МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ

УДК 512.774.3 :81`32

О СЕМАНТИКАХ ИСЧИСЛЕНИЙ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Б.Н. Дроботун, Г.С. Джарасова, Н.Б. Егимбаева

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Конкретизируется, применительно к исчислению высказываний, общая схема построения семантических интерпретаций пропозициональных исчислений; определяется термальное исчисление $Term$, как наиболее последовательно формализованный вариант исчисления высказываний; возможности строгого разделения синтаксиса и семантики в рамках исчисления $Term$ демонстрируются на примерах построения нетрадиционных семантических интерпретаций этого исчисления.
Ключевые слова: *сигнатура, интерпретация, алгебраическая система, синтаксис, семантика, аксиома, терм, исчисление, поле развертывания.*

Важную роль в выявлении, изучении и использовании классификационных и познавательных возможностей метода формальных аксиоматических теорий играют исследования, связанные с решением проблем выполнимости, категоричности, независимости, полноты и непротиворечивости аксиоматических теорий как формальных аналогов тех или иных содержательных разделов современной математики.

Многие из этих проблем, для широкого класса конкретных аксиоматических теорий, решаются посредством применения метода семантических интерпретаций, инструментально-технологическую основу которого составляют технологии построения различных семантик формальных языков базовых исчислений математической логики – исчисления высказываний и исчисления предикатов.

В высших учебных заведениях, при обучении студентов по математическим направлениям, проблематика, связанная с концепцией семантической интерпретации, затрагивается в процессе изучения дисциплин логико-алгебраического цикла (математическая логика, алгебра, теория алгоритмов, теория множеств, дискретная математика). При этом первый опыт работы с семантиками формальных языков приобретается в рамках изучения классической (истинностной) семантики исчисления высказываний, наиболее полно отражающей интуитивно-содержательные представления об истинностных оценках сложных высказываний естественных языков.

В соответствии с данным опытом исчисление высказываний, как формальная аксиоматическая теория, представляет собой формальный аналог алгебры высказываний, как алгебры, рассматриваемой в интуитивно-содержательном плане.

Таким образом, с позиций этого опыта алгебра высказываний автоматически становится истинностной семантикой исчисления высказываний. Тем самым в процессе приобретения опыта истинностная семантика затрагивается лишь опосредованно, не выделяется в виде самостоятельной составляющей и возникает в виде как бы само собою разумеющегося явления.

Следует отметить, что подобная практика изучения исчисления высказываний во многом аналогична практике изучения синтаксической компоненты естественных (родных) языков. Действительно, изучение синтаксиса естественных языков осуществляется, по существу, с формальных позиций, как изучение общепринятых правил написания, законов построения, соединения и формоизменения тех синтаксических конфигураций, посредством которых реализуется описательная функция этих языков и которые образуют основу для языкового общения. При этом в качестве метаязыка, посредством которого изучается грамматика естественных (родных) языков, используются обычно те же самые языки, а в качестве примеров, демонстрирующих приемы построения и анализа правильных конфигураций и законов их соединения, берутся конкретные языковые образования, имеющие определенный содержательный смысл и значение, т.е. в процессе изучения естественных (родных) языков синтаксис и семантика выступают в неразрывном единстве. Но если в случае естественных языков подобная практика оказывает, несомненно, позитивное воздействие на результаты обучения, то в случае изучения формальных языков логических исчислений ее воздействие носит, в целом, характер определенной некорректности.

Действительно, в соответствии с этой практикой и высказывания, и их формальные аналоги называются одинаково – формулами; множества формул алгебры высказываний и исчисления высказываний, как множества слов одного и того же алфавита, строятся по одним и тем же правилам; элементы этих множеств наделяются одинаковыми обозначениями, и в дальнейшем эти множества, как правило, не различаются. Тем самым представления о формулах алгебры высказываний как об объектах, неразрывно связанных с истинностным содержанием, переносятся и на формулы исчисления высказываний. В связи с этим всевозможные специальные построения, сопряженные с наделением формул исчисления высказываний дополнительным содержательным смыслом, представляются, в лучшем случае, излишними. В худшем же случае необходимость их проведения вызывает недоумение и утрату интереса к дальнейшему изучению математической логики.

В любом случае, тем не менее, в процессе построения нетрадиционных семантических интерпретаций логических исчислений, предполагающих строгое разделение синтаксиса и семантики, приходится преодолевать негативные последствия этой сложившейся практики.

В предлагаемой статье обобщается и конкретизируется, применительно к исчислению высказываний, традиционная схема построения семантических интерпретаций пропозициональных исчислений [1; 2] и определяется термальное исчисление $Term$ (как строго формализованный вариант исчисления высказываний), в рамках которого реализуется возможность наиболее последовательного разделения синтаксической и семантической составляющих этого исчисления.

1. Пропозициональные исчисления

Согласно [3], исчисление I считается заданным, если заданы следующие четыре множества:

а) алфавит $\mathrm{A}(I)$;

б) множество $E(I)$ – слов алфавита $\mathrm{A}(I)$, называемое множеством выражений исчисления I;

в) множество $Ax(I)$ – выражений исчисления I, называемое множеством аксиом исчисления I;

г) множество $\{f_1; f_2; \dots; f_n\}$ – частичных операций, заданных на множестве $E(I)$, называемых правилами вывода исчисления I.

Отличительной особенностью пропозиционального исчисления является то, что алфавит $\mathrm{A}(I)$ этого исчисления содержит лишь символы пропозициональных (логических) связок, взятые из множества $\{\vee; \&; \rightarrow; \leftrightarrow; \neg\}$, а также символы $v_1; v_2; \dots; v_t; \dots$ $(t \in N)$ – пропозициональных (высказывательных) переменных и вспомогательные символы (,) – левой и правой скобок.

В соответствии с этим каждое пропозициональное исчисление, как и традиционное исчисление, является исчислением высказываний.

Под словом алфавита $\mathrm{A}(I)$ понимается любая конечная последовательность написанных друг за другом символов этого алфавита.

Множество $E(I)$ выражений этого исчисления определяется индуктивно:

1. Пропозициональная переменная v_i, $i \in N$, является выражением;

2. Если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – выражения, то слова $(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})$; $(\boldsymbol{A}\&\boldsymbol{B})$; $(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$; $\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{B})$; $\neg\boldsymbol{A}$ также являются выражениями.

Выражения пропозициональных исчислений называются формулами.

В качестве множества $Ax(I)$ – аксиом пропозиционального исчисления – берется произвольное подмножество множества формул этого исчисления. В качестве правил вывода берутся обычно правило заключения $(M.P.)$ и правило подстановки (S).

