T), \sigma_{12}^{(n-1)}, \sigma_{31}^{(n-1)},$$

$$[(\sigma_{22}^{(n-1)} - \beta_{22}^* \Delta T) K_1 + (\sigma_{33}^{(n-1)} - \beta_{33}^* \Delta T) S_k] \},$$

$$\vec{\Sigma}_2 = \left\{ \sigma_{12}^{(n-1)}, (\sigma_{22}^{(n-1)} - \beta_{22}^* \Delta T), \sigma_{23}^{(n-1)}, \left[(\sigma_{33}^{(n-1)} - \beta_{33}^* \Delta T) C_k - \sigma_{12}^{(n-1)} K_1 \right] \right\},$$

$$\vec{\Sigma}_3 = \left\{ \sigma_{31}^{(n-1)}, \sigma_{23}^{(n-1)}, (\sigma_{33}^{(n-1)} - \beta_{33}^* \Delta T), \left[-\sigma_{31}^{(n-1)} S_k - \sigma_{23}^{(n-1)} C_k \right] \right\}. \tag{23}$$

Матрицы A, B, C, D, E, F здесь имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} C_{1111}^* & 0 & 0 & K_1 C_{2211}^* + S_k C_{3311}^* \\ 0 & C_{1212}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{3131}^* & 0 \\ K_1 C_{2211}^* + S_k C_{3311}^* & 0 & 0 & K_1^2 C_{2222}^* + 2S_k K_1 C_{3322}^* + S_k^2 C_{3333}^* \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & C_{1212}^* & 0 & 0 \\ C_{1122}^* & 0 & 0 & K_1 C_{2222}^* + S_k C_{3322}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_k C_{1133}^* & -K_1 C_{1212}^* & 0 & S_k C_{3333}^* C_k + K_1 C_{2233}^* C_k \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_{3131}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133}^* & 0 & 0 & S_k C_{3333}^* + K_1 C_{2233}^* \\ 0 & 0 & -S_k C_{3131}^* & 0 \end{pmatrix}, \\
D &= \begin{pmatrix} C_{1212}^* & 0 & 0 & -K_1 C_{1212}^* \\ 0 & C_{2222}^* & 0 & C_k C_{3322}^* \\ 0 & 0 & C_{2323}^* & 0 \\ -K_1 C_{1212}^* & C_k C_{2233}^* & 0 & C_K^2 C_{3333}^* + K_1^2 C_{1212}^* \end{pmatrix}, \\
E &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{2323}^* & 0 \\ 0 & C_{2233}^* & 0 & C_k C_{3333}^* \\ 0 & 0 & -C_k C_{2323}^* & 0 \end{pmatrix}, \\
F &= \begin{pmatrix} C_{3131}^* & 0 & 0 & -S_k C_{3131}^* \\ 0 & C_{2323}^* & 0 & -C_k C_{2323}^* \\ 0 & 0 & C_{3333}^* & 0 \\ -S_k C_{3131}^* & -C_k C_{2323}^* & 0 & C_K^2 C_{2323}^* + S_K^2 C_{3131}^* \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{24}$$

В совершенно аналогичном виде можно представить и вариационное уравнение устойчивости (16) представим в матричной форме записи:

$$\begin{aligned}
& \iiint_{V^{(n)}} \left(\vec{U}_1^* A_\sigma \delta \vec{U}_1^* + \vec{U}_2^* B_\sigma \delta \vec{U}_2^* + \vec{U}_3^* C_\sigma \delta \vec{U}_3^* \right) dV + \\
& + \iiint_{V^{(n)}} \left(\vec{\Sigma}_1^*, \delta \vec{U}_1^* \right) dV - \iiint_{V^{(n)}} P_1^* \delta u_1^* dV - \int \int_{S_\sigma^{(n)}} R_1^* n_1 \delta u_1^* dS + \\
& \iiint_{V^{(n)}} \left(\vec{U}_1^* B_\sigma^T \delta \vec{U}_2^* + \vec{U}_2^* D_\sigma \delta \vec{U}_2^* + \vec{U}_3^* E_\sigma \delta \vec{U}_1^* \right) dV + \\
& + \iiint_{V^{(n)}} \left(\vec{\Sigma}_2^*, \delta \vec{U}_2^* \right) dV - \iiint_{V^{(n)}} P_2^* \delta u_2^* dV - \int \int_{S_\sigma^{(n)}} R_2^* n_2 \delta u_2^* dS + \\
& + \iiint_{V^{(n)}} \left(\vec{U}_1^* C_\sigma^T \delta \vec{U}_3^* + \vec{U}_2^* E_\sigma^T \delta \vec{U}_3^* + \vec{U}_3^* F_\sigma \delta \vec{U}_3^* \right) dV + \\
& + \iiint_{V^{(n)}} \left(\vec{\Sigma}_3^*, \delta \vec{U}_3^* \right) dV - \iiint_{V^{(n)}} P_3^* \delta u_3^* dV - \int \int_{S_\sigma^{(n)}} R_3^* n_3 \delta u_3^* dS = 0,
\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned}
A_\sigma &= A + \Sigma_A, \quad B_\sigma = A + \Sigma_B, \quad C_\sigma = A + \Sigma_C, \\
D_\sigma &= A + \Sigma_D, \quad E_\sigma = A + \Sigma_E, \quad F_\sigma = A + \Sigma_F.
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
\vec{U}_i^* &= \left\{ \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial S_1} \right), \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial S_2} \right), \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial S_3} \right), u_i^* \right\}, \\
\delta \vec{U}_i^* &= \left\{ \left(\frac{\partial \delta u_i^*}{\partial S_1} \right), \left(\frac{\partial \delta u_i^*}{\partial S_2} \right), \left(\frac{\partial \delta u_i^*}{\partial S_3} \right), \delta u_i^* \right\},
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\Sigma}_1^* &= \{ (-\beta_{11}^* \Delta T^*), 0, 0, [(-\beta_{22}^* \Delta T^*) K_1 + (-\beta_{33}^* \Delta T^*) S_k] \}, \\
\vec{\Sigma}_2^* &= \{ 0, (0 - \beta_{22}^* \Delta T^*), 0, [(-\beta_{33}^* \Delta T^*) C_k] \}, \\
\vec{\Sigma}_3^* &= \{ 0, 0, (-\beta_{33}^* \Delta T^*), 0 \}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Матрицы $\Sigma_A, \Sigma_B, \Sigma_C, \Sigma_D, \Sigma_E, \Sigma_F$ определяются формулами:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_A &= \left(\begin{array}{cccc}
 \sigma_{11}^{(n)} + & & & K_1\sigma_{12}^{(n)} + \\
 +\sigma_{12}^{(n)} + & \sigma_{12}^{(n)} & \sigma_{31}^{(n)} & +S_k\sigma_{31}^{(n)} \\
 +\sigma_{31}^{(n)} & & & \\
 \sigma_{12}^{(n)} & \sigma_{22}^{(n)} + & \sigma_{23}^{(n)} & K_1(\sigma_{22}^{(n)} + \sigma_{12}^{(n)}) + \\
 & +\sigma_{12}^{(n)} + & & +(K_1 + S_k)\sigma_{23}^{(n)} \\
 & +\sigma_{23}^{(n)} & & \\
