

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВБЛИЗИ
ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ТЕЛЕ ИЗ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО
МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ИХ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ**

Рябова О.А., Зингерман К.М.
Кафедра вычислительной математики

Поступила в редакцию 15.06.2007, после переработки 16.10.2007.

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии в теле из нелинейно-упругого сжимаемого материала с близко расположенными жесткими круговыми включениями при конечных деформациях. Исследуется зависимость напряжения от расстояния между включениями.

The problem of stress distribution in nonlinearly elastic solids with rigid circular inclusions is considered under the conditions of finite strains. It is investigated how the stress depends on distance between inclusions.

Ключевые слова: нелинейно-упругое тело, жесткие включения, конечные деформации.

Keywords: nonlinearly elastic solid, rigid inclusions, finite strains.

Введение

Рассматривается решение плоской задачи о распределении напряжений в теле из материала Мурнагана с двумя жесткими круговыми включениями при конечных деформациях. Нелинейная задача решается методом последовательных приближений (методом малого параметра). Решение линеаризованной задачи осуществляется методом Мухелишвили. При решении линеаризованной задачи используется метод последовательных приближений Шварца. Исследуются нелинейные эффекты, вызванные как физической, так и геометрической нелинейностью, анализируется влияние взаимного расположения включений на концентрацию напряжения.

1. Постановка задачи

Бесконечно-протяженное нелинейно-упругое тело содержит два круговых включения. В начальном (ненапряженном) состоянии в теле отсутствуют напряжения и деформации. Затем под воздействием внешней нагрузки, приложенной к телу, в нем накапливаются начальные большие деформации и напряжения. Тело переходит в конечное состояние.

Предполагается, что главный вектор внешних сил, приложенных к контуру каждого включения, равен нулю. Математическую постановку задачи будем рассматривать в координатах начального (недеформированного) состояния. Обозначим начальное состояние как нулевое (индекс 0).

Используются следующие обозначения:

$\overset{0}{\nabla}$ — градиент;

u — вектор перемещений;

Ψ — аффино деформаций;

$\overset{0}{E}$ — тензор деформаций Грина:

$$\overset{0}{E} = \frac{1}{2} (\Psi \cdot \Psi^T - I);$$

σ — тензор полных истинных напряжений,

σ^∞ — тензор истинных напряжений на бесконечности;

γ_k — граница k -го включения ($k = 1, 2$).

С учетом введенных обозначений математическая постановка задачи имеет вид:

уравнение равновесия

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \left[\overset{0}{\Sigma} \cdot \Psi \right] = 0; \quad (1)$$

граничные условия

$$u|_{\gamma_k} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma|_\infty = \sigma^\infty; \quad (3)$$

Определяющие соотношения для материала Мурнагана:
тензор обобщенных напряжений

$$\begin{aligned} \overset{0}{\Sigma} = & \lambda \left(\overset{0}{E} : I \right) I + 2\mu \overset{0}{E} + C_3 \left(\overset{0}{E} : I \right)^2 I + \\ & C_4 \left(\left(\overset{0}{E} \right)^2 : I \right) I + 2C_4 \left(\overset{0}{E} : I \right) \overset{0}{E} + C_5 \left(\overset{0}{E} \right)^2, \end{aligned} \quad (4)$$

формула связи между тензором полных истинных напряжений и тензором обобщенных напряжений

$$\sigma = (1 + \Delta^{-1}) \Psi^* \cdot \overset{0}{\Sigma} \cdot \Psi, \quad (5)$$

где

$$1 + \Delta = \det \Psi,$$

$$\Psi = I + \overset{0}{\nabla} u. \quad (6)$$

2. Методы решения задачи

Для решения задачи использован метод последовательных приближений. В качестве параметра q выбрано отношение σ_{\max}/μ , где $\sigma_{\max} = \max_{i,j} |\sigma_{i,j}^{\infty}|$. Например, для вектора перемещений u такое разложение может быть записано в форме

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u^{(i)}, \quad u^{(i)} \sim q^{i+1}. \quad (7)$$

Таким образом, решение исходной нелинейной задачи сводится к последовательному решению линеаризованных задач. Индекс, соответствующий номеру приближения, далее не указывается.

