

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА ОСНОВЕ ИЗМЕРЕНИЯ ДЛИН ГРАФИКОВ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В РАЗЛИЧНЫХ ВРЕМЕННЫХ МАСШТАБАХ

Гуляева О.С., Цветков И.В.

Тверской государственный университет

В данной статье рассматривается предлагаемая авторами методика определения фрактальной размерности временных рядов. Описанная в статье методика позволяет определить фрактальную размерность временного ряда экономических величин для последующего анализа динамики и прогнозирования.

In given article the technique of definition offered by authors of fractal dimensions of time series is considered. The technique described in article allows to determine of fractal dimension of timeseries of some economic sizes for the subsequent analysis of dynamics and predicting.

Ключевые слова: экономический процесс, временной ряд, фрактальный анализ, фрактальная размерность, кризис, предсказание.

Keywords: economic process, time series, fractal analysis, financial crisis, fractal dimension, prediction.

Метод измерения длин временных рядов базируется на широко известном свойстве фрактальных кривых – инвариантности по отношению к масштабу. То есть с увеличением масштаба, в котором мы рассматриваем объект, растет и измеренная длина кривой. Для чистых фракталов такая зависимость является степенной, где показателем служит фрактальная размерность. Соответственно, чем более линейной является зависимость в дважды логарифмических координатах длины от временного масштаба, тем ближе объект к фракталу.

Метод, использованный нами при определении фрактальной размерности, состоит в измерении длины временных кривых в различных временных масштабах. Для фрактальных кривых имеет место формула, определяющая зависимость ее длины L от масштаба измерения δ :

$$L(\delta) = L_0 \delta^{1-D} \quad (1)$$

где $\delta = \frac{\delta t}{T}$ – безразмерный масштаб усреднения опытных данных, t – время, D – фрактальная размерность временного ряда, T – временной интервал усреднения, L_0 – длина кривой при $D=1$.

Из (1) следует, что длина фрактальной временной кривой существенно зависит при $D \neq 0$ от масштаба усреднения δ , и чем значительнее отклонение D от 1, тем значительнее эта зависимость.

Логарифмируя L получаем

$$\ln L(\delta) = \ln L_-(D - 1) \ln \delta. \quad (2)$$

Если динамический процесс описывается точно фрактальной временной кривой, то график функции (2) будет прямой линией. Уклонение реальной кривой от (2) будет мерой точности аппроксимации реального множества опытных данных фракталом. В данном случае на рассматриваемых временных интервалах определения выполняется условие $\frac{\Delta D}{D} \leq 0,1$, что указывает на достаточно высокую точность развиваемой фрактальной модели, описывающей динамику курсов валют.

Применение данного метода для анализа индекса Доу-Джонс было подробно описано нами в работе [1]. Существенное отличие предлагаемого ниже метода от метода анализа индекса Доу-Джонс заключается в построении графиков усреднения исходных данных. Ранее предлагалось для усреднения вычислять среднее арифметическое сначала пар, затем троек, затем четверок и так далее чисел, что приводило к получению на графике *Усреднение в* одного значения вместо шести по сравнению с исходными данными линии временной кривой. Это приводило к тому, что при вычислении длины одного участка ломаной линии между точками данных на графике *Усреднение в* участвуют 12 усредненных значений исходного графика, что соответственно накладывало на анализ временной кривой ограничения по минимальной длительности временного интервала и он составлял не менее 48...60 торговых дней. В предложенном методе удалось существенно (в четыре-пять раз) снизить эти ограничения. Минимальной длительности временного интервала составила 12...15 торговых дней вследствие того, что график *Усреднение в* строится с использованием не шестерок, а троек значений исходного графика.

Рассмотрим предложенный нами метод определения фрактальной размерности на основе измерения длин временных рядов более подробно (на примере статистических данных курс пары рубль/доллар за апрель-май 2007 года).

Сначала измеряется длина каждого участка ломаной линии между точками исходных данных на графике. Для этого используется известная из школьного курса геометрии теорема Пифагора: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов. В данном случае (Рис. 1) гипотенуза – это участок ломанной линии между точками исходных данных на графике (на рисунке показана синим цветом), а катетами являются отрезки, один из которых равен курсовой разнице i -го и $i + 1$ -го значения курса пары рубль/доллар (на рисунке показан красным цветом), а другой равен разности i -го и $i + 1$ -го значения оси временного масштаба (на рисунке показан зеленым цветом).

