

УДК 314.182; 004.942

## **ТЕНДЕНЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РОСТА НАРОДОНАСЕЛЕНИЯ В МОДЕЛИ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ**

**А.Н.Кудинов, В.Н.Рыжиков, В.П.Цветков, И.В. Цветков**

Тверской государственной университет, г. Тверь

В работе на основе модели мультифрактальной динамики построена мультифрактальная модель роста народонаселения. В рамках этой модели дана классификация всевозможных процессов роста народонаселения. Проведен расчет параметров модели за последние 62 года. Построен график функции  $h$ , из которого наглядно видна тенденция ускоряющегося роста народонаселения в ближайшее время. На основе разработанной модели сделан прогноз роста народонаселения на ближайшие 90 лет. Из него следует удвоение численности народонаселения 2011 года в 7 млрд. человек в 2092 $\pm$ 1 году.

**Ключевые слова:** мультифрактальная динамика, народонаселение, классификация процессов, функция  $h$ , прогноз

В настоящее время численность народонаселения Земли составляет свыше 7 млрд. человек. Средний темп роста народонаселения с 2008 года по 2012 годы составляет 1,2 %. Это означает, что при сохранении такого темпа, человечество достигнет отметки 14 млрд. человек уже к концу нашего столетия. Скорость роста народонаселения является одним из важнейших количественных показателей, характеризующих качество условий проживания человечества на Земле. В ряде работ [1] утверждается, что на величине 14 млрд. человек численность народонаселения стабилизируется. Насколько такой сценарий близок к действительности покажет время.

Сложность описания динамики роста народонаселения несомненно связана с тем, что человеческое общество действительно предельно сложная система. Многообразие сценариев динамики народонаселения, опирающихся на различные механизмы, влияющие на демографические процессы, породило множество математических моделей описывающих данный процесс [2-5].

Численность народонаселения будем описывать функцией  $y(t)$ . Разобьем ее на две составляющие: тренд  $\bar{y}(t)$  и осцилляции относительно тренда  $\tilde{y}(t)$ :

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t) \quad (1)$$

Характерное время изменения  $\tilde{y}(t)$  составляет 1 год, а  $\bar{y}(t)$  не менее 20 – 30 лет.

В большинстве моделей тренд  $\bar{y}(t)$  считается гладкой или кусочно гладкой функцией и находится как решение дифференциального уравнения.

Первая из широко известных математических моделей роста народонаселения была предложена Т. Мальтусом [2], в которой  $\bar{y}(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{\bar{y}}(t) = \alpha \bar{y}(t) \quad (2)$$

Коэффициент  $\alpha$  в (2) получил название мальтузианского коэффициента. Согласно (2)  $\bar{y}(t) = Ce^{\alpha t}$ . Такой характер роста предполагает неизменной структуру человеческого общества и неограниченные территории и ресурсы. Поэтому мальтузианская модель не может быть реалистичной.

Вторая модель возникла в конце прошлого века [3, 4] и связана с использованием другого дифференциального уравнения

$$\dot{\bar{y}} = \beta \bar{y}^2(t) \quad (3)$$

Решение (3) дает  $\bar{y}(t) = \frac{c_1}{t_0 - t}$ . В этом случае  $\bar{y}(t)$  растет гораздо быстрее, чем в (2): по гиперболическому закону. Время  $t_0 = 2026$  год и соответствует демографической катастрофе. Данный закон получил название режима с обострением. В настоящее время имеет место значительное уклонение роста народонаселения от гиперболического закона, порядка 2 млрд. человек. Но если перенестись в далекие эпохи существования человека  $\alpha \cdot t \ll 1$  и  $\frac{t}{t_0} \ll 1$  оба закона дают одинаковый линейный рост  $\bar{y}(t)$ :

$$\bar{y}(t) = C \cdot (1 + \alpha t + o(\alpha t)) \quad (4)$$

$$\bar{y}(t) = \left(\frac{c_1}{t_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{t}{t_0} + o\left(\frac{t}{t_0}\right)\right)$$

В обеих моделях функции  $\bar{y}(t)$  и  $\tilde{y}(t)$  никак не связаны между собой.