Линеаризованная задача решается методом Мусхелишвили [3]. Мусхелишвили вводит в рассмотрение комплексную переменную $z = x + iy$ и функции от этой переменной

$$\Phi(z) = \frac{d\varphi}{dz}, \quad \Psi(z) = \frac{d\psi}{dz}, \quad (8)$$

аналитические в области, занимаемой телом, причем

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Gamma, \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Gamma',$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_0(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \Psi_0(z) = 0,$$

следовательно

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \Gamma z, \quad \psi(z) = \psi_0 + \Gamma' z, \quad (9)$$

Γ, Γ' определяются из напряжений на бесконечности.

Также вводится функция w – комплексное представление вектора перемещения; $w = u + iv$, где u и v – компоненты вектора перемещения для рассматриваемого приближения. Решение задачи ищется в виде

$$w = w_{\text{одн.}} + w_{\text{част.}}, \quad (10)$$

где $w_{\text{одн.}}$ – решение однородного уравнения, а $w_{\text{част.}}$ – некоторое частное решение линеаризованных уравнений равновесия.

Далее более подробно рассматривается нахождение однородного решения, удовлетворяющего граничным условиям на контуре включения. Нахождение частного решения осуществляется аналогично [1].

Напряжения ищутся по формулам

$$S_{I_{\text{одн.}}} = (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{\text{одн.}} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad (11)$$

$$S_{II_{\text{одн.}}} = (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})_{\text{одн.}} = -2[\overline{\Psi(z)} + z\overline{\Phi'(z)}], \quad (12)$$

перемещение —

$$w_{\text{одн.}} = \frac{1}{2\mu} \left(\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \right). \quad (13)$$

Решение линейризованной задачи сводится к отысканию $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ — функций, которые для случая одного включения можно найти по следующим формулам [4]:

$$\varphi_0(\xi) = \frac{1}{\kappa} \frac{\mu}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g_0(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi) = & -\frac{\kappa}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{\varphi_0(\sigma)} d\sigma}{\sigma - \xi} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi_0'(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi} + \\ & + \frac{\mu}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{g_0(\sigma)} d\sigma}{\sigma - \xi}, \end{aligned} \quad (15)$$

где γ — граница включения.

Рассмотрим частный случай бесконечно-протяженного тела с двумя круговыми включениями. Будем считать, что бесконечная область, ограниченная контуром k -ого ($k = 1, 2$) включения, может быть конформно отображена на внешность единичного круга с помощью функции

$$z = \omega_k(\xi_k) = \alpha_k + \beta_k \xi_k. \quad (16)$$

В этом случае решение однородной задачи может быть получено методом последовательных приближений Шварца.

Начальное приближение берется в виде

$$S_{I_{\text{одн.}}}^{(0)} = (\sigma_{11} + \sigma_{22})^{\infty} = \sigma_I^{\infty},$$

$$S_{II_{\text{одн.}}}^{(0)} = (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})^{\infty} = \sigma_{II}^{\infty}.$$

Функция g в правой части на начальном этапе имеет вид

$$g^{(1)} = -\mathbf{w}^{(0)},$$

где $\mathbf{w}^{(0)}$ — перемещение, соответствующее некоторому частному решению.

Здесь и далее нижний индекс 0 не указывается.

На j -ом шаге итерационного процесса находятся аналитические функции $\varphi^{(j)}(\xi_k)$, $\psi^{(j)}(\xi_k)$ на k -ом контуре из граничного условия

$$\kappa \varphi^{(j)}(\xi_k) - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{\xi_k} \right) \overline{\varphi^{(j)}(\xi_k)} - \overline{\psi^{(j)}(\xi_k)} = 2\mu g^{(j)} \quad (17)$$

по следующим формулам

$$\varphi^{(j)}(\xi_k) = -\frac{1}{\kappa} \frac{\mu}{\pi i} \oint_{|\sigma|=1} \frac{g^{(j)}(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi_k}, \quad (18)$$

$$\psi^{(j)}(\xi_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\sigma|=1} \left(\frac{\bar{a}}{b} + \frac{\bar{b}}{b\sigma} \right) \frac{(\varphi^{(j)})'(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi_k} + \frac{\mu}{\pi i} \oint_{|\sigma|=1} \frac{\overline{g^{(j)}(\sigma)} d\sigma}{\sigma - \xi_k}. \quad (19)$$