В зависимости от выбора системы аксиом получаются различные пропозициональные исчисления. В частности, классическое (традиционное) пропозициональное исчисление (исчисление высказываний) задается следующими аксиомами:

$\boldsymbol{A}_1 = (x \to (y \to z))$;

$\boldsymbol{A}_2 = ((x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)))$;

$\boldsymbol{A}_3 = ((x\&y) \to x)$;

$\boldsymbol{A}_4 = ((x\&y) \to y)$;

$\boldsymbol{A}_5 = ((x \to y) \to ((x \to z) \to (x \to (y\&z))))$;

$\boldsymbol{A}_6 = (x \to (x \vee y))$;

$\boldsymbol{A}_7 = (y \to (x \vee y))$;

$\boldsymbol{A}_8 = ((x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z)))$;

$\boldsymbol{A}_9 = ((x \to y) \to (\neg y \to \neg z))$;

$\boldsymbol{A}_{10} = (x \to \neg(\neg x))$;

$\boldsymbol{A}_{11} = (\neg(\neg x) \to x)$;

В аксиомах $\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_{11}$ переменные $x; y; z$ – суть синтаксические переменные, т.е. переменные, не являющиеся символами алфавита $\mathrm{A}(I)$. Областью изменения этих переменных является множество $\{v_i / i \in N\}$. Аналогичным образом, в качестве синтаксических переменных будут рассматриваться далее символы $x_1; x_2; \dots; x_t; \dots$; $y_1; y_2; \dots; y_t; \dots; z_1; z_2; \dots; z_t; \dots$. Отметим также, что пропозициональная связка $\leftrightarrow$ не входит в алфавит исчисления высказываний и посредством аксиом $\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_{11}$ дается аксиоматическое определение алгебраических операций, как потенциально возможных семантических образов связок $\to$; $\&$; $\vee$; $\neg$.

2. Исчисление высказываний как термальное исчисление

Общепринятый подход к определению классической истинностной семантики исчисления высказываний заключается в следующем.

Под означиванием переменных множества $\{v_i / i \in N\}$ понимается отображение этого множества в двухэлементное множество $E = \{л; и\}$, т.е. наделение каждой переменной $v_i, i \in N,$ истинностным значением. Это отображение распространяется далее на множество $E(I)$ всех формул исчисления высказываний в соответствии с нижеследующей таблицей, которая традиционно называется таблицей истинности:

x	y	$(x \vee y)$	$(x \& y)$	$(x \to y)$	$(x \leftrightarrow y)$	$\neg x$
л	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*	*и*
л	*и*	*и*	*л*	*и*	*л*	*и*
и	*л*	*и*	*л*	*л*	*л*	*л*
и	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*л*

При этом отмечается, что все выводимые формулы исчисления высказываний (в частности, аксиомы $\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_{11}$), как формулы алгебры высказываний, при всех означиваниях переменных принимают значение *и*.

Нетрудно видеть, что следствием такого подхода к определению истинностной семантики действительно являются негативные ситуации, отмеченные выше.

Заметим, что с алгебраической точки зрения символы $\vee; \&; \to; \leftrightarrow; \neg$ логических связок могут рассматриваться как символы (имена) для алгебраических операций. В соответствии с этим если при построении исчисления высказываний вместо символов *л*, *и* взять константные символы 0; 1, а вместо символов $\vee; \&; \to; \neg$ взять функциональные символы $G_1^2; G_2^2; G_3^2; G_4^1$ соответственно, то множество термов сигнатуры $\lambda = \langle G_1^2; G_2^2; G_3^2; G_4^1; d_1; d_2 \rangle$ будет представлять собой множество $E(I)$ формул исчисления высказываний.

Отравляясь от этого замечания будем строить исчисление термов – $Term$, следуя схеме а) – г) пункта 1.

а) алфавит $\mathrm{A}(Term)$ исчисления термов будет содержать символы следующих четырех видов:

а.1) множество пропозициональных переменных $v = \{v_i / i \in N\}$;

а.2) множество функциональных символов сигнатуры $\lambda = \langle G_1^2; G_2^2; G_3^2; G_4^1 \rangle$;

а.3) множество константных символов $\{0; 1\}$;

а.4) множество вспомогательных символов $\{"(" ; ")" ; " ; "\}$;

б) множество выражений $E(Term)$ – термального исчисления – определяется в соответствии с индуктивной схемой определения терма сигнатуры λ следующим образом:

б.1. пропозициональная переменная $v_i, i \in N$, есть терм; константные символы 0,1 также являются термами;

б.2. если t_1 и t_2 – термы, то слова $G_1^2(t_1; t_2)$; $G_2^2(t_1; t_2)$; $G_3^2(t_1; t_2)$; $G_4^1(t_1)$ также являются термами.

В дальнейшем терм t сигнатуры λ, в записи которого встречаются пропозициональные переменные из множества $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ будет обозначаться через $t(x_1; x_2; \ldots x_n)$;

в) в качестве множества $Ax(Term)$ – аксиом исчисления термов выбираются следующие термы сигнатуры λ:

в.1. $t_1 = t_1(x; y) = G_3^2(x; G_3^2(y; x))$;

в.2. $t_2 = t_2(x; y; z) = G_3^2(G_3^2(x; G_3^2(y; z)); G_3^2(G_3^2(x; y); G_3^2(x; z)))$;

в.3. $t_3 = t_3(x; y) = G_3^2(G_2^2(x; y); x)$;

в.4. $t_4 = t_4(x; y) = G_3^2(G_2^2(x; y); y)$;

в.5. $t_5 = t_5(x; y; z) = G_3^2(G_3^2(x; y); G_3^2(G_3^2(x; z); G_3^2(x; G_2^2(y; z))))$;

в.6. $t_6 = t_6(x; y) = G_3^2(x; G_1^2(x; y))$;

в.7. $t_7 = t_7(x; y) = G_3^2\left(y; G_1^2(x; y)\right)$;

в.8. $t_8 = t_8(x; y; z) = G_3^2(G_3^2(x; z); G_3^2(G_3^2(y; z); G_3^2(G_1^2(x; y); z)))$;

в.9. $t_9 = t_9(x; y) = G_3^2(G_3^2(x; y); G_3^2(G_4^1(y); G_4^1(x)))$;

в.10. $t_{10} = t_{10}(x) = G_3^2(x; G_4^1(G_4^1(x)))$;

в.11. $t_{11} = t_{11}(x) = G_3^2(G_4^1(G_4^1(x)); x)$;

г) правила исчисления термов будут формулироваться так:

г.1. **Правило подстановки** (S). Пусть $t; s \in Term\,\lambda$. Если $t = t(x; y_1; y_2; \ldots; y_n)$ выводимый терм и $s = s(z_1; z_2; \ldots; z_m; y_1; y_2; \ldots; y_n)$ – произвольный терм, то терм

$S_x^s(t) = t(s(z_1; z_2; \ldots z_m); y_1; y_2; \ldots; y_n)$

также является выводимым;

г.2. **Правило заключения** $(M.P.)$. Пусть $t_1; t_2 \in Term\,\lambda$. Если термы $t_1 = t_1(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $t_3 = G_3^2(t_1(x_1; x_2; \ldots; x_n); t_2(x_1; x_2; \ldots; x_n; y_1; y_2; \ldots; y_m))$ являются выводимыми термами, то терм $M.P.(t_1; t_3) = t_2(x_1; x_2; \ldots; x_n; y_1; y_2; \ldots; y_m)$ также выводим.