В связи с важностью достаточно точного прогноза численности населения Земли на ближайшие несколько десятков лет для макроэкономических исследований и неоднозначность существующих прогнозов, сейчас является актуальным уточнение существующих и разработка принципиально новых моделей роста народонаселения. В частности такая модель может быть построена на основе концепции

мультифрактальной динамики (МФД) [6], разработанной авторами данной статьи.

Согласно МФД  $\bar{y}(t)$  аппроксимируется кусочно-линейной функцией, на каждом из участков которой

$$\bar{y}(t) = X(D)(t - t_0) + \bar{y}(t_0), \quad (5)$$

где  $t_0$  - начальный момент времени участка. В (5)  $D$  фрактальная размерность функции  $\tilde{y}(t)$  на том же участке. Естественно предполагается, что  $\bar{y}(t)$  является мультифрактальной кривой. На это, в частности, указывает факт отсутствия у функции  $y(t)$  свойства гладкости. Соотношение (5) вытекает из принципа самоподобия фракталов, согласно которому формирование тренда  $\bar{y}(t)$  обусловлено характером быстропеременной функции  $\tilde{y}(t)$ . Существенным отличием данной модели от двух предыдущих является формирования тренда на конечном временном интервале, а не локально.

**Основные уравнения мультифрактальной модели роста народонаселения.** В модели МФД [5] кусочно-линейный тренд  $\bar{y}(t)$  определяется формулой (5), и точность модели как  $\Delta = \max |\tilde{y}(t)|$  на рассматриваемом временном промежутке. Величины  $\bar{y}$ ,  $\tilde{y}$  будем измерять в естественном масштабе 1 млрд. человек, а скорость линейного тренда  $X$  в млрд.чел./год.

Согласно модели МФД  $X(D)$  определяется из уравнения:

$$A(D)X(D) + B_k X^3 = \eta. \quad (6)$$

Параметр  $\eta$  описывает эффективность влияния всех внешних факторов на рост народонаселения. Он также, как и  $X$ , измеряется в млрд.чел./год. По порядку величины  $\eta$  есть максимально возможная в данных условиях и на протяжении достаточно большого промежутка времени порядка столетия скорость роста народонаселения при самых благоприятных факторах.

Для коэффициента  $A(D)$  в (6) в МФД предложено следующее аналитическое представление

$$A(D) = \begin{cases} (D_0 - D)^{-1} & \text{при } 1 \leq D \leq D_0 \\ (D_0 - D_k)^{-1}(D_0 - D)^{-1}(D - D_k) & \text{при } D_0 \leq D \leq 2 \end{cases} \quad (7)$$

Параметры  $D_0, D_k, B_k$  и  $\eta$  выбирают из условия наилучшего согласия с опытными данными.

Функция  $A(D)$  выбрана так, чтобы описывать многообразие сценариев роста народонаселения.

В случае  $|D - D_k| \gg \eta^2(D - D_0)^2$ ,  $D - 1 \ll D_0$  и  $D < D_0$  решение уравнения (6) имеет вид линейной функции

$$X = \eta(D_0 - D). \quad (8)$$

Из (8) следует, что  $X = 0$  в точке  $D = D_0$ . Это равновесное значение  $D$ . Если выполняются только условия  $D_0 < D, D_k - D_0 \gg h^2(D - D_0)^2$ , то вместо (8)