Затем определяются $S_{I_{\text{одн.}}}^{(j)}$, $S_{II_{\text{одн.}}}^{(j)}$ и находится функция $g^{(j+1)}$ в правой части граничного условия для следующей итерации:

$$S_{I_{\text{одн.}}}^{(j)} = S_{I_{\text{одн.}}}^{(j-1)} + 2 \left(\overline{\Phi^{(j)}(\xi_k)} + \overline{\Phi^{(j)}(\xi_k)} \right), \quad (20)$$

$$S_{II_{\text{одн.}}}^{(j)} = S_{II_{\text{одн.}}}^{(j-1)} - 2 \left(\overline{\Psi^{(j)}(\xi_k)} - \frac{\omega_k(\xi_k) \overline{\Phi'^{(j)}(\xi_k)}}{\omega'_k(\xi_k)} \right), \quad (21)$$

$$g^{(j+1)} = g^{(j)} - \frac{1}{2\mu} \left(\kappa \varphi^{(j)}(\xi_k) - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{b} \xi_k \right) \overline{\varphi'^{(j)}(\xi_k)} - \overline{\psi^{(j)}(\xi_k)} \right). \quad (22)$$

Номер контура k на каждом шаге меняется.

3. Результаты

Численные значения получены с помощью программы аналитических вычислений на ЭВМ [1].

В качестве примера взят материал – оргстекло ($\lambda = 0.39 \cdot 10^{12}$ дин/см²; $\mu = 0.186 \cdot 10^{12}$ дин/см²; $C_3 = -0.013 \cdot 10^{12}$ дин/см²; $C_4 = -0.07 \cdot 10^{12}$ дин/см²; $C_5 = 0.063 \cdot 10^{12}$ дин/см²) [2].

Сначала расчеты проведены для случая двух включений одинакового радиуса $R = 1$. Центры включений лежат на оси OX .

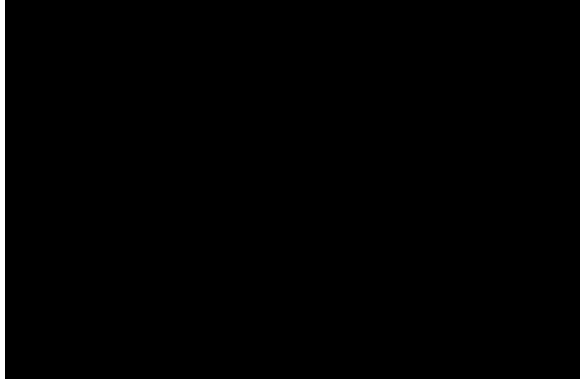


Рис. 1: Всестороннее растяжение тела с двумя жесткими круговыми включениями.

На рис. 2 приведены эпюры контурных истинных напряжений на границе включений при всестороннем растяжении (см. рис. 1) ($\sigma_{11}^{\infty}/\mu = 0.15$, $\sigma_{22}^{\infty}/\mu = 0.15$).

Включения расположены на расстоянии радиуса R друг от друга (расстояние между точками A и B). В правом верхнем углу рисунка дан масштаб. Сплошная линия показывает линейное решение задачи, пунктирная — нелинейное решение, жирная сплошная линия — контур включения. По рисунку видно, что точки A и B , лежащие на оси OX , — точки максимальной концентрации истинных контурных напряжений.