Следовательно, длина каждого участка ломаной линии (L_i) между точками исходных данных на графике будет вычисляться по формуле:

$$L_i = \sqrt{(R_i - R_{i+1})^2 + (T_i - T_{i+1})^2}, \quad (3)$$

где:

- R_i – текущее значение курса,
- R_{i+1} – следующее значение курса,

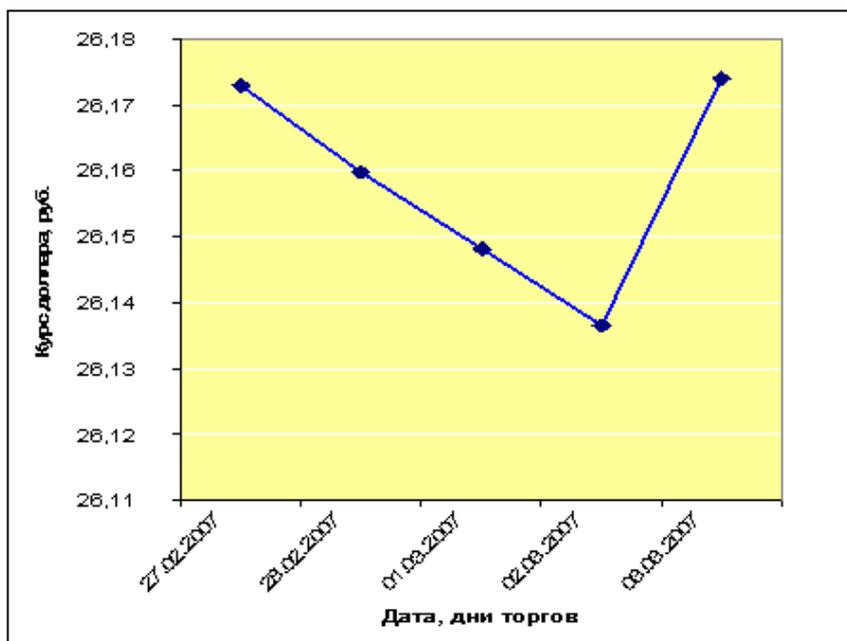


Рис. 1: Вычисление длины участка ломаной линии (L_i) между точками исходных данных.

- T_i – текущее значение оси временного масштаба,
- T_{i+1} – следующее значение оси временного масштаба.

Далее, находим общую длину ломаной линии между точками исходных данных на графике:

$$L_0 = \sum_{i=1}^n L_i,$$

или:

$$L_0 = \sum_{i=1}^n \sqrt{(R_i - R_{i+1})^2 + (T_i - T_{i+1})^2}. \quad (4)$$

Таким образом, мы измерили длину L_0 исходной временной кривой.

Описанный алгоритм применим в общем случае для любых временных интервалов.

Строим график *Усреднение 1* (Временной масштаб равен 1) вычисляя среднее арифметическое для каждой пары точек исходного графика: $R_i^1 = \frac{R_i + R_{i+1}}{2}$; $R_{i+1}^1 = \frac{R_{i+1} + R_{i+2}}{2}$; $R_{i+2}^1 = \frac{R_{i+2} + R_{i+3}}{2}$; ... На графике (рис.1) хорошо видно, что линия временной кривой *Усреднение 1* сглажена по сравнению с исходными значениями. Измеряем длину L_1 ломаной линии между точками данных графика *Усреднение 1* по формуле (4).

Второй и третий графики усреднения строим, вычисляя среднее арифметическое для каждой последовательной пары точек исходного графика.

Для графика *Усреднение 2* (Временной масштаб равен 2): $R_i^2 = \frac{R_i + R_{i+1}}{2}$; $R_{i+1}^2 = \frac{R_{i+2} + R_{i+3}}{2}$; $R_{i+2}^2 = \frac{R_{i+4} + R_{i+5}}{2}$; ..., а для графика *Усреднение 3*: (Временной масштаб равен 2) $R_i^3 = \frac{R_{i+1} + R_{i+2}}{2}$; $R_{i+1}^3 = \frac{R_{i+3} + R_{i+4}}{2}$; $R_{i+2}^3 = \frac{R_{i+5} + R_{i+6}}{2}$; ...