 \sigma_{31}^{(n)} & \sigma_{23}^{(n)} & \sigma_{33}^{(n)} + & S_k\sigma_{33}^{(n)} + S_k\sigma_{31}^{(n)} + \\
 & & +\sigma_{23}^{(n)} + & +(K_1 + S_k)\sigma_{23}^{(n)} \\
 & & +\sigma_{31}^{(n)} & \\
 K_1\sigma_{12}^{(n)} + & K_1(\sigma_{22}^{(n)} + & S_k\sigma_{33}^{(n)} + & \sigma_{22}^{(n)} K_1^2 + S_k^2\sigma_{33}^{(n)} + \\
 +S_k\sigma_{31}^{(n)} & +\sigma_{12}^{(n)}) + & +S_k\sigma_{31}^{(n)} + & +K_1^2\sigma_{12}^{(n)} + S_k^2\sigma_{31}^{(n)} + \\
 & +(K_1 + & +(K_1 + S_k)\sigma_{23}^{(n)} & +(K_1 + S_k)^2\sigma_{23}^{(n)} \\
 & +S_k)\sigma_{23}^{(n)} & &
 \end{array} \right), \\
 \Sigma_B &= \left(\begin{array}{cccc}
 \sigma_{11}^{(n)} + & & & K_1\sigma_{12}^{(n)} + S_k\sigma_{31}^{(n)} \\
 +\sigma_{12}^{(n)} + & \sigma_{12}^{(n)} & \sigma_{31}^{(n)} & \\
 +\sigma_{31}^{(n)} & & & \\
 \sigma_{12}^{(n)} & \sigma_{22}^{(n)} + & \sigma_{23}^{(n)} & K_1\sigma_{22}^{(n)} + \\
 & +\sigma_{12}^{(n)} + & & +K_1\sigma_{12}^{(n)} + \\
 & +\sigma_{23}^{(n)} & & +(K_1 + S_k)\sigma_{23}^{(n)} \\
 \sigma_{31}^{(n)} & \sigma_{23}^{(n)} & \sigma_{33}^{(n)} + & S_k\sigma_{33}^{(n)} + \\
 & & +\sigma_{23}^{(n)} + & +(K_1 + S_k)\sigma_{23}^{(n)} + \\
 & & +\sigma_{31}^{(n)} & +S_k\sigma_{31}^{(n)} \\
 -K_1\sigma_{12}^{(n)} - & -K_1\sigma_{22}^{(n)} - & C_k\sigma_{33}^{(n)} + & -K_1^2\sigma_{22}^{(n)} + \\
 -E_k\sigma_{12}^{(n)} + & -K_1\sigma_{12}^{(n)} + & +C_k\sigma_{31}^{(n)} + & +C_k S_k\sigma_{33}^{(n)} - K_1^2\sigma_{12}^{(n)} + \\
 +C_k\sigma_{31}^{(n)} & +(C_k - K_1)\sigma_{23}^{(n)} & (C_k - K_1)\sigma_{23}^{(n)} & +(K_1 + S_k) \times \\
 & & & \times (C_k - K_1)\sigma_{23}^{(n)} + \\
 & & & +C_k S_k\sigma_{31}^{(n)}
 \end{array} \right), \\
 \Sigma_C &= \left(\begin{array}{cccc}
 \sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{12}^{(n)} + & & & K_1\sigma_{12}^{(n)} + \\
 +\sigma_{31}^{(n)} & \sigma_{12}^{(n)} & \sigma_{31}^{(n)} & +S_k\sigma_{31}^{(n)} \\
 & & & \\
 \sigma_{12}^{(n)} & \sigma_{22}^{(n)} + & \sigma_{23}^{(n)} & K_1\sigma_{22}^{(n)} + \\
 & +\sigma_{12}^{(n)} + & & +K_1\sigma_{12}^{(n)} + \\
 & +\sigma_{23}^{(n)} & & +(S_k + K_1)\sigma_{23}^{(n)} \\
 \sigma_{31}^{(n)} & \sigma_{23}^{(n)} & \sigma_{33}^{(n)} + & S_k\sigma_{33}^{(n)} + \\
 & & +\sigma_{23}^{(n)} + & +(K_1 + \\
 & & +\sigma_{31}^{(n)} & +S_k)\sigma_{23}^{(n)} + \\
 & & & +S_k\sigma_{31}^{(n)} \\
 (-S_k - & (-S_k - & (-S_k - C_k)\sigma_{33}^{(n)} + & -S_k^2\sigma_{33}^{(n)} - \\
 -C_k)\sigma_{31}^{(n)} & -C_k)\sigma_{23}^{(n)} & +(-S_k - & -C_k S_k\sigma_{33}^{(n)} + \\
 & & -C_k)\sigma_{23}^{(n)} + & +(-S_k - C_k) \times \\
 & & +(-S_k - & \times (K_1 + S_k)\sigma_{23}^{(n)} + \\
 & & -C_k)\sigma_{31}^{(n)} & +S_k(-S_k - C_k)\sigma_{31}^{(n)}