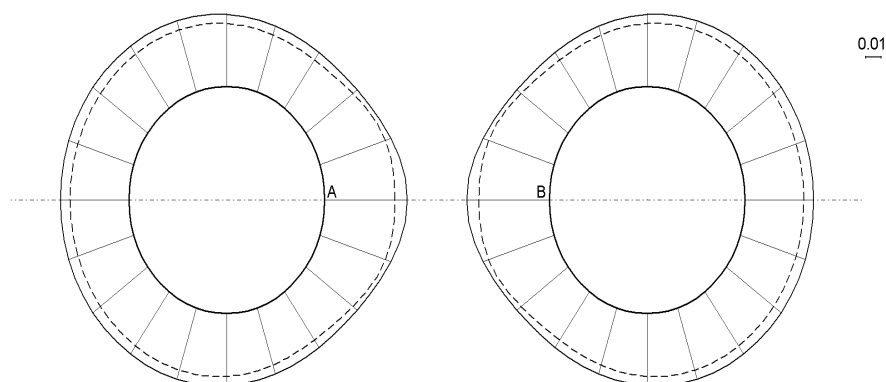


Рис. 2: Эпюры полных истинных напряжений $\sigma_{\phi\phi}/\mu$ для двух включений при всестороннем растяжении.

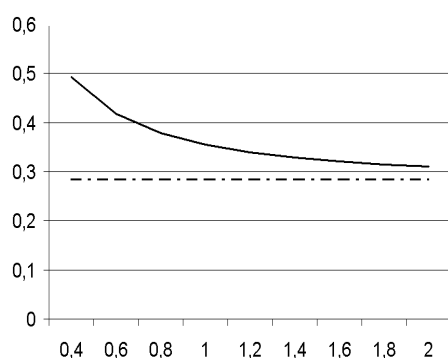


Рис. 3: Зависимость полных истинных напряжений σ_{rr}/μ в точке A от расстояния между включениями.

На рис. 3 показано изменение концентрации напряжений в точке A в зависимости от расстояния между включениями. Для сравнения пунктиром показано полное истинное напряжение σ_{rr}/μ для случая одного включения. Как видно из рис. 3, чем ближе включения друг к другу, тем больше напряжение; при удалении включений друг от друга напряжение σ_{rr}/μ асимптотически стремится к постоянной величине, приближенно равной напряжению σ_{rr}/μ для случая одного включения.

Далее расчеты проведены для случая одноосной растягивающей нагрузки ($\sigma_{11}^{\infty} = 0$, $\sigma_{22}^{\infty}/\mu = 0.15$). На рис. 5 приведены эпюры контурных истинных напряжений на границе двух одинаковых включений при одноосном растяжении (см. рис. 4).

Расстояние между точками A и B равно $R = 1$. В правом верхнем углу рисунка дан масштаб. Сплошная линия показывает линейное решение задачи, пунктирная — нелинейное решение, жирная сплошная линия — контур включения.

На рис. 6 приведены графики зависимости полных истинных напряжений σ_{rr}/μ от расстояния между включениями для случая, когда правое включение в 3 раза



Рис. 4: Одноосное растяжение тела с двумя жесткими круговыми включениями.

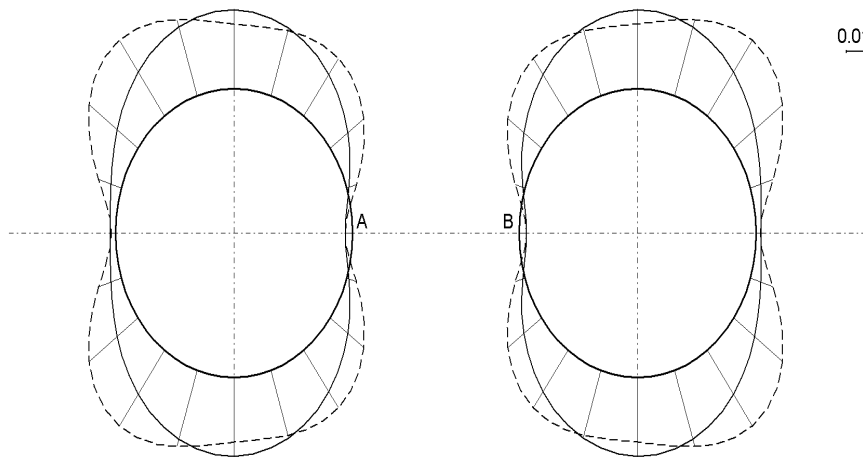


Рис. 5: Эпюры полных истинных напряжений $\sigma_{\phi\phi}/\mu$ для двух включений при одноосном растяжении $\sigma_{22}^{\infty}/\mu = 0.15$.