Определения вывода (доказательства) и выводимой (доказуемой) формулы примут (в термальном исчислении $Term$) соответственно следующие формы:

а) конечная последовательность $s_1; s_2; \ldots; s_k$ термов сигнатуры λ будет называться выводом, если:

а.1) первый терм s_1 этой последовательности является аксиомой;

а.2) каждый последующий терм $s_i(i = 2; 3; \ldots.; k)$ этой последовательности или является аксиомой, или получается из некоторых предшествующих термов по одному из правил вывода;

б) терм $t \in Term\,\lambda$ будет называться выводимым (доказуемым) в исчислении термов, если существует такой вывод $t_1; t_2; \ldots; t_k$ в этом исчислении, что $t_k = t$.

К примеру, терм $t(x) = G_3^2(x; x)$ является выводимым в исчислении термов и его вывод будет выглядеть следующим образом:

$s_1 = G_3^2(x; G_3^2(y; x))$ – аксиома t_1;

$s_2 = G_3^2(G_3^2(x;G_3^2(y;z));G_3^2(G_3^2(x;y);G_3^2(x;z)))$ – аксиома t_2;
$s_3 = G_3^2(G_3^2(x;G_3^2(y;x));G_3^2(G_3^2(x;y);G_3^2(x;x))) = S_z^x(s_2(z))$;
$s_4 = G_3^2(G_3^2(x;y);G_3^2(x;x)) = M.P.(s_1;s_2)$;
$s_5 = G_3^2(G_3^2(x;G_3^2(y;x)) = G_3^2(x;x)) = S_y^{G_3^2(y;x)}$;
$s_6 = G_3^2(x;x) = M.P.(t_1;t_5)$.

Нетрудно видеть, что множество L – формул алгебры высказываний является, в свою очередь, множеством термальных операций алгебры

$\boldsymbol{E} = \langle\{\text{л}; \text{и}\}; \vee; \&; \rightarrow; ^{-}; \leftrightarrow; \text{л}; \text{и}\rangle$

сигнатуры $\delta = \langle F_1^2; F_2^2; F_3^2; F_4^1 F_5^2;; c_1; c_2\rangle$, если предполагать, что интерпретация φ этой сигнатуры на множестве $\{\text{л}; \text{и}\}$ определялось по правилу

$\varphi(F_1^2) = {}^{\varphi}F_2^1 = \vee$; $\varphi(F_2^2) = {}^{\varphi}F_2^2 = \&$; $\varphi(F_3^2) = {}^{\varphi}F_3^2 = \rightarrow$; $\varphi(F_4^1) = {}^{\varphi}F_4^1 = \neg$;
$\varphi(F_5^2) = {}^{\varphi}F_5^2 = \leftrightarrow$; ${}^{\varphi}c_1 = \text{и}$; ${}^{\varphi}c_2 = \text{л}$.

3. Семантические интерпретации пропозициональных исчислений

Обобщим понятие семантической интерпретации пропозиционального исчисления и конкретизируем его применительно к исчислению термов (т.е. к исчислению высказываний, заданному в строго формализованном виде).

Пусть $\delta = \langle F_1^{m_1}; F_2^{m_2}; \dots . F_r^{m_r}; P_1^{n_1}; P_2^{n_2}; \dots; P_s^{n_s}; c_1; c_2; \dots; c_t\rangle$ – сигнатура общего вида; $\lambda = \langle G_1^2; G_2^2; G_3^2; G_4^1; d_1; d_2\rangle$ – функциональная сигнатура, M – произвольное непустое множество и E – двухэлементное множество $\{0; 1\}$, φ и η – интерпретации сигнатур δ и λ на множествах M и E соответственно;

$\boldsymbol{M} = \langle M;\ {}^{\varphi}F_1^{m_1}; {}^{\varphi}F_2^{m_2}; \dots; {}^{\varphi}F_r^{m_r}; {}^{\varphi}P_1^{n_1}; {}^{\varphi}P_2^{n_2}; \dots {}^{\varphi}P_s^{n_s};; {}^{\varphi}c_1; {}^{\varphi}c_2; \dots {}^{\varphi}c_t\rangle$ –

алгебраическая система сигнатуры δ; S – непустое выделенное подмножество носителя M этой системы и

$\boldsymbol{I} = \langle M;\ {}^{\eta}G_1^2;\ {}^{\eta}G_2^2;\ {}^{\eta}G_3^2;\ {}^{\eta}G_4^1;\ {}^{\eta}d_1;\ {}^{\eta}d_2\rangle$ –

алгебра сигнатуры λ.

Определение 1. Алгебра $\boldsymbol{I}$ будет называться интерпретацией языка термального исчисления $Term$ (т.е. исчисления высказываний) с полем означивания $\boldsymbol{M}$ и выделенным подмножеством S, если основные операции ${}^{\eta}G_1^2$; ${}^{\eta}G_2^2$; ${}^{\eta}G_3^2$; ${}^{\eta}G_4^1$ этой алгебры являются термальными операциями алгебраической системы $\boldsymbol{M}$, ${}^{\eta}d_1 \in S$ и ${}^{\eta}d_2 \notin S$.

Определение 2. Терм $t = t(x_1; x_2; \dots; x_n)$ сигнатуры λ будет называться общезначимым (при интерпретации η с выделенным подмножеством S поля означивания $\boldsymbol{M}$), если для любых

$a_1; a_2; \dots; a_n \in M$, значение $^{\eta}t(a_1; a_2; \dots; a_n)$ термальной операции $^{\eta}t(x_1; x_2; \dots; x_n)$ алгебры $\boldsymbol{I}$ принадлежит S.