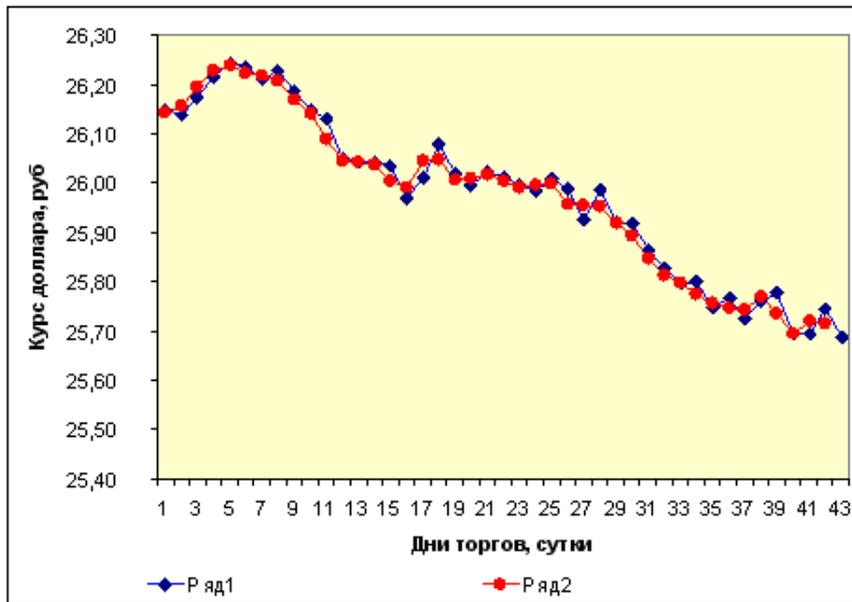


Рис. 2: Исходный график и график *Усреднение 1*.

Измеряем длины L_2 и L_3 ломаных линий между точками данных графиков *Усреднение 2* и *Усреднение 3* по формуле (4).

Четвертый, пятый и шестой графики усреднения строим, вычисляя среднее арифметическое для каждой последовательной тройки точек исходного графика.

Для графика *Усреднение 4*: (Временной масштаб равен 3) $R_i^4 = \frac{R_i + R_{i+1} + R_{i+2}}{3}$; $R_i^4 = \frac{R_{i+3} + R_{i+4} + R_{i+5}}{3}$; $R_i^4 = \frac{R_{i+6} + R_{i+7} + R_{i+8}}{3}$; ..., для графика *Усреднение 5*: $R_i^5 = \frac{R_{i+1} + R_{i+2} + R_{i+3}}{3}$; $R_i^5 = \frac{R_{i+4} + R_{i+5} + R_{i+6}}{3}$; $R_i^5 = \frac{R_{i+7} + R_{i+8} + R_{i+9}}{3}$; ..., а для графика *Усреднение 6*: $R_i^6 = \frac{R_{i+2} + R_{i+3} + R_{i+4}}{3}$; $R_i^6 = \frac{R_{i+5} + R_{i+6} + R_{i+7}}{3}$; $R_i^6 = \frac{R_{i+8} + R_{i+9} + R_{i+10}}{3}$; ...

Измеряем длины L_4 , L_5 и L_6 ломаных линий между точками данных графиков *Усреднение 4*, *Усреднение 5* (Временной масштаб равен 4) и *Усреднение 6* по формуле (4).

Фрактальная размерность определяется методом наименьших квадратов как тангенс угла наклона прямой в дважды логарифмических координатах, где по оси абсцисс отложен временной масштаб, а по оси ординат - длины ломаных (Рис. 3). Измерения большинства временных кривых валютного курса давали разброс

от прямой не более 10%, что говорит об очень хорошей применимости рассматриваемой фрактальной модели. Анализируя полученный график можно сделать вывод, что данная временная кривая валютного курса дает разброс от прямой 2%, что подтверждает наш вывод о применимости этой фрактальной модели.