$$X = \eta \frac{D_0 - D_k}{D - D_k} (D_0 - D_k). \quad (9)$$

В (9) при приближении  $D$  к  $D_k$  значение  $X$  резко возрастает. В точке  $D_k$  имеет место катастрофа  $A_3$  при  $\eta = 0$  с ростом  $\frac{1}{4} B_k X^4$ . В точке  $\left(\frac{A(D_0)^3}{3}\right) + \left(\frac{B_k^{1/2}}{2}\right)^2 = 0$  возникает уже катастрофа  $A_2$  при ненулевых значениях  $\eta$ . Вблизи  $D_k$  пренебречь членом с  $B_k$  уже нельзя. Упростим (6) заменой

$$X = \sqrt[3]{\frac{\eta}{B_k}} \xi(\lambda), \quad \lambda = \frac{-A(D)}{B_k \eta^{2/3}}. \quad (10)$$

Тогда (6) приобретает вид

$$\xi^2 - \frac{1}{\xi} = \lambda. \quad (11)$$

При  $\lambda < \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$  уравнение (11) имеет один вещественный корень  $\xi_1$ . Если  $\lambda > \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$ , то будет иметь место три вещественных корня  $\xi_{1,2,3}$ .

Это означает, что точка  $\lambda = \lambda_b = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$  является точкой бифуркации. В этой точке  $\xi_1(\lambda_1) = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ , а  $\xi_{2,3}(\lambda_b) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ .

**Классификация процессов роста народонаселения в модели МФД.** Уравнение (11) позволяет провести классификацию процесса роста народонаселения по характеру зависимости его решения от  $D$ . Проведем детальный анализ поведения  $\xi(D)$  для двух случаев значений коэффициента  $B_k$ :  $B_k < 0$  и  $B_k > 0$ . Для определенности возьмем  $D_0 = 1,61$ ;  $D_k = 1,86$ ;  $B_k = \pm 0,4$ ;  $\eta = 0,25$ . Графики  $\xi(D)$  приведены на Рис.1,2.