 \end{array} \right) \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\Sigma_D = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{12}^{(n)} + \sigma_{31}^{(n)} & \sigma_{12}^{(n)} & \sigma_{31}^{(n)} & -K_1 \sigma_{12}^{(n)} + C_k \sigma_{31}^{(n)} \\ \sigma_{12}^{(n)} & \sigma_{22}^{(n)} + \sigma_{12}^{(n)} + \sigma_{23}^{(n)} & \sigma_{23}^{(n)} & -K_1 \sigma_{22}^{(n)} - K_1 \sigma_{12}^{(n)} + (C_k - K_1) \sigma_{23}^{(n)} \\ \sigma_{31}^{(n)} & \sigma_{23}^{(n)} & \sigma_{33}^{(n)} + \sigma_{23}^{(n)} + \sigma_{31}^{(n)} & C_k \sigma_{33}^{(n)} + C_k \sigma_{31}^{(n)} + (C_k - K_1) \sigma_{23}^{(n)} \\ -K_1 \sigma_{12}^{(n)} + C_k \sigma_{31}^{(n)} & -K_1 \sigma_{22}^{(n)} - K_1 \sigma_{12}^{(n)} + (C_k - K_1) \sigma_{23}^{(n)} & C_k \sigma_{33}^{(n)} + (C_k - K_1) \sigma_{23}^{(n)} + C_k \sigma_{31}^{(n)} & (K_1)^2 \sigma_{22}^{(n)} + C_k^2 \sigma_{33}^{(n)} + C_k^2 \sigma_{31}^{(n)} + (K_1)^2 \sigma_{12}^{(n)} + (C_k - K_1)^2 \sigma_{23}^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_E = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{12}^{(n)} + \sigma_{31}^{(n)} & \sigma_{12}^{(n)} & \sigma_{31}^{(n)} & -K_1 \sigma_{12}^{(n)} + C_k \sigma_{31}^{(n)} \\ \sigma_{12}^{(n)} & \sigma_{22}^{(n)} + \sigma_{12}^{(n)} + \sigma_{23}^{(n)} & \sigma_{23}^{(n)} & -K_1 \sigma_{22}^{(n)} \sigma_{22}^{(n)} - K_1 \sigma_{12}^{(n)} + (C_k - K_1) \sigma_{23}^{(n)} \\ \sigma_{31}^{(n)} & \sigma_{23}^{(n)} & \sigma_{33}^{(n)} + \sigma_{23}^{(n)} + \sigma_{31}^{(n)} & C_k \sigma_{33}^{(n)} + C_k \sigma_{31}^{(n)} + (C_k - K_1) \sigma_{23}^{(n)} \\ (-S_k - C_k) \sigma_{31}^{(n)} & (-S_k - C_k) \sigma_{23}^{(n)} & (-S_k - C_k) \sigma_{33}^{(n)} + (-S_k - C_k) \sigma_{23}^{(n)} + (-S_k - C_k) \sigma_{31}^{(n)} & -C_k S_k \sigma_{33}^{(n)} - C_k^2 \sigma_{33}^{(n)} + (C_k - K_1) \times (-S_k - C_k) \sigma_{23}^{(n)} + C_k (-S_k - C_k) \sigma_{31}^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_F = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{12}^{(n)} + \sigma_{31}^{(n)} & \sigma_{12}^{(n)} & \sigma_{31}^{(n)} & (-S_k - C_k) \sigma_{31}^{(n)} \\ \sigma_{12}^{(n)} & \sigma_{22}^{(n)} + \sigma_{12}^{(n)} + \sigma_{23}^{(n)} & \sigma_{23}^{(n)} & (-S_k - C_k) \sigma_{23}^{(n)} \\ \sigma_{31}^{(n)} & \sigma_{23}^{(n)} & \sigma_{33}^{(n)} + \sigma_{23}^{(n)} + \sigma_{31}^{(n)} & (-S_k - C_k) \sigma_{33}^{(n)} + (-S_k - C_k) \sigma_{23}^{(n)} + (-S_k - C_k) \sigma_{31}^{(n)} \\ (-S_k - C_k) \sigma_{31}^{(n)} & (-S_k - C_k) \sigma_{23}^{(n)} & (-S_k - C_k) \sigma_{33}^{(n)} + (-S_k - C_k) \sigma_{23}^{(n)} + (-S_k - C_k) \sigma_{31}^{(n)} & (C_k + S_k)^2 \sigma_{33}^{(n)} + (S_k + C_k)^2 \sigma_{23}^{(n)} + (S_k + C_k)^2 \sigma_{31}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Рассмотренное сведение задачи устойчивости к решению вариационного уравнения вида (25) по сути представляет собой вариант оценки устойчивости конструкции на основе критерия Брайана [12].