больше, чем левое ($R_{л} = 1, R_{п} = 3$). На рис. 6 а) — пунктирная линия показывает изменение напряжения в точке *A*, на рис. 6 б) — пунктирная линия показывает изменение напряжения в точке *B*.

Сплошной линией показано напряжение σ_{rr}/μ в тех же точках для случая одинаковых по размеру включений. Когда включения расположены достаточно далеко друг от друга, то напряжение в точке *A* больше по абсолютной величине, чем для случая одинаковых по величине включений. Чем ближе друг к другу расположены включения, тем меньше напряжение по абсолютной величине. Причем, начиная с некоторого расстояния (приблизительно равного 0,5), напряжение становится меньше по абсолютной величине, чем для случая одинаковых включений. Как видно из рис. 6 б), для включения, большего по размеру, в точке *B* наблюдается та же закономерность, но менее выраженная. То есть разница между напряжением для случая включений, разных по величине, и для случая одинаковых включений меньше, чем в точке *A*.

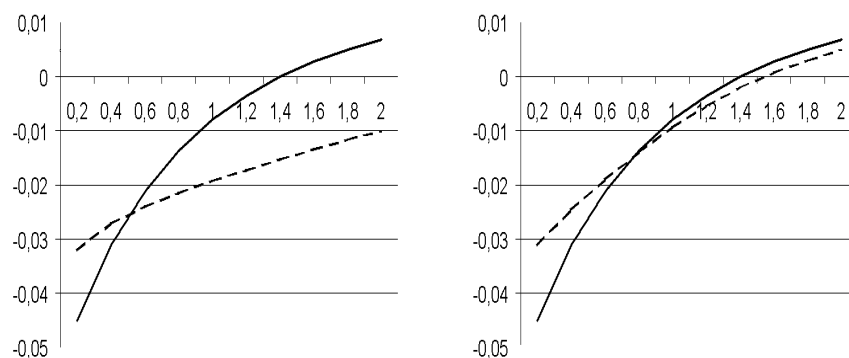


Рис. 6: а) Зависимость полных истинных напряжений σ_{rr}/μ в точке А от расстояния между включениями; б) Зависимость полных истинных напряжений σ_{rr}/μ в точке В от расстояния между включениями.

Далее рассмотрено влияние несимметричности расположения включений на концентрацию напряжений. На рис. 7 показано взаимное расположение включений.

На рис. 8 показано, как изменяется напряжение σ_{rr}/μ в точке С, т. е. в точке наибольшей концентрации напряжений, в зависимости от расстояния между включениями. Под расстоянием между включениями здесь подразумевается разница между абсциссами центров включений (Δ). Пунктиром показано напряжение σ_{rr}/μ для случае одного включения. Из рис. 8 видно, что при большом расстоянии между включениями напряжение σ_{rr}/μ меньше, чем для случая одного включения. Чем ближе друг к другу расположены включения, тем больше напряжение. Причем, начиная с некоторого расстояния между абсциссами центров включений, приблизительно равного 2,7, напряжение становится больше, чем для случая одного включения.

Расчеты для случая физически линейного материала ($C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = 0$) дают приблизительно те же напряжения, что и указанные ранее, поправка составляет примерно 10%, это объясняется тем, что константы для оргстекла (C_3, C_4, C_5) достаточно малы по сравнению с μ .

Для исследования влияния физической нелинейности на напряженно-деформированное состояние был взят материал — медь. На рис. 9 приведены зависимости σ_{11} от x : слева для меди ($\lambda = 1.07 \cdot 10^{12}$ дин/см²; $\mu = 0.477 \cdot 10^{12}$ дин/см²; $C_3 = -0.93 \cdot 10^{12}$ дин/см²; $C_4 = 1.72 \cdot 10^{12}$ дин/см²; $C_5 = -5.31 \cdot 10^{12}$ дин/см²) [2], справа для физически линейного материала ($C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = 0$). Сплошной линией показано линейное решение, пунктирной — нелинейное. Расчеты проведены для случая одноосной растягивающей нагрузки ($\sigma_{11}^\infty = 0, \sigma_{22}^\infty/\mu = 0.15$) (см рис. 4). Рассматриваются два включения одинакового радиуса $R = 1$, центры включений лежат на оси ОХ, расстояние между точками А и В равно R . Из рисунка видно, что физическая нелинейность существенно влияет на напряжение, поправка составляет примерно 35%.