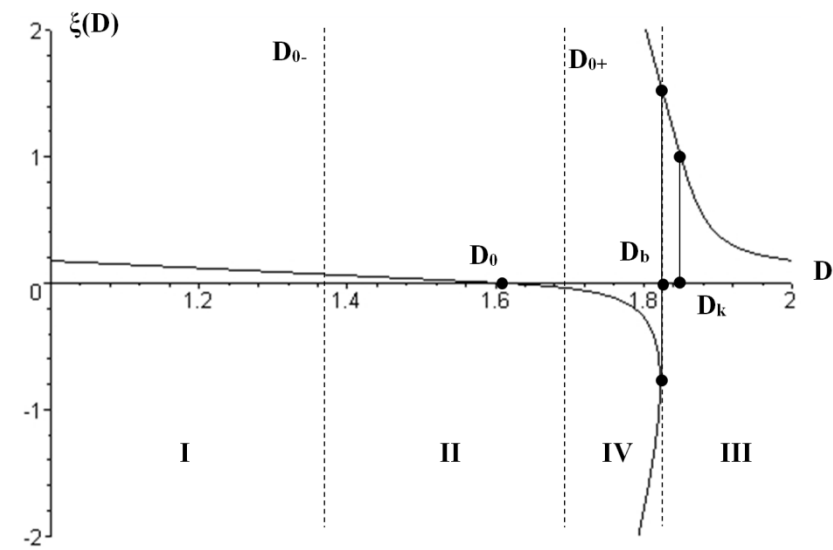


Рис.1. График функции  $\xi(D)$  при  $B_k = 0,4$

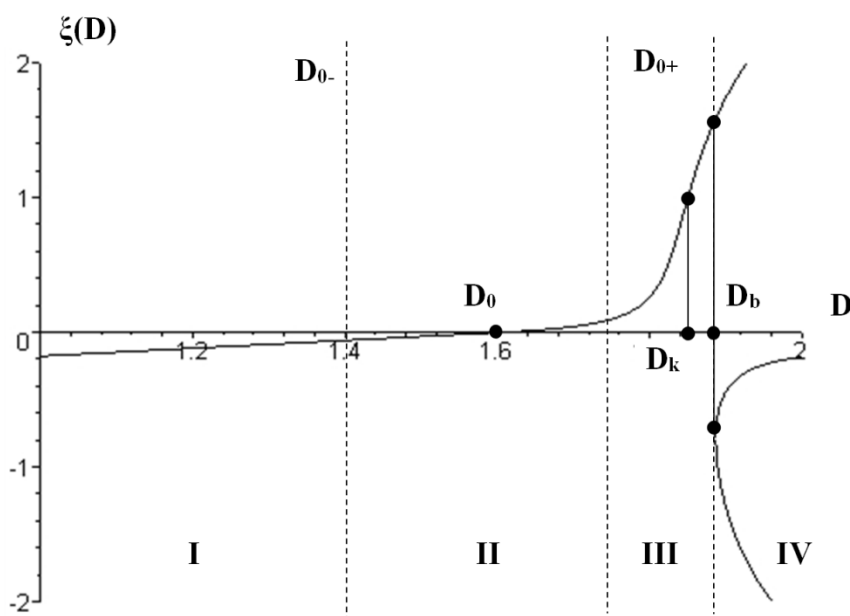


Рис.2. График функции  $\xi(D)$  при  $B_k = -0,4$

Рисунки 1,2 наглядно показывают наличие в нашей модели трех характерных точек:  $D_0$ ,  $D_k$ ,  $D_b$ . В точке  $D_0$   $\xi(D_0) = 0$  и  $X(D_0) = 0$ . В этой точке скорость роста народонаселения равна нулю и мы имеем

эффект стабилизации численности народонаселения. При небольшом превышении  $D$  величины  $D_0$  значение  $X$  будет отрицательно и численность народонаселения начнет сокращаться. Если  $D$  будет немного меньше  $D_0$ , то значение  $X$  будет наоборот увеличиваться. Вблизи точки  $D_0$  будет иметь место осцилляционный характер численности народонаселения.

Критическая точка  $D_k$  определяется условием  $A(D_k) = 0$  и вблизи нее становится определяющей нелинейная зависимость  $X$  от  $D$ . При достаточно малых  $B_k$  возникает или быстрый рост или убывание народонаселения в этой точке.

Точка бифуркации находится из условия  $\lambda = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$ .

Исключительная важность точки бифуркации  $D_b$  прежде всего связана с возможностью перехода в этой точке из данного состояния  $\xi_1(D_b)$ ,  $\xi_{2,3}(D_b)$ , в другое без изменения  $D$ . В точке  $D_b$  может происходить быстрый скачок численности народонаселения как с ростом так и понижением ее.

Обозначим  $D_{0-}$  и  $D_{0+}$  отстоящие от  $D$  на  $\pm(0,1 - 0,15)$ . Проведем через точки  $D_{0-}$ ,  $D_{0+}$ ,  $D_b$  вертикальные прямые. Тогда область значений  $\xi(D)$  и  $D$  будет разбита на четыре области I – IV, в каждой из которых характер поведения существенно различен.

В области I  $D < D_0$  справедливо линейное приближение  $X = \eta(D_0 - D)$  и знак  $X$  сохраняется. В этой области численность народонаселения будет монотонно расти при  $\eta > 0$  и монотонно убывать при  $\eta < 0$ .

В области II  $D_{0-} < D < D_{0+}$  также справедливо линейное приближение, но знак  $X$  будет меняться при переходе из состояния  $D < D_0$  в состояние  $D > D_0$ . Эта область будет осцилляционной.

В области III  $D_{0+} < D < D_b$  ( $B_k < 0$ ) и  $D > D_b$  ( $B_k > 0$ ) изменение скорости роста или убывания становится достаточно большим и определяется нелинейным законом (9). В ней имеет место катастрофа  $A_3$  при  $D = D_k$ .