3. Некоторые результаты численных расчетов напряженно-деформированного состояния и устойчивости упругих конструкций. Для численного решения (21), (25) применительно к задачам расчета оболочечных конструкций использован вариационно-разностный метод и межэлементные аппроксимирующие соотношения для пространственных производных [1, 13, 14]. На этой основе разработаны программы численного моделирования деформации и оценки устойчивости различных конструкций, в частности, гофрированных мембран [15], других оболочечных конструкций. Выполнен довольно значительный объем тестовых расчетов как для конструкций относительно простых очертаний, так и конструкций более сложных форм. Например, выполнены расчеты напряженно-деформированного состояния для сравнения с известными в литературе расчетными и экспериментальными данными по деформации трубчатых пружин (трубок Бурдона [16, 17]), которые показывают удовлетворительную точность разработанных алгоритмов расчета сложных конструкций и их пригодность для проектирования упругих элементов измерительных приборов.

В качестве примера решения задач упругой устойчивости можно привести сравнение с результатами классического эксперимента Р. С. Теннисона по устойчивости цилиндрической оболочки [18]. Рассматривалась изотропная цилиндрическая оболочка ($L=0,412$ м, радиус $R=0,106$ м, толщина $h=0,000685$ м) при осевом сжатии. Классическая теория в этом случае предсказывает значения критического сжимающего напряжения $\sigma_{cr}^A = 0,605 E \frac{h}{R} = 790$ МПа (при $E=200$ ГПа, $\nu=0,3$). Численное решение задачи в трехмерной постановке дает значение критической нагрузки $\sigma_{cr}^P = 744$ и $\omega^{*P} = \frac{\sigma_{cr}^P}{\sigma_{cr}^A} = 0,94$, что хорошо согласуется с решения А. В. Кармишина и др. [3]. Р.С. Теннисон в многочисленных экспериментах получил значения $\omega^* \geq 0,90$. Таким образом, имеет место хорошее количественное совпадение критических нагрузок, найденных экспериментально, аналитическими и численными методами. Результаты расчета смежной формы равновесия при потере устойчивости показаны на рис. 4.