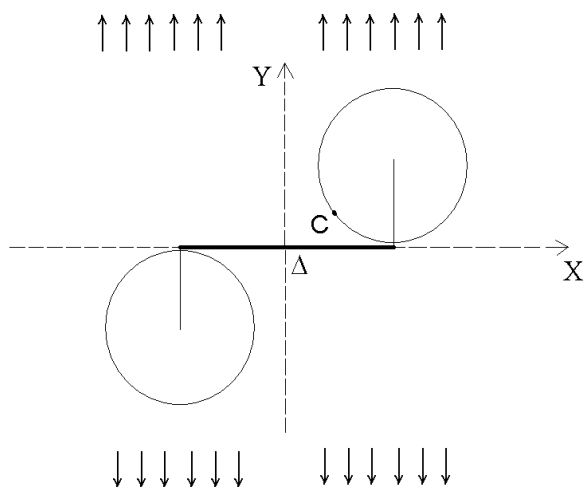


Рис. 7: Несимметричное расположение включений в декартовой системе координат.

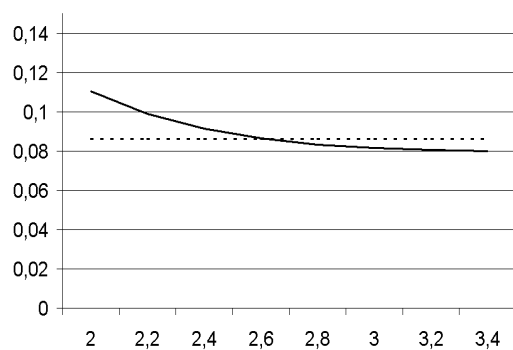


Рис. 8: Зависимость полных истинных напряжений σ_{rr}/μ в точке от расстояния между включениями.

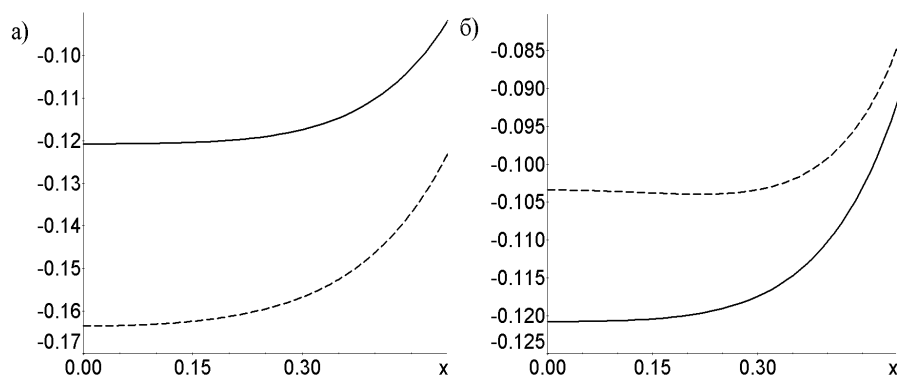


Рис. 9: Зависимость полных истинных напряжений σ_{11} от x : а) материал медь б) физически линейный материал.

Заключение

Таким образом, в данной статье рассмотрено решение плоской задачи теории упругости о распределении напряжений в бесконечно-протяженном нелинейно-упругом теле с жесткими круговыми включениями, проведен анализ влияния расстояния между включениями и взаимного расположения включений на концентрацию напряжения, исследованы нелинейные эффекты, вызванные физической нелинейностью.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-01-00682).

Список литературы

- [1] Левин В.А. Зингерман К.М. Плоские задачи теории многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М.: Физматлит, 2002. 272 с.
- [2] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [3] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [4] Рябова О.А. Зингерман К.М. Задача о жестком включении в теле из нелинейно-упругого сжимаемого материала при конечных деформациях // Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация. Тверь: ТГУ, 2004. — С. 172 - 180.