В области IV  $D > D_b$  ( $B_k < 0$ ),  $D_{0+} < D < D_b$  ( $B_k > 0$ ) может иметь место бифуркационная катастрофа, связанная со скачками  $X$ .

В результате классификацию процессов роста народонаселения в зависимости от значений  $D$  и знака  $B_k$  можно наглядно представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

Зависимость значений  $D$  и знака  $B_k$

Знак $B_k$	I	II	III	IV
+1	$1 < D <$	$D_{0-} < D <$	$D_{0+} < D <$	$D_b < D <$
-1	$1 < D <$	$D_{0-} < D <$	$D_b < D <$	$D_{0+} < D <$

Особую наглядность процессам модели мультифрактальной динамики дает график зависимости функции  $h = D - D_0$  от времени для различных типов динамики, представленных в таблице 1. Он нами представлен на Рис. 3.

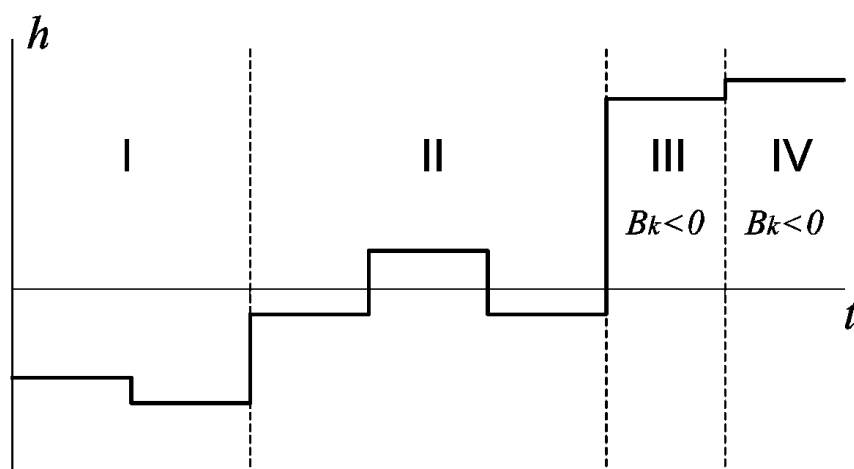


Рис.3. График функции  $h$  от времени для различных типов динамики

Из Рис. 3 видно, как сильно меняется характер функции  $h$  в зависимости от различных типов демографических процессов.

**Расчет параметров МФД.** Кусочно-линейный тренд реального роста народонаселения с 1950 года по настоящее время представлен на Рис.4.

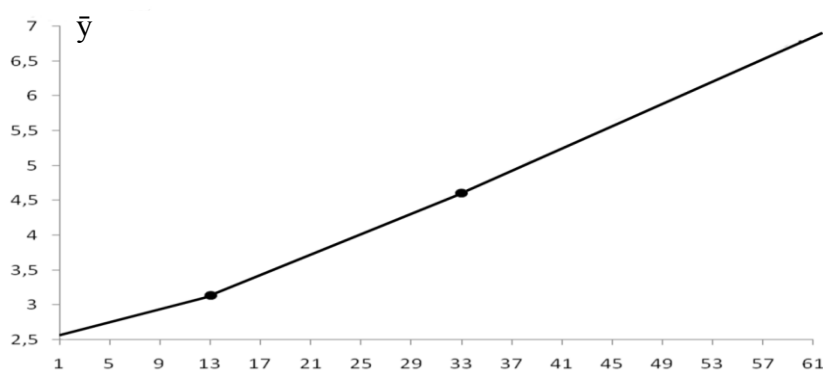


Рис.4. Кусочно- линейный тренд народонаселения

Как видно из Рис.4 реальный рост народонаселения не соответствует как экспоненциальному, так и гиперболическому законам. Кусочно-линейный тренд состоит из трех участков, на каждом из которых с высокой степенью точности численность народонаселения растет линейно. Для иллюстрации этого построим график функции  $\tilde{y}(t)$ , который приведен на Рис.5.