Список литературы

- [1] Колдунов В.А., Кудинов А.Н., Люкшин П.А., Мударисов Ш.Ш., Черепанов О.И. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций с учетом анизотропии на основании пространственной численной схемы расчета. // В кн.: 13 Всесоюзная конференция "Теория пластин и оболочек". - Ч. 3. - Таллин, 1983, - с. 55-60.
- [2] С.П. Демидов. Теория упругости. - М.: Высшая школа, 1972. - 432 с.
- [3] А.В. Кармишин, В.А. Лясковец, В.И. Мяченков, А.Н. Фролов. Статика и динамика Тонкостенных оболочек. - М.: Машиностроение, 1975. - 376 с.
- [4] С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. Пер. с англ. под ред. Г.С.Шапиро. Изд. 2-е, стереотипное. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. - 636 с.

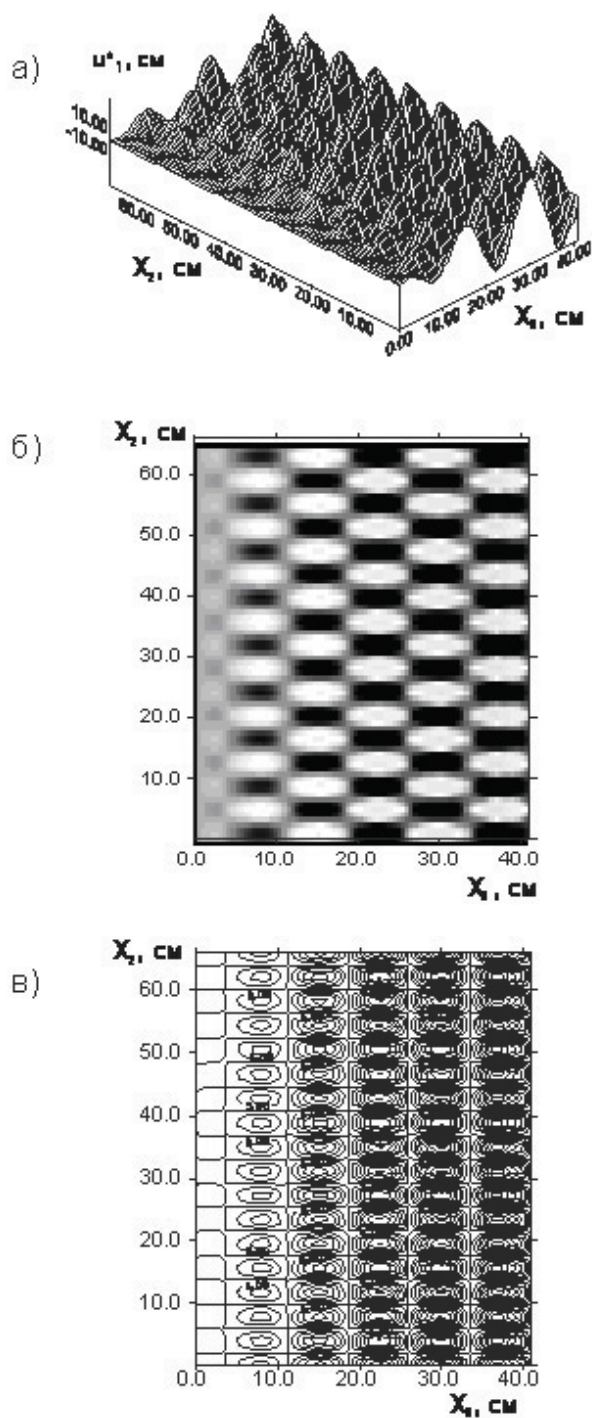


Рис. 4: Потеря устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии: форма (а), теневой рельеф (б) и карта изолиний прогиба (в) поверхности ($X_2 = R\varphi$ — окружная, X_3 — осевая координаты).

- [5] С.А. Амбарцумян. Теория анизотропных оболочек. - М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961. - 384 с.
- [6] Дж. Оден. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. - М.: Мир, 1976. - 474 с.
- [7] В.Н. Ионов, П.М. Огибалов. Прочность пространственных элементов конструкций. Ч.1. Основы механики сплошной среды: Учеб. Пособие для студентов вузов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. школа, 1979. - 384 с.
- [8] К. Васидзу. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. -М.: Мир,-1987.-542 с.
- [9] Драгон А., Мруз З. Континуальная модель пластически-хрупкого поведения скальных пород и бетона. - В кн.: Механика деформируемых твердых тел. - М.: - Мир, 1983, с. 163-188.
- [10] Черепанов О.И. Численное моделирование деформации материалов с учетом неустойчивой ветви $\sigma - \varepsilon$ -диаграммы. // Физическая мезомеханика. Т.2, № 1-2, 1999, с. 5-16.
- [11] Черепанов О.И., Прибытков Г.А. Численное исследование упругопластических деформаций металлокерамики при закалке // Физическая мезомеханика. Т.3, № 4, 2000, с. 33-49.
- [12] Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. — М.: Машиностроение, 1978. — 312 с.
- [13] Колдунов В.А., Черепанов О.И. Численный алгоритм расчета устойчивости оболочечных конструкций // Сб. научных трудов «Устойчивость, пластичность, ползучесть при сложном нагружении», - Вып. II, Тверь: Изд-во Тверск. гос. техн. ун-та, 2000. - С. 108-114.
- [14] Колдунов В.А., Черепанов О.И. Моделирование и расчет упругопластических деформаций при неоднородности мезоструктуры материала и нестационарности температурных воздействий// Сб. Сложные системы: моделирование и оптимизация. Тверь: Изд-во Тверск. гос. техн. ун-та, 2001. - С. 129-141.
- [15] О.И. Черепанов, Д.И. Одинцов, А.А. Светлаков, Ю.Г. Свинолупов. Метод расчета и АРМ для проектирования гофрированной мембраны. // Приборы. №5(47), 2004. - С. 41-44.
- [16] Л.Е. Андреева. Упругие элементы приборов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1981. — 392 с.
- [17] Справочник конструктора точного приборостроения. / Под ред. д-ра техн. наук проф. Ф.Л. Литвина. — Москва, Ленинград: Машиностроение, 1964. — 943 с.
- [18] Tennyson R.C. A note on the classical buckling load of circular cylindrical shells under axial compression. — AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 2, pp. 475-476.