Определение 3. Интерпретация $\boldsymbol{I}$ термального исчисления $Term$ (исчисления высказываний) с полем означивания $\boldsymbol{M}$ и выделенным подмножеством S будет называться семантической интерпретацией, если:

а) аксиомы $t_1 - t_{11}$ этого исчисления будут общезначимыми термами;

б) правила вывода этого исчисления будут сохранять свойство термов быть общезначимыми, т.е:

б.1) если $t = t(x; y_1; y_2; \dots; y_n)$ – общезначимый терм и $s = s(z_1; z_2; \dots; z_m; y_1; y_2; \dots; y_n)$ – произвольный терм исчисления $Term$, то терм $S_x^s(t) = t(s(z_1; z_2; \dots; z_m; y_1; y_2; \dots; y_n); y_1; y_2; \dots; y_n)$ также будет являться общезначимым термом этого исчисления;

б.2) если термы $t_1 = t_1(x_1; x_2; \dots x_n)$ и $t_3 = G_3^2(t_1(x_1; x_2; \dots x_n); t_2(x_1; x_2; \dots x_n; y_1; y_2; \dots y_n))$ – общезначимые термы исчисления $Term$, то терм $M.P.(t_1; t_3) = t_2(x_1; x_2; \dots; x_n; y_1; y_2; \dots; y_n)$ также будет являться общезначимым термом этого исчисления;

в) два терма $t_1 = t_1(x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $t_2 = G_4^1(t_1(x_1; x_2; \dots; x_n))$ не могут быть одновременно общезначимыми для любого терма $t_1 \in Term\,\lambda$.

Применительно к сложившейся практике изучения исчисления высказываний, эти определения означают, что

а) алгебра $\boldsymbol{E} = \langle E; \vee; \&; \to; \neg; л; и \rangle$, как алгебра сигнатуры $\lambda = \langle G_1^2; G_2^2; G_3^2; G_4^1; d_1; d_2 \rangle$, при интерпретации η, определенной соответственным образом: $\eta(G_1^2) = {}^{\eta}G_1^2 = \vee$; $\eta(G_2^2) = {}^{\eta}G_2^2 = \&$; $\eta(G_3^2) = {}^{\eta}G_3^2 = \to$; $\eta(G_4^1) = {}^{\eta}G_4^1 = \neg$; ${}^{\eta}d_1 = и$; ${}^{\eta}d_2 = л$, является интерпретацией исчисления высказываний, при этом, в качестве поля означивания $\boldsymbol{M}$ выступает эта же самая алгебра $\boldsymbol{E}$, которую можно рассматривать и как алгебру сигнатуры $\delta = \langle F_1^1; F_2^2; F_3^2; F_4^1 c_1; c_2 \rangle$ при аналогичной соответственной интерпретации φ этой сигнатуры;

б) выделенное множество S носителя E поля означивания $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{E}$ является одноэлементным: $S = \{и\}$;

в) аксиомы $\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_{11}$ исчисления высказываний являются, как формулы алгебры высказываний, тождественно истинными (общезначимыми);

г) правило подстановки и правило заключения сохраняют свойство формул исчисления высказываний быть тождественно истинными (общезначимыми) формулами алгебры высказываний;

д) для любой формулы $\boldsymbol{A}$ исчисления высказываний, формулы $\boldsymbol{A}$ и $\neg\boldsymbol{A}$, как формулы алгебры высказываний, не могут одновременно быть тождественно истинными (общезначимыми);

е) семантическая интерпретация $\boldsymbol{I}$ исчисления высказываний, как термального исчисления, определяется полем означивания $\boldsymbol{M}$ и интерпретацией η. Поле означивания $\boldsymbol{M}$ классической истинностной семантики, с учетом того, что операция $\to$ может быть выражена через операции $\vee$ и $\neg$, можно рассматривать как алгебраическую систему сигнатуры $\delta = \langle F_1^1; F_2^2; F_3^1; c_1; c_2 \rangle$, определяя интерпретацию φ по правилу:

$\varphi(F_1^2) = {}^{\varphi}F_1^2 = \vee$; $\varphi(F_2^2) = {}^{\varphi}F_2^2 = \&$; $\varphi(F_3^1) = {}^{\varphi}F_3^1 = \neg$; $\varphi(c_1) = {}^{\varphi}c_1 = и$;

$\varphi(c_2) = {}^{\varphi}c_2 = л$.

В связи с вышеизложенным уместно подчеркнуть, что некорректность определений и построений традиционной практики изучения исчисления высказываний и его семантических интерпретаций является прямым следствием совпадения непосредственно классической истинностной семантики и поля ее означивания, которое допускается (в неявной форме) в процессе следования этой практике.

Заметим также, что система $\boldsymbol{M} = \langle \{л; и\}; \vee; \&; \neg; и; л \rangle$ является двухэлементной булевой алгеброй. Из того, что ${}^{\eta}G_1^2(a_1; a_2) = (a_1 \vee a_2)$; ${}^{\eta}G_2^2(a_1; a_2) = (a_1 \& a_2)$; ${}^{\eta}G_3^2(a_1; a_2) = ((\neg a_1) \vee a_2)$; ${}^{\eta}G_4^1(a_1) = \neg a_1$ для любых $a_1; a_2 \in \{л; и\}$, следует, что операции ${}^{\eta}G_1^2$; ${}^{\eta}G_2^2$; ${}^{\eta}G_3^2$; ${}^{\eta}G_4^1$ действительно являются термальными операциями булевой алгебры $\boldsymbol{M}$, как поля означивания.

4. Булевозначные означивания

Изложенная выше алгебраическая трактовка классической истинностной семантики исчисления высказываний приводит к булевозначным означиваниям этого исчисления, в которых в качестве поля означивания берется произвольная булева алгебра.

Проиллюстрируем определения 1–3 пункта 3 на соответствующем примере.

Пусть, как и ранее, $\delta = \langle F_1^2; F_2^2; F_3^1; c_1; c_2 \rangle$, $\lambda = \langle G_1^2; G_2^2; G_3^2; G_4^1; d_1; d_2 \rangle$ и

$\boldsymbol{M} = \langle M;\ {}^{\varphi}F_1^2; {}^{\varphi}F_2^2; {}^{\varphi}F_3^1; {}^{\varphi}c_1; {}^{\varphi}c_2 \rangle = \langle M; \sqcup; \sqcap; C; 1; 0 \rangle$ –

произвольная булева алгебра. Эта алгебра, как алгебраическая система сигнатуры δ, будет выступать в роли поля означивания. Интерпретация φ сигнатуры δ на множестве M определяется, при этом, соответственным образом, т.е. $\varphi(F_1^2) = {}^{\varphi}F_1^2 = \sqcup$; $\varphi(F_2^2) = {}^{\varphi}F_2^2 = \sqcap$; $\varphi(F_3^1) = {}^{\varphi}F_3^1 = C$; $\varphi(c_1) = {}^{\varphi}c_1 = 1$; $\varphi(c_2) = {}^{\varphi}c_2 = 0$.

В качестве выделенного множества S берется, в этом случае, одноэлементное подмножество $\{1\}$ множества M.

Для построения интерпретации $\boldsymbol{I}$ языка термального исчисления $Term$, как алгебры сигнатуры λ (см. определение 1), определим интерпретацию η этой сигнатуры на множестве M по следующим правилам.

Положим $\eta(G_1^2) = {}^{\eta}G_1^2$; $\eta(G_2^2) = {}^{\eta}G_2^2$; $\eta(G_3^2) = {}^{\eta}G_3^2$; $\eta(G_4^1) = {}^{\eta}G_4^1$; $\eta(d_1) = 1$; $\eta(d_2) = 0$, где операции ${}^{\eta}G_1^2$; ${}^{\eta}G_2^2$; ${}^{\eta}G_3^2$; ${}^{\eta}G_4^1$ определены на множестве M следующим образом: ${}^{\eta}G_1^2(a_1; a_2) = (a_1 \sqcup a_2)$; ${}^{\eta}G_2^2(a_1; a_2) = (a_1 \sqcap a_2)$; ${}^{\eta}G_3^2(a_1; a_2) = C(a_1) \sqcup a_2$; ${}^{\eta}G_4^1(a_1) = C(a_1)$ для любых $a_1; a_2 \in M$.

Таким образом, операции ${}^{\eta}G_1^2$; ${}^{\eta}G_2^2$; ${}^{\eta}G_3^2$; ${}^{\eta}G_4^1$ действительно являются термальными операциями алгебры $\boldsymbol{M}$. В частности, ${}^{\eta}G_3^2(x_1; x_2) = {}^{\varphi}F_1^2({}^{\varphi}F_3^1(x_1); x_2)$.

Покажем теперь, что полученная интерпретация, т.е. алгебра

$$\boldsymbol{I} = \langle M; (\ldots \sqcup \ldots); (\ldots \sqcap \ldots); (C(\ldots) \sqcap \ldots); C(\ldots); 1; 0\rangle$$

является семантической интерпретацией исчисления высказываний, как термального исчисления $Term$ (см. определение 3).

Для этого проверим, что условия а) – в) определения 3 для интерпретации $\boldsymbol{I}$ выполняются.

а) Покажем, для примера, что аксиомы t_2 и t_8 являются общезначимыми. Действительно, термальные операции ${}^{\varphi}t_2$ и ${}^{\varphi}t_8$, соответствующие этим термам, записываются следующим образом:

$${}^{\eta}t_2 = {}^{\eta}t_2(x; y; z) = (C(C(x) \sqcup (C(y) \sqcup z)) \sqcup (C(C(x) \sqcup y) \sqcup (C(x) \sqcup z)));$$

$${}^{\eta}t_8 = {}^{\eta}t_8(x; y; z) = (C(C(x) \sqcup z) \sqcup (C(C(y) \sqcup z) \sqcup (C(x \sqcup y) \sqcup z)))$$

.

Проверим, что при любых значениях $a; b; c \in M$ для переменных $x; y; z$, соответственно, значения ${}^{\eta}t_2(a; b; c)$ и ${}^{\eta}t_8(a; b; c)$ операций ${}^{\eta}t_2$ и ${}^{\eta}t_8$ принадлежат выделенному подмножеству S, т.е. что ${}^{\eta}t_2(a; b; c) = 1$ и ${}^{\eta}t_8(a; b; c) = 1$.

При вычислении этих значений будем использовать свойства булевых операций $\sqcup; \sqcap; C$ и выделенных элементов $1; 0$, как содержательные воплощения аксиом, задающих класс булевых алгебр.

Пусть $a; b; c \in M$.Тогда:

а.1)

$${}^{\eta}t_2(a; b; c) = (C(C(a) \sqcup (C(b) \sqcup c)) \sqcup (C(C(a) \sqcup b) \sqcup (C(a) \sqcup c))) =$$
$$= ((a \sqcap (b \sqcap C(c))) \sqcup ((a \sqcup (C(a) \sqcup c)) \sqcap (C(b) \sqcup (C(a) \sqcup c)))) =$$
$$= ((a \sqcap (b \sqcap C(c))) \sqcup (((a \sqcup C(a)) \sqcup c) \sqcap ((C(b) \sqcup C(a) \sqcup c))) =$$

$= ((a \sqcap (b \sqcap C(c))) \sqcup ((1 \sqcup c) \sqcap ((C(a) \sqcup C(b)) \sqcup c))) =$
$= ((a \sqcap (b \sqcap C(c))) \sqcup (1 \sqcap C((a \sqcap b) \sqcap C(c))) =$
$(a \sqcap b \sqcap C(c)) \sqcup C(a \sqcap b \sqcap C(c)) = 1$;

а.2)
$^{\eta}t_8(a; b; c) = (C(C(a) \sqcup c) \sqcup (C(C(b) \sqcup c) \sqcup (C(a \sqcup b) \sqcup c))) =$
$= ((a \sqcap C(c)) \sqcup ((b \sqcap C(c)) \sqcup ((C(a) \sqcap C(b)) \sqcup c))) =$
$= (((a \sqcup b) \sqcap C(c)) \sqcup C((a \sqcup b) \sqcap C(c))) = 1.$

Общезначимость остальных аксиом проверяется аналогичным образом.

б) Приведем, в качестве примера, доказательное обоснование того, что правило заключения сохраняет свойство терма быть общезначимым.

Пусть термы $t_1 = t_1(x_1; x_2; \dots x_n)$ и $t_3(x_1; x_2; \dots x_n; y_1; y_2; \dots y_m) = = G_3^2(t_1(x_1; x_2; \dots x_n); t_2(x_1; x_2; \dots x_n; y_1; y_2; \dots y_m))$ – общезначимые термы исчисления $Term$, т.е. соответствующие этим термам термальные операции $^{\eta}t_1 = {}^{\eta}t_1(x_1; x_2; \dots x_n)$ и $^{\eta}t_3 = {}^{\eta}G_3^2({}^{\eta}t_1(x_1; x_2; \dots x_n); {}^{\eta}t_2(x_1; x_2; \dots x_n; y_1; y_2; \dots y_m))$ при любых значениях для переменных $x_1; x_2; \dots x_n; y_1; y_2; \dots y_m$ из множества M принимают значение 1.

Но тогда и терм $M.P.(t_1; t_2) = t_2$ также будет общезначимым.

Действительно, пусть $a_1; a_2; \dots a_n; b_1; b_2; \dots; b_m$ – произвольные значения из множества M для переменных $x_1; x_2; \dots x_n; y_1; y_2; \dots; y_m$ соответственно. Тогда

$$^{\eta}t_1(a_1; a_2; \dots; a_n) = 1 \qquad (1)$$

и

$^{\eta}t_3(a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_m) =$
$= {}^{\eta}G_3^2({}^{\eta}t_1(a_1; a_2; \dots; a_n); {}^{\eta}t_2(a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_m)) =$
$= C({}^{\eta}t_1(a_1; a_2; \dots; a_n)) \sqcup {}^{\eta}t_2(a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_m)) = 1.$
$= C({}^{\eta}t_1(a_1; a_2; \dots; a_n)) \sqcup {}^{\eta}t_2(a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_m)) = 1.$ (2)

Из (1) и (2) тогда следует, что $C(1) \sqcup {}^{\eta}t_2(a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_m) = 1$, т.е., в соответствии с законами оперирования в булевых алгебрах,

$$0 \sqcup {}^{\eta}t_2(a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_m) = 1$$

или

$$^{\eta}t_2(a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_m) = 1$$

в)Пусть $t_1 = t_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \in Term\,\lambda$. Докажем, применяя метод доказательства от противного, что термы t и $G_3^2(t_1)$ не могут быть одновременно общезначимыми. Действительно, в противном случае будем иметь: $^{\eta}t_2(a_1; a_2; \dots; a_n) = 1$;

${}^{\eta}G_4^1({}^{\eta}t_1(a_1;a_2;\dots;a_n)) = 1$ для любых $a_1;a_2;\dots;a_n \in M$. Но ${}^{\eta}G_4^1({}^{\eta}t(a_1;a_2;\dots;a_n)) = C({}^{\eta}t(a_1;a_2;\dots;a_n))$. Отсюда получаем: ${}^{\eta}t_1(a_1;a_2;\dots;a_n) = 1$ и $C({}^{\eta}t(a_1;a_2;\dots;a_n)) = 1$, т.е. $\mathrm{C}(1) = 1$, что невозможно, т.к. в любой булевой алгебре $\mathrm{C}(1) = 0$.

5. Нестандартные семантики исчисления высказываний

В соответствии с определением 3 ведущую роль в построении алгебры $\boldsymbol{I}$, как интерпретации исчисления $Term$ (исчисления высказываний) играют: поле означивания $\boldsymbol{M}$, как алгебраическая система сигнатуры δ; выделенное подмножество S носителя M этой системы и интерпретация η сигнатуры λ, посредством которой основные операции алгебры $\boldsymbol{I}$ задаются как термальные операции поля означивания $\boldsymbol{M}$.

Как отмечалось в пункте 4, в качестве поля означивания может быть взята произвольная булева алгебра. В частности, если полем означивания является булева алгебра подмножеств непустого множества M, то полученная при этом семантическая интерпретация называется теоретико-множественной семантикой исчисления высказываний.

Классическая истинностная семантика, а также булевозначные семантики (в частности, теоретико-множественные семантики) исчисления высказываний могут быть отнесены к традиционным семантическим интерпретациям этого исчисления.

Перейдем к построению нестандартных семантик исчисления высказываний, представленного в форме исчисления $Term$. В связи с тем что при построении первой из этих семантик в качестве поля означивания берется булево кольцо, а второй – булева решетка, эти семантические интерпретации названы соответственно кольцевой и порядковой семантиками.

Напомним [4], что булевым кольцом с единицей называется алгебраическая система $\boldsymbol{K} = \langle K;+;*;1;0\rangle$, основные операции и выделенные элементы которой удовлетворяют следующим условиям:

1) $(\forall a;b \in K)(a+b=b+a)$;
2) $(\forall a;b;c \in K)((a+b)+c=a+(b+c))$;
3) $(\forall a \in K)(a+0=0+a=a)$;
4) $(\forall a \in K)(\exists(-a) \in K)(a+(-a)=(-a)+a=0)$;
5) $(\forall a;b;c \in K)((a*b)*c=a*(b*c))$;
6) $(\forall a \in K)(a*1=1*a=a)$;
7) $(\forall a \in K)(a*a=a)$;
8) $(\forall a;b;c \in K)((a+b)*c=a*c+b*c)$;
9) $(\forall a;b;c \in K)(a*(b+c)=a*b+a*c)$.

Простым следствием из условий 1) – 9) являются следующие утверждения:

10) $(\forall a; b \in K)(a * b = b * a)$;

11) $(\forall a \in K)(a + a = 0)$.

Условия 1) – 9) и утверждения 10); 11) позволяют, в процессе осуществления тождественных преобразований языковых выражений кольца $\boldsymbol{K}$**,** использовать все правила, применяемые при тождественных преобразованиях целых рациональных выражений над обычными числовыми кольцами, т.е переставлять сомножители и слагаемые, группировать их, выносить общие множители за скобки и т.п. Отметим также, что согласно условиям 3) и 6), элементы 0 и 1 являются нейтральными элементами относительно операций $+$ и $*$ соответственно, а из условия 4) и утверждения 11) следует, что элемент $-a$, как элемент противоположный к a, совпадает с этим элементом, т.е $-a = a$.

Перейдем к построению кольцевой семантики исчисления высказываний, заданного в виде исчисления $Term$.

В этом случае $\sigma = \langle F_1^1; F_2^2;; c_1; c_2\rangle$ и $\lambda = \langle G_1^2; G_2^2; G_3^2; G_4^1; d_1; d_2\rangle$, т.е. сигнатура λ остается прежней. В качестве поля означивания возьмем произвольное булево кольцо с единицей, т.е. алгебраическую систему $\boldsymbol{K} = \langle K; +; *; 1; 0\rangle$, как алгебраическую систему сигнатуры σ, считая, что интерпретация φ этой сигнатуры на множестве K осуществляется по правилам: $\varphi(F_1^2) = {}^{\varphi}F_1^2 = +$; $\varphi(F_2^2) = {}^{\varphi}F_2^2 = *$; $\varphi(c_1) = {}^{\varphi}c_1$; $\varphi(c_2) = {}^{\varphi}c_2$.

Выделенное множество S так же, как и в случае булевозначного означивания, будет одноэлементным: $S = \{1\}$.

Переходя к построению алгебры $\boldsymbol{I}$, определим интерпретацию η сигнатуры λ на множестве K, полагая: $\eta(G_1^2) = {}^{\eta}G_1^2$; $\eta(G_2^2) = {}^{\eta}G_2^2$; $\eta(G_3^2) = {}^{\eta}G_3^2$; $\eta(G_4^1) = {}^{\eta}G_4^1$; $\eta(d_1) = 1$; $\eta(d_2) = 0$

, где операции ${}^{\eta}G_1^2$; ${}^{\eta}G_2^2$; ${}^{\eta}G_3^2$; ${}^{\eta}G_4^1$ задаются следующим образом:

1) $(\forall a; b \in K)\left({}^{\eta}G_1^2(a; b) = (a + b) + (a * b)\right)$;

2) $(\forall a; b \in K)\left({}^{\eta}G_2^2(a; b) = a * b\right)$; (3)

3) $(\forall a; b \in K)\left({}^{\eta}G_3^2(a; b) = (1 + a) + (a * b)\right)$;

4) $(\forall a \in K)\left({}^{\eta}G_4^1(a) = 1 + a\right)$.

Таким образом, основные операции алгебры $\boldsymbol{I}$ действительно являются термальными операциями системы $\boldsymbol{K}$.

Предложение 1. Алгебра $\boldsymbol{I} = \langle K; {}^{\eta}G_1^2; {}^{\eta}G_2^2; {}^{\eta}d_1; {}^{\eta}d_2\rangle$ является интерпретацией формального языка термального исчисления $Term$.

Доказательство. Согласно определениям (3),

$^{\eta}G_1^2(x;y) = {}^{\varphi}F_1^2\left({}^{\varphi}F_1^2(x;y); {}^{\varphi}F_2^2(x;y)\right);$
$^{\eta}G_2^2(x;y) = {}^{\varphi}F_2^2(x;y);$
$^{\eta}G_3^2(x;y) = {}^{\varphi}F_1^2\left({}^{\varphi}F_1^2({}^{\varphi}c_1;x); {}^{\varphi}F_2^2(x;y)\right);\ {}^{\eta}G_4^1(x) = {}^{\varphi}F_1^2({}^{\varphi}c_1;x).$

Таким образом, основные операции алгебры $\boldsymbol{I}$ являются термальными операциями системы $\boldsymbol{K}$, т.е, в соответствии с определением 1, алгебра $\boldsymbol{I}$ действительно является интерпретацией исчисления $Term$.

Предложение 2. Интерпретация $\boldsymbol{I} = \langle K;\ {}^{\eta}G_1^2;\ {}^{\eta}G_2^2;\ {}^{\eta}d_1;\ {}^{\eta}d_2\rangle$ является семантической интерпретацией термального исчисления $Term$.

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить выполнимость условий а) – в) определения 3.

а) Докажем общезначимость аксиом (термов) t_5 и t_{10}. Пусть $a; b; c$ –произвольные элементы множества K. Тогда

$^{\eta}t_5(a;b;c) = {}^{\eta}G_3^2\left({}^{\eta}G_3^2(a;b);\ {}^{\eta}G_3^2({}^{\eta}G_3^2(a;c);\ {}^{\eta}G_3^2(a;\ {}^{\eta}G_2^2(b;c)))\right) =$

$=$
$\left(1 + {}^{\eta}G_3^2(a;b)\right) + ({}^{\eta}G_3^2(a;b) * {}^{\eta}G_3^2({}^{\eta}G_3^2(a;c);\ {}^{\eta}G_3^2(a;\ {}^{\eta}G_2^2(b;c))) =$

$= 1 + ({}^{\eta}G_3^2(a;b) + ({}^{\eta}G_3^2(a;b) * {}^{\eta}G_3^2({}^{\eta}G_3^2(a;c);\ {}^{\eta}G_3^2(a;\ {}^{\eta}G_2^2(b;c)))) =$
$=$
$1 + {}^{\eta}G_3^2(a;b) * (1 + 1 + {}^{\eta}G_3^2(a;c) + ({}^{\eta}G_3^2(a;c) *$
${}^{\eta}G_3^2(a;\ {}^{\eta}G_2^2(b;c)))) =$

$= 1 + {}^{\eta}G_3^2(a;b) * {}^{\eta}G_3^2(a;c) * (1 + {}^{\eta}G_3^2(a;b*c)) =$
$= 1 + (1 + a + a*b) * (1 + a + a*c) * (1 + 1 + a + a*b*c) =$
$= 1 + (1 + a + a*b + a + a + a*b + a*c + a*c + a*b*c) * (a +$
$a*b*c) =$

$= 1 + (1 + a + a*b*c) * (a + a*b*c) =$
$= 1 + a + a + a*b*c + a*b*c + a*b*c + a*b*c = 1$

а.2)
$^{\eta}t_{10}(a) = {}^{\eta}G_3^2\left(a;\ {}^{\eta}G_4^1\left({}^{\eta}G_4^1(a)\right)\right) = 1 + a + {}^{\eta}G_4^1({}^{\eta}G_4^1(a) = 1 + a +$
$1 + {}^{\eta}G_4^1(a) = a + 1 + a = 1$
.

Таким образом для любых $a; b; c \in K$: ${}^{\eta}t_5(a;b;c) \in S$ и ${}^{\eta}t_{10}(a) \in S$, т.е термы (аксиомы) t_5 и t_{10} являются общезначимыми.

Общезначимость остальных термов (аксиом) проверяется аналогичным образом.

б) Убедимся в том, что правило заключения сохраняет общезначимость термов.

Пусть термы $t_1 = t_1(x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $t_3 = t_3(x_1; x_2; \dots x_n; y_1; y_2; \dots; y_m)$ являются общезначимыми и $t_2 = M.P.(t_1; t_2)$. Тогда, в соответствии с определением правила заключения, $t_3 = {}^{\eta}G_3^2(t_1; t_2)$.

Если $a_1; a_2; \dots a_n; b_1; b_2; \dots; b_m$ – произвольные элементы из K, то, согласно общезначимости термов t_1 и t_3, будем иметь:

$${}^{\varphi}t_2(\, a_1; a_2; \dots; a_n) = 1 \text{ и } {}^{\eta}t_3(a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_m)) = 1.$$

Тогда

$${}^{\eta}t_3(a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_m)) = 1 + {}^{\eta}t(\, a_1; a_2; \dots; a_n) +$$
$$+ {}^{\eta}t(a_1; a_2; \dots; a_n) * {}^{\eta}t_3(a_1; a_2; \dots a_n; b_1; b_2; \dots; b_m)) = 1 + 1 + 1 * 1 = 1$$

, т.е терм t_3 также является общезначимым.

в) Пусть $t_1 = t_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \in Term\,\lambda$. Аналогично тому, как это было сделано для булевозначной семантики (см. пункт 4), предположим, что термы t и $G_4^1(t)$ являются общезначимыми, т.е. ${}^{\eta}t(\, a_1; a_2; \dots; a_n) = 1$ и ${}^{\eta}G_4^1({}^{\eta}t(\, a_1; a_2; \dots; a_n)) = 1\,)$ для любых $a_1; a_2; \dots; a_n \in K$. Но, с другой стороны, ${}^{\eta}G_4^1({}^{\eta}t(\, a_1; a_2; \dots; a_n)) = 1 + {}^{\eta}t(\, a_1; a_2; \dots; a_n) = 1\; + 1 = 0$, что противоречит предположению об общезначимости терма $G_4^1(t(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Переходя к построению порядковой семантики исчисления высказываний, заданного в форме исчисления $Term$, приведем некоторые из основных понятий, связанных с определением булевой решетки.

Пусть P – отношение частичного порядка, заданное на множестве M. Частично упорядоченное множество $\boldsymbol{M} = \langle M; P\rangle$ называется решеткой, если для любых элементов $a; b \in M$ в M существует точная верхняя грань $sup\{a; b\}$ и точная нижняя грань $inf\{a; b\}$. Таким образом, в любой решетке $sup\{x; y\}$ и $inf\{x; y\}$ являются бинарными алгебраическими операциями. Если любая из этих операций дистрибутивна относительно другой, то решетка M называется дистрибутивной.

Решетка $\boldsymbol{M} = \langle M; P\rangle$ называется булевой, если выполнены следующие условия:

1) $\boldsymbol{M}$ дистрибутивна;

2) $\boldsymbol{M}$ имеет наименьший и наибольший элементы (эти элементы обозначаются через 0 и 1);

3) для любого элемента $a \in M$ существует элемент $b \in A$, такой, что $sup\ \{a; b\} = 1$ и $inf\ \{a; b\} = 0$.

Элемент $\boldsymbol{b}$, о котором идет речь в условии 3), называется дополнением элемента a в $\boldsymbol{M}$.

В качестве следствий из условий 1) – 3) можно получить следующее утверждение: в булевой решетке $\boldsymbol{M}$ любой элемент a ее основного множества имеет единственное дополнение. Единственность дополнения для каждого элемента в булевой решетке $\boldsymbol{M}$ позволяет на основном множестве M этой решетки определить одноместную алгебраическую операцию C в соответствии со следующим правилом:

$(\forall a \in M)(C(a) = b$, где b – элемент из условия 3).

Таким образом, отправляясь от булевой решетки $\boldsymbol{M}$, можно получить алгебраическую систему $\boldsymbol{BM} = \langle M; {}^{\varphi}F_1^2; {}^{\varphi}F_2^2; {}^{\varphi}F_3^1; {}^{\varphi}c_1; {}^{\varphi}c_2\rangle$ сигнатуры $\delta = \langle F_1^2; F_2^2 F_3^1; c_1; c_2\rangle$, где интерпретация φ этой сигнатуры задается следующим образом:

$$\varphi(F_1^2) = {}^{\varphi}F_1^2; \varphi(F_2^2) = {}^{\varphi}F_2^2; \varphi(F_3^1) = {}^{\varphi}F_3^1; \varphi(c_1) = {}^{\varphi}c_1 = 1; \varphi(c_1) = {}^{\varphi}c_2 = 0$$

,

а операции ${}^{\varphi}F_1^2$; ${}^{\varphi}F_2^2$; ${}^{\varphi}F_3^1$ определяются на множестве $\boldsymbol{M}$ так:

$(\forall a; b \in M)({}^{\varphi}F_1^2(a; b) = sup\ \{a; b\});$

$(\forall a; b \in M)({}^{\varphi}F_2^2(a; b) = inf\ \{a; b\});$

$(\forall a \in M)({}^{\varphi}F_3^1(a) = C(a)).$

Известно [4], что алгебраическая система

$\boldsymbol{BM} = \langle M; sup\ \{a; b\}; inf\ \{a; b\}; C; 1; 0\rangle$

является булевой алгеброй.

Исходя из булевой алгебры $\boldsymbol{BM}$, как поля означивания с выделенным подмножеством $S = \{1\}$, можно, следуя общей схеме построения булевозначной семантики (см. пункт 4), получить новую булевозначную семантическую интерпретацию исчисления высказываний.

В связи с тем что отправной точкой в процедуре построения этой семантики являлось частично упорядоченное множество $\boldsymbol{M} = \langle M; P\rangle$, эта семантика и была названа порядковой.

Предложенное в статье обобщение схемы построения семантических интерпретаций пропозициональных исчислений и ее конкретизация применительно к исчислению высказываний, определяя реальные возможности для строгого разделения синтаксической и семантической составляющих этого исчисления, представляют собой удобное поле развертывания системы понятий, технологических средств и канонических конструкций, определяющих содержательную сущность метода формальных аксиоматических теорий.

Использование конкретных алгебраических систем, в качестве полей интерпретаций, обеспечивает в то же время возможности рассмотрения их в качестве потенциальных носителей математических структур, свойственных другим классам моделей и алгебр. Тем самым предложенный подход к изучению логических исчислений способствует формированию аналогового мышления и общей методологической культуры студентов.

Список литературы

1. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979. 558 с.
2. Философский энциклопедический словарь. М.: Сов. энцикл., 1983. 840 с.
3. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. М.: Наука, 1979. 320 с.
4. Гончаров С.С., Дроботун Б.Н., Никитин А.А. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении: монография. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2007. 275 с.

ABOUT CALCULATION OF STATEMENTS

B.N. Drobotun, G.S. Dzharasova, N.B. Egimbaeva

Pavlodar State University of the name S. Toraigyrova

In this work: it is concretized about calculation of statements. The general scheme of creation of semantic interpretations of propositional calculations. Thermal calculation of Term is defined, as most consistently formalized option of calculation of statements. It is defined possibilities of strict division of syntax and semantics within calculation of Term. They are shown on examples of creation of nonconventional semantic interpretations of this calculation.

Keywords*: signature, the interpretation of the algebraic system, syntax, semantics, axiom, a term calculus, field deployment.*

Об авторах:

ДРОБОТУН Борис Николаевич – доктор педагогических наук, профессор кафедры «Математики» Павлодарского государственного университета им. С. Торайгырова (140008, Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64), e-mail: drobotun.nina@mail.ru

ДЖАРАСОВА Гульжан Сагудаллаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Математики» Павлодарского государственного университета им. С. Торайгырова (140008, Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64), e-mail: yulzhan@mail.ru

ЕГИМБАЕВА Нуржамал Балтабаевна – магистрант кафедры «Математики» Павлодарского государственного университета им. С. Торайгырова (140008, Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64), e-mail: NUR_PAV @mail.ru