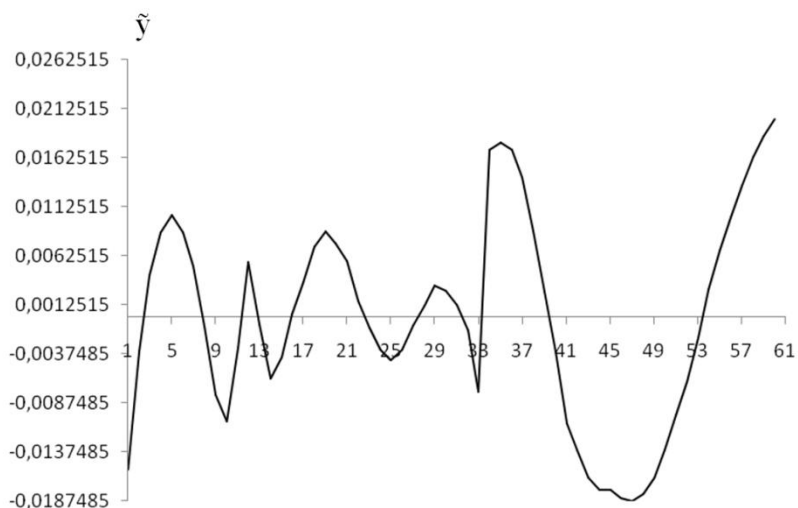


Рис.5. График функции отклонения от кусочно-линейного тренда

Из графика следует оценка максимального уклонения  $y(t)$  от тренда  $\bar{y}$   $\Delta = 0,018$ , что составляет 0,26%. При таком уклонении различие  $y(t)$  и  $\bar{y}(t)$  визуально не заметно.

Проведенные нами вычисления дают значения параметров МФД для роста народонаселения, представленные в таблице 2.

Таблица 2

Значения параметров МФД для роста народонаселения

$i$	1	2	3
$T_i$	12	20	30
$X_i$	0,0498	0,0736	0,0808
$D_i$	1,41	1,33	1,29
$D_0$	1,61		
$h_i$	-0,20	-0,28	-0,32
$\eta$	0,251		
$\Delta_i$	0,008	0,007	0,016



Значение  $D_k > D_0 = 1,61$  мы возьмем примерно отстоящее от  $D_0$  на 0,24, как и в финансовых процессах [7]. В результате  $D_k = 0,85$ , а значение  $D_b$  вычислим по значениям  $D_0, D_k, k, B_k = 0,4$ . В результате получим  $D_b = 1,78$ .

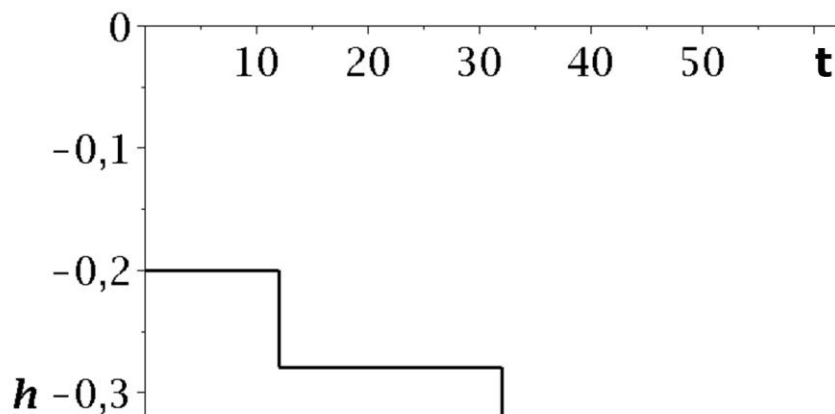


Рис.6. График функции  $h$ .

График функции  $h$  дан на Рис.6. Из него видно, что волны  $h$  - функции имеют период 20 – 30 лет и отрицательную амплитуду. Это говорит о принадлежности процесса роста народонаселения к монотонным процессам I типа и самоподобном механизме формирования кусочно-линейного тренда с коэффициентом самоподобия порядка 20 – 30. При этом темп роста амплитуды  $h$  - волны уменьшается:  $\frac{1}{2}(h_2 - h_1) = (h_3 - h_2)$ . Коэффициент линейного тренда  $X$  увеличился в втором периоде на 48% по сравнению с первым, в третьем всего на 10 % по сравнению со вторым.

Фрактальная размерность  $D$  кривой народонаселения во втором периоде уменьшилась на 6% по сравнению с первым, а в третьем уменьшилась всего на 3% по сравнению со вторым. Тенденция уменьшения  $D$  соответствует увеличению скорости роста народонаселения.

Значения  $D_1, D_2, D_3$  оказались существенно меньше равновесного значения  $D_0 = 1,61$ , соответствующего нулевой скорости роста народонаселения, а также еще дальше от точек  $D_k, D_b$ . Следовательно, скачков больших в численности народонаселения в ближайшее время быть не должно.

**Прогноз роста народонаселения в модели МФД.** Прогноз роста народонаселения будем делать в предположении сохранения значений основных тенденций сложившихся за последние 62 года. Для

прогнозирования народонаселения  $y_i(t)$  на  $i$  периоде времени будем использовать формулу:

$$y_i(t) = \bar{y}_{0i} - \eta h_i(t - t_{0i}) + \Delta_i. \quad (12)$$

Будем считать, что параметр  $\eta$  не сильно будет меняться на протяжении нашего столетия и возьмем его, как и в таблице 1, равным 0,251. Что касается длительности периодов, то ради простоты мы положим  $T_4 = T_5 = T_6 = 30$  лет. Считая, что закономерности поведения  $h$  сохранятся и при  $i = 4, 5, 6$ , мы имеем  $h_4 = h_3 + \frac{1}{2}(h_3 - h_2)$ ,  $h_5 = h_4 + \frac{1}{2}(h_4 - h_3)$ ,  $h_6 = h_5 + \frac{1}{2}(h_5 - h_4)$ . Тогда  $h_4 = -0,340$ ;  $h_5 = -0,350$ ;  $h_6 = -0,355$ . Все  $\Delta_i$  положим равными  $\Delta_3 = 0,016$ . Прогнозные значения  $y(t)$  удобно представить в виде таблицы 3.

Таблица 3

Прогнозные значения  $y(t)$ .

$i$	4	5	6
$T_i$	30 2012-2042	30 2043-2073	30 2073-2103
$X_i$	0,08534	0,08785	0,09105
$\bar{y}_i$	9,6062	12,2417	14,9732
$h_i$	-0,340	-0,350	-0,355
$\Delta$	0,016	0,016	0,016

Из данных таблицы 3 следует, что в конце 4 периода (2042г.) численность населения Земли составит  $9,606 \pm 0,016$  млрд. чел., в конце 5 периода (2073) –  $12,242 \pm 0,016$  млрд.чел., в к конце 6 периода (2103 г.) -  $14,973 \pm 0,016$  млрд. Человек. Пересечение численности в 14 млрд. человек должно произойти в  $2092 \pm 1$  году.

На первый взгляд у нас получились несколько завышенные прогнозные значения роста численности народонаселения. За последние 62 года народонаселение выросло примерно 2,6 раза. Чтобы к 2092 году оно удвоилось, нужен всего лишь временной интервал в 80 лет. За это время вполне может наступить момент, начиная с которого темпы роста народонаселения сильно снизятся. Естественно, тогда нужно внести соответствующие коррективы, опираясь на новые данные динамики народонаселения.

Таким образом, в модели мультифрактальной динамики выявлены тенденции роста народонаселения и сделан прогноз роста до 2103 года. Получены основные уравнения мультифрактальной модели роста населения. Дана классификация всех возможных процессов роста

народонаселения в модели мультифрактальной динамики. На основании опытных данных по численности народонаселения за последние 62 года проведен расчет параметров МФД за это время. Выявлено три периода, на каждом из которых рост народонаселения близок к линейному. Причем с каждым периодом скорость роста увеличивается с 0,0488 млрд.чел/год в первом периоде до 0,0808 млрд.чел/год в третьем периоде. Несколько увеличивается и длительность периодов. Приведенный на Рис.6 график функции  $h$  указывает на самоподобный характер роста народонаселения. Ежегодно возникают волны роста народонаселения, которые за 20 – 30 периодов формируют ярко выраженный кусочно-линейный тренд. Рассчитанные нами значения фрактальной размерности кривой роста народонаселения значительно отстоят от  $D_0$ , при котором рост прекращается. Данный факт указывает на сохранение тенденции роста народонаселения в ближайшей перспективе. Дан прогноз роста народонаселения на ближайшие 90 лет на основе модели МФД. Из него следует, что к 2042 году население Земли составит 9,606 млрд.человек, к 2072 году – 12,242 млрд.человек, к 2102 году – 14,973 млрд.человек. Удвоение численности народонаселения 2011 года в 7 млрд.человек должно произойти в  $2092 \pm 1$  году. Произойдет или нет стабилизация численности народонаселения к этому времени вопрос открытый.

### **Список литературы**

1. С.П.Капица. Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. М.: Наука, 1999.
2. Т.Мальтус. Опыт о законе народонаселения. Шедевры мировой экономической мысли. Т. 4. Петрозаводск: Петроком.1993.
3. H.von Foerster, P.Vora, L.AA Doomsday Friday 13 November, A.D.2026.Science132: 1 291-1295. 1960.
4. С.П. Капица. Математическая модель роста населения мира. Мат.моделирование: 4/6: с.65-79. 1992.
5. А.А.Акаев, в.А.Садовничий. Математическая модель демографической динамики со стабилизацией численности населения мира вокруг стационарного уровня. Доклады РАН 435/3:320-324. 2010.
6. A/N Kudinov, V.P.Tsvetkov and I.V.Tsvetkov. Cafas tropkes in the Multi-FractalDynamics of Social-Economic System. Russian Journal of Mathematical Physics, vol.18, No.2, 2011, pp. 149-155.

7. А.Н.Кудинов, В.П.Цветков, И.В.Цветков. Валютный кризис и бифуркационные явления в рамках фрактальной модели. Финансы и кредит. Выпуск 46(326).2009.с.59.

**TRENDS AND FORECASTING MODELS OF GROWTH  
POPULATION DYNAMICS MULTIFRACTAL**

**A.N.Kudinov, V.N.Ryzhikov, V.P.Tsvetkov, I.V. Tsvetkov**

Tver State University, Tver

In this paper, based on a model built multifractal multifractal dynamics model of population growth . Under this model, a classification of all possible processes of population growth . The calculation of the model parameters for the last 62 year. The schedule function  $h$ , which is clearly visible from the accelerating trend of population growth in the near future . On the basis of the developed model is made of population growth forecast for the next 90 years. It follows from the doubling of the population in 2011 to 7 billion people in  $2092 \pm 1$  year.

**Keywords:** *multifractal dynamics, population, the classification process, the function  $h$ , the prognosis*

*Об авторах:*

КУДИНОВ Алексей Никифорович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования Тверского государственного университета, e-mail: tsvet@tversu.ru

РЫЖИКОВ Владимир Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики и математической физики Тверского государственного университета, e-mail: tsvet@tversu.ru

ЦВЕТКОВ Виктор Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей математики и математической физики Тверского государственного университета, e-mail: tsvet@tversu.ru

ЦВЕТКОВ Илья Викторович– доктор технических наук, профессор кафедры экономики и управления производством Тверского государственного университета, e-mail: tsvet@tversu.ru