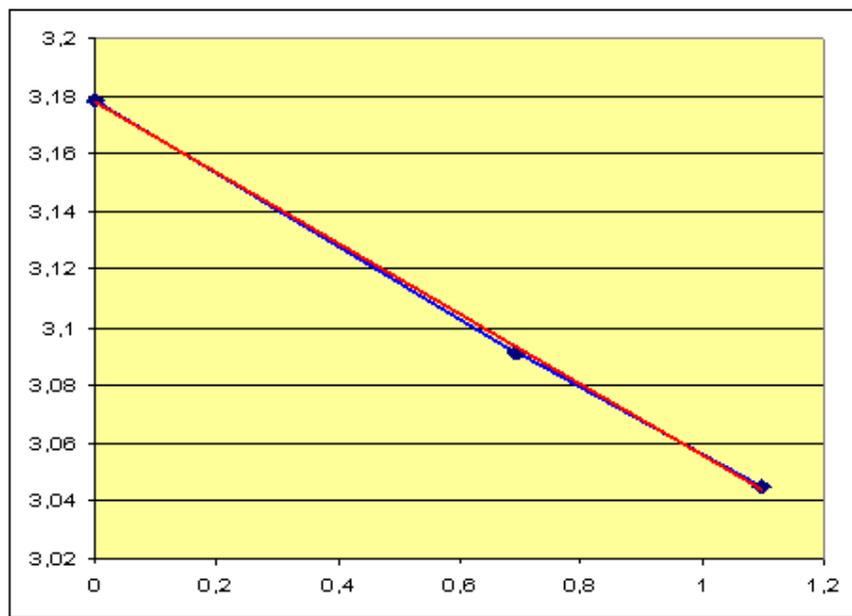


Рис. 3: Определение фрактальной размерности из угла наклона линии тренда.

Фрактальная размерность вычисляется по известной формуле:

$$D_{\text{рассчитанное}} = 2 - \text{tg}\alpha.$$

Но, в то же время практика выявила необходимость нормирования полученной фрактальной размерности по результатам, полученным для стохастического временного ряда, исходя из того, что фрактальная размерность для стохастического временного ряда составляет 1,5.

Нормирование осуществляется следующим образом: Для исходного валютного ряда заменяем значение курса случайным образом. Так как в рассматриваемый промежуток времени колебания курса укладывались в интервал от 25,00 до 30,00 рублей за доллар, то случайные числа для заполнения ими стохастического ряда определим по формуле:

$$\text{СЛЧИСЛО}_i = \text{RND} \times 5 + 25,$$

таким образом числовые значения имитирующие курс рубля по отношению к доллару случайным образом уложатся в заданный интервал¹.

Далее по подробно рассмотренному выше методу измерения шестикратно усредненной длины временного ряда определяем фрактальную размерность, которая вследствие ошибок измерений и вычислений будет отличаться от теоретического значения $D = 1,5$ фрактальной размерности стохастического временного ряда на величину ΔD . Затем нормируем полученное нами значение $D_{\text{рассчитанное}}$ на вычисленное значение ΔD и получаем следовательно нормированное значение D фрактальной размерности временной кривой валютного курса:

$$D = D_{\text{рассчитанное}} \pm \Delta D \quad (5)$$

которое далее и будем использовать для фрактального анализа временной кривой валютного курса.

Список литературы

- [1] Гуляева О.С., Цветков В.П., Цветков И.В. Фрактальный анализ валютных временных рядов. Финансы и кредит. 9(249), 2007.
- [2] Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории М.: Постмаркет, 2000.
- [3] Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984.
- [4] Benoit B. Mandelbrot, The Fraktal Geometry of Nature, Freeman. Francisco, 1982.
- [5] Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комп. динамических систем. М.: Мир, 1993.
- [6] Пригожин И., Стенгерс И. время, хаос, квант. М.: Мир, 1994.
- [7] Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
- [8] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. (<http://elib.catalysis.nsk.su>)
- [9] Федер Е. Фракталы. Пер. с англ. -М.: Мир, 1991.

¹Соответственно, если речь идет о кризисе августа 1998 года, то случайные числа для заполнения ими стохастического ряда определим по формуле: $СЛЧИСЛО_i = RND \times 2 + 5$, таким образом числовые значения, имитирующие курс рубля по отношению к доллару случайным образом уложатся в интервал 5...7 рублей за